3 Fundamentalne i prividne sile

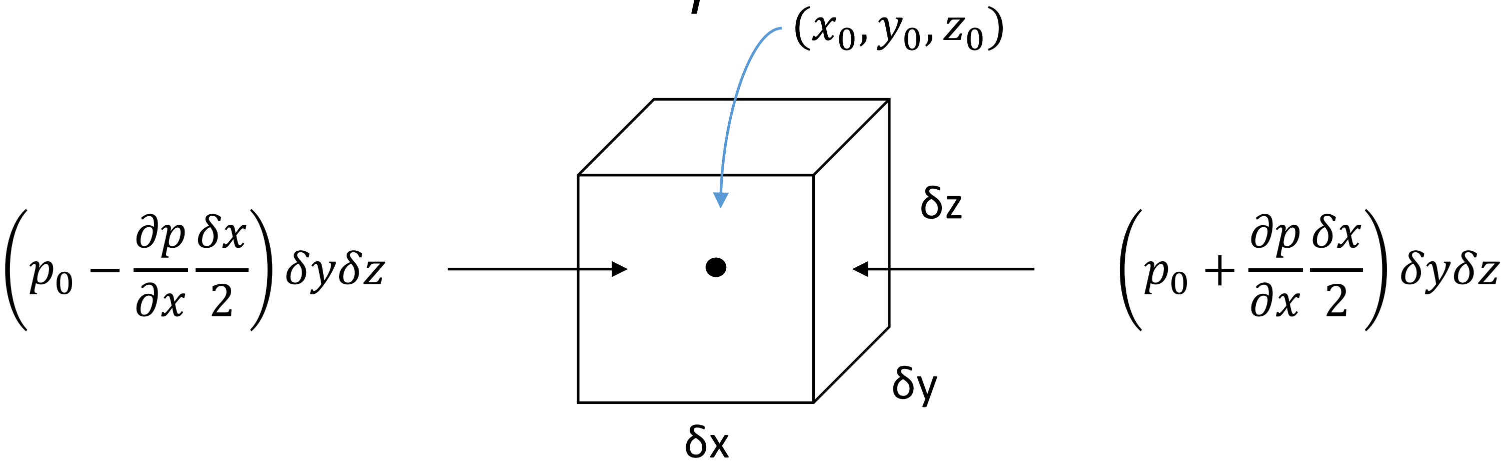
Vježbe iz Dinamičke meteorologije 1

Fundamentalne sile

Sila gradijenta tlaka

- sila koja djeluje na česte fluida koje se nalaze u nejednolikom polju tlaka → pokretač strujanja u atmosferi
- akceleracija (sila po jedinici mase):

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{1}{\rho}\nabla p = -\alpha \nabla p$$



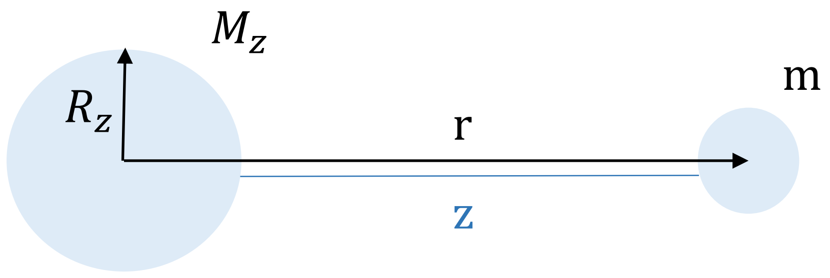
Fundamentalne sile

Gravitacija

$$\vec{F}_G = -G\frac{M_z m}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = m\vec{g}^*$$

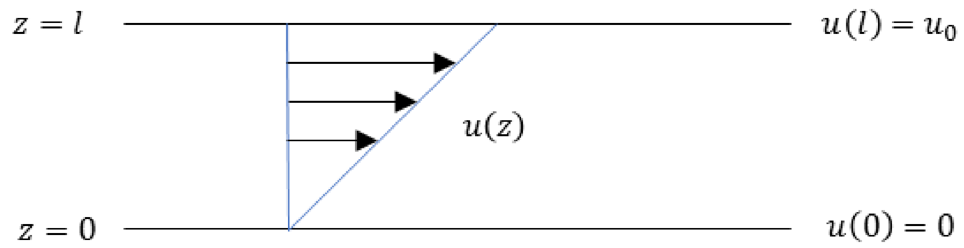
gdje je M_z masa zemlje, a G gravitacijska konstanta

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$$



$$r = R_z + z$$

Fundamentalne sile



Sila trenja – viskoznost

Promatramo li nestlačivi fluid između dvije ploče, gdje je donja ploča učvršćena, a gornja se giba brzinom u_0, tada tangencijalna sila na gornju ploču potrebna da je održi u jednolikom gibanju proporcionalna površini ploče A

$$F = \mu \frac{Au_0}{l}$$

gdje je μ koeficijent dinamičke viskoznosti.

Gornja ploča istom silom djeluje na fluid koji se nalazi odmah ispod ploče. Pri jednolikom gibanju svaki horizontalni sloj fluida djeluje istom silom na idući sloj koji se nalazi neposredno ispod promatranog sloja. U limesu kada debljina cijelog promatranog sloja teži k nuli, dobivamo viskoznu silu po jedinici površine

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

tj. napetost u smjeru z-osi zbog vertikalnog smicanja x-komponente brzine (u).

Fundamentalne sile

Viskoznost po jedinici mase

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

- Za $\mu = const.$ definira se koeficijent kinematičke viskoznosti ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

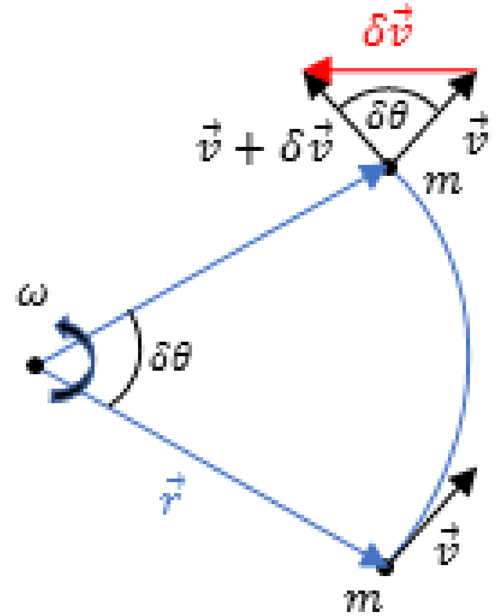
- Za atmosferu iznad 100 m visine ν je vrlo malog iznosa, tako da je molekularna viskoznost zanemariva svugdje osim u samom površinskom sloju.

Prividne sile

Prividne sile javljaju se ako se tijelo giba u sustavu koji rotira zajedno sa Zemljom. Tijelo koje miruje ili se giba jednoliko s obzirom na rotirajuću Zemlju zapravo se