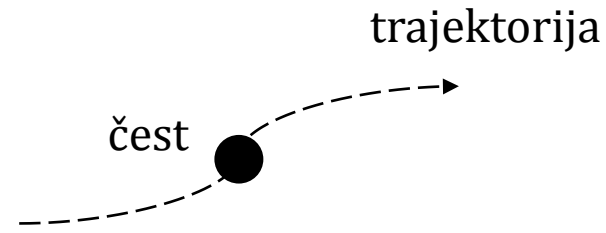


2 Totalni diferencijal

Vježbe iz Dinamičke meteorologije 1

Lagrangeov sustav



- prati gibanje česti
- Vremenska promjena varijable naziva se totalni diferencijal i opisuje ukupnu promjenu varijable. Oznaka za totalni diferencijal:

$$\frac{D}{Dt} \quad \text{ili} \quad \frac{d}{dt}$$

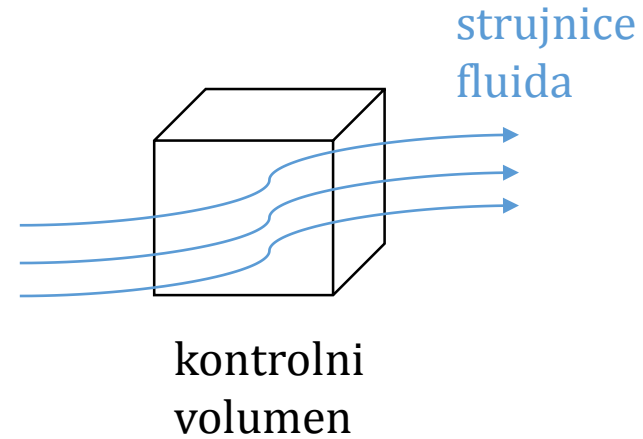
- Totalni diferencijal također se zove i materijalni ili procesni diferencijal kako bi se naglasilo da je to promjena koja se računa prateći gibanje česti fluida, tj. promjena koja se računa prateći neki fizikalni proces kojem je podvrgnuta čest.

Eulerov sustav

- sustav fiksiran u prostoru
- Parcijalna derivacija po vremenu

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

opisuje vremensku promjenu varijable u fiksnoj točki (lokalnu promjenu) i naziva se lokalni diferencijal.



Veza između ukupne i lokalne promjene varijable

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T,$$

gdje je T neki skalar (npr. temperatura).

- Lokalna promjena varijable jednaka je razlici promjene promatrane varijable prateći gibanje i advektivne promjene te varijable,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla T.$$

- Za temperaturu, član $\frac{\partial T}{\partial t}$ zovemo temperaturna tendencija, a označava promjenu temperature u fiksnoj točki (npr. meteorološkoj postaji).
- Za stacionarno strujanje vrijedi $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

Veza između ukupne i lokalne promjene varijable

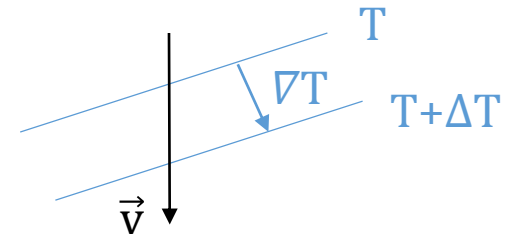
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla T$$

- Član $\frac{DT}{Dt}$ opisuje promjenu temperature česti zraka koja se giba (npr. zbog hlađenja, oslobađanjem latentne topline).
- Ako je $\frac{DT}{Dt} = 0$, tada je T konzervativna veličina s obzirom na to gibanje.

Veza između ukupne i lokalne promjene varijable

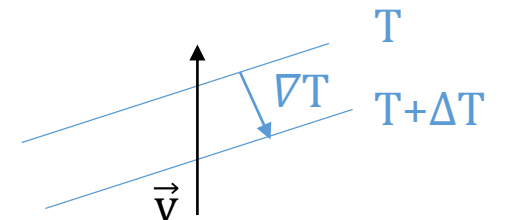
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla T$$

- Član $-\vec{v} \cdot \nabla T$ zovemo advekcija skalara. Advektivna promjena opisuje doprinos lokalnoj promjeni skalara zbog gibanja zraka (gibanjem se dolazi u područje s drugačijom vrijednosti skalara T).
- Ako se radi o temperaturi:
 - $-\vec{v} \cdot \nabla T < 0$ hladna advekcija,
 - vjetar puše iz hladnijeg područja u područje gdje se nalazi topliji zrak $\rightarrow$ advekcija temperature je negativna $\rightarrow$ advektivni član doprinosi padu temperature u promatranoj točki



$$-\vec{v} \cdot \nabla T > 0 \text{ topla advekcija,}$$

- zrak struji iz toplijeg prema hladnijem području, stoga temperatura lokalno raste



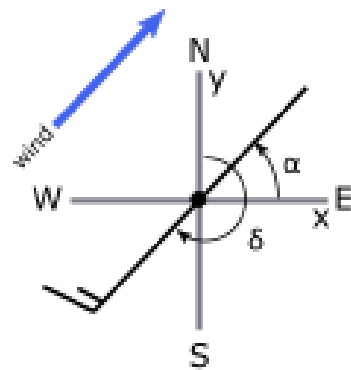
Temperaturna advekcija

- Temperaturna advekcija je proces kojim se pomoću vjetra prenosi toplina kroz atmosferu. Ovisi o brzini vjetra, lokalnom gradijentu temperature i odnosu ta dva faktora,

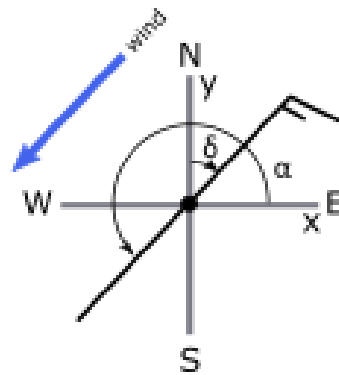
$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{advekcija}} = -\vec{v} \cdot \nabla T = -\vec{v} \cdot \text{grad } T$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{advekcija}} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} - w \frac{\partial T}{\partial z}$$

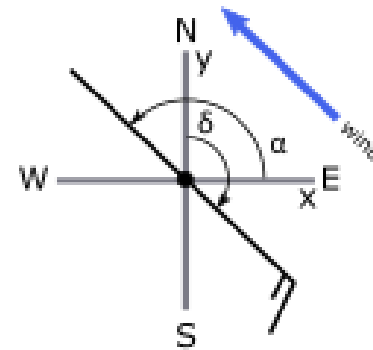
Meteorološki smjer vjetra



wind from SW
southwesterly
math: $\alpha = 45^\circ$
meteo: $\delta = 225^\circ$



wind from NE
northeasterly
math: $\alpha = 225^\circ$
meteo: $\delta = 45^\circ$



wind from SE
southeasterly
math: $\alpha = 135^\circ$
meteo: $\delta = 135^\circ$

Izvor:

W. Brune <https://www.e-education.psu.edu/meteo300/node/719>

Primjeri i zadatci

1. Površinsko polje tlaka opada za $3 \text{ hPa}/180 \text{ km}$ u smjeru istoka. Brod plovi prema istoku brzinom od 10 km/h . Instrument na brodu bilježi pad tlaka od $1 \text{ hPa}/3 \text{ h}$. Kolika je promjena tlaka na otoku pored kojeg brod prolazi?

2. Brod putuje prema sjeveru brzinom od 10 km/h . Tlak pri tlu raste prema sjeverozapadu za 5 Pa/km . Koliku tendenciju tlaka bilježi barograf na obližnjem otoku, ako tlak izmjeren na brodu opada za $1 \text{ hPa}/3 \text{ h}$?

3. Izračunajte lokalnu promjenu temperature tijekom tri sata ako horizontalni vjetar iznosa brzine 6 m/s zatvara kut od 60° sa smjerom najvećeg pada temperature. Najkraća udaljenost između izoterma povučenih svakih 5°C na karti razmjera $1:10^7$ iznosi 2.5 cm . Temperatura pojedinih česti zraka ne mijenja se u vremenu.

4. Temperatura u točki koja se nalazi 100 km sjeverno od meteorološke postaje je 6°C niža od temperature izmjerene na postaji. Kolika će biti promjena temperature na postaji ako puše sjeveroistočni vjetar brzine 10 m/s , a zrak se zbog zračenja zagrijava za 1°C/h ?

Rješenja zadataka

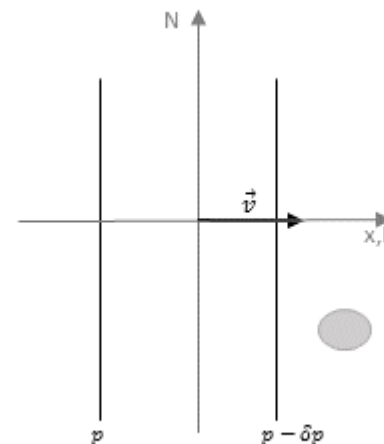
1. Površinsko polje tlaka opada za 3 hPa/180 km u smjeru istoka. Brod plovi prema istoku brzinom od 10 km h⁻¹. Instrument na brodu bilježi pad tlaka od 1 hPa/3 h. Kolika je promjena tlaka na otoku pored kojeg brod prolazi?

Rješenje:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3 \text{ hPa}}{180 \cdot 10^3 \text{ m}}$$

$$\frac{Dp}{Dt} = -\frac{1 \text{ hPa}}{3 \text{ h}}$$

$$u = 10 \text{ km h}^{-1}$$



$$\frac{\partial p}{\partial t} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{Dp}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \\ v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{Dp}{Dt} - u \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1 \text{ hPa}}{3 \text{ h}} + 10 \text{ km h}^{-1} \frac{3 \text{ hPa}}{180 \text{ km}} = -\frac{1 \text{ hPa}}{3 \text{ h}} + \frac{1 \text{ hPa}}{6 \text{ h}} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1 \text{ hPa}}{6 \text{ h}} \end{aligned}$$

2. Brod putuje prema sjeveru brzinom od 10 km h^{-1} . Tlak pri tlu raste prema sjeverozapadu za 5 Pa km^{-1} . Koliku tendenciju tlaka bilježi barograf na obližnjem otoku, ako tlak izmjeren na brodu opada za $1 \text{ hPa}/3\text{h}$?

Rješenje:

$$v = 10 \text{ km h}^{-1}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} = 5 \text{ Pa km}^{-1}$$

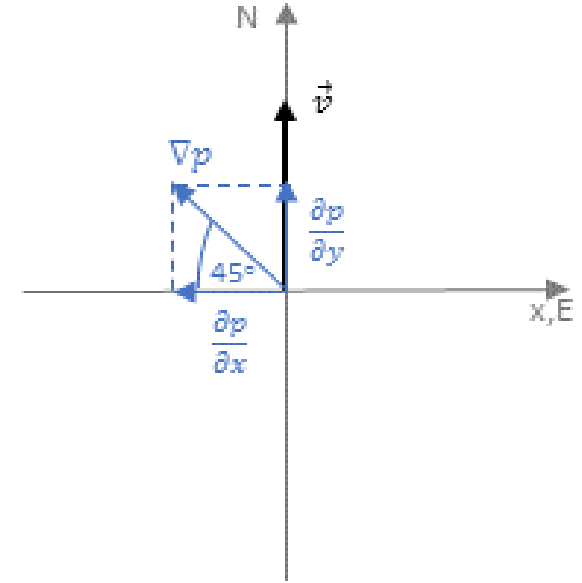
$$\frac{Dp}{Dt} = -\frac{1 \text{ hPa}}{3 \text{ h}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = ?$$

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{Dp}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla p = \frac{Dp}{Dt} - |\vec{v}| \cdot |\nabla p| \cos \alpha$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{100 \text{ Pa}}{3 \text{ h}} - 10 \text{ km h}^{-1} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\text{Pa}}{\text{km}} = -\frac{2.06 \text{ hPa}}{3 \text{ h}}$$



3. Izračunajte lokalnu promjenu temperature tijekom tri sata ako horizontalni vjetar brzine 6 m s^{-1} zatvara kut od 60° sa smjerom najvećeg pada temperature. Najkraća udaljenost između izoterma povučenih svakih 5°C na karti razmjera $1:10^7$ iznosi 2.5 cm . Temperatura pojedinih česti zraka ne mijenja se u vremenu.

Rješenje:

$$|\vec{v}| = 6 \text{ m s}^{-1}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\nabla_H T = \frac{5^\circ\text{C}}{2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 10^7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = ?$$

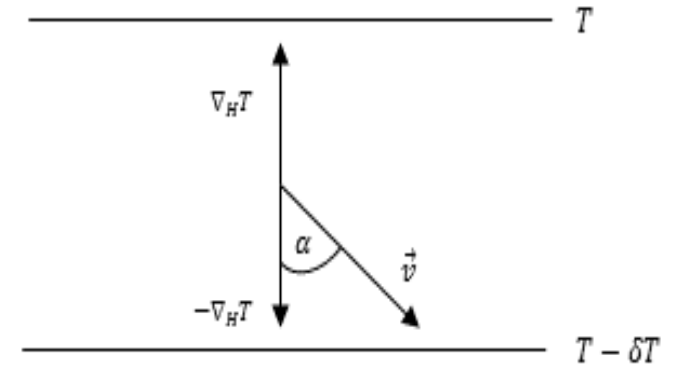
$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla T$$

$$\frac{DT}{Dt} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v}_H \cdot \nabla_H T - w \frac{\partial T}{\partial z}, \quad w \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v}_H \cdot \nabla_H T = -|\vec{v}_H| \cdot |\nabla_H T| \cos \angle(\vec{v}_H, \nabla_H T) = -|\vec{v}_H| \cdot |\nabla_H T| \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -6 \cdot 3600 \text{ m h}^{-1} \cdot \frac{2^\circ\text{C}}{10^5 \text{ m}} \cdot \cos(120^\circ) = 0.216 \frac{^\circ\text{C}}{\text{h}} = \frac{0.684^\circ\text{C}}{3 \text{ h}}$$



4. Temperatura u točki koja se nalazi 100 km sjeverno od meteorološke postaje je 6 °C niža od temperature izmjerene na postaji. Kolika će biti promjena temperature na postaji ako puše sjeveroistočni vjetar brzine 10 m s⁻¹, a zrak se zbog zračenja zagrijava za 1 °C h⁻¹?

Rješenje:

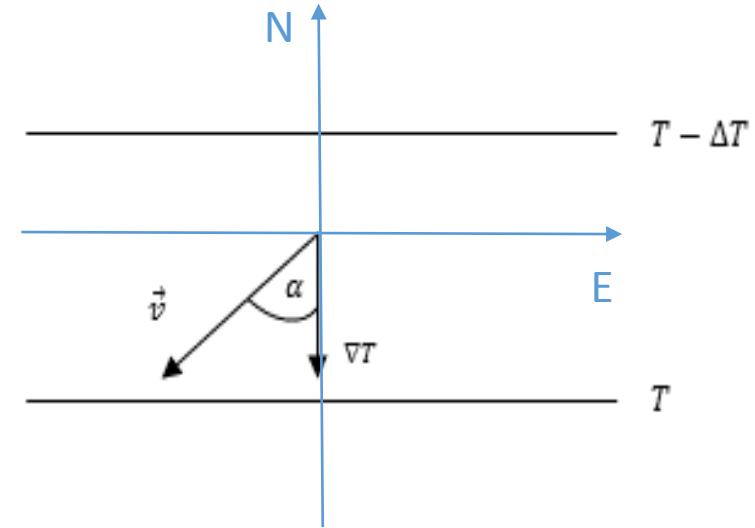
$$\Delta T = 6 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\nabla T = \frac{6^{\circ}\text{C}}{10^5 \text{ m}}$$

$$|\vec{v}| = 10 \text{ m s}^{-1}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1^{\circ}\text{C}}{\text{h}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = ?$$



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla T$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - |\vec{v}| \cdot |\nabla T| \cos \alpha = \frac{1^{\circ}\text{C}}{\text{h}} - 10 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{6^{\circ}\text{C}}{10^5 \text{ m}} \cdot \cos(45^{\circ})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1^{\circ}\text{C}}{\text{h}} - 10 \text{ m} \cdot 3600 \text{ h}^{-1} \cdot \frac{6^{\circ}\text{C}}{10^5 \text{ m}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.527 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{h}}$$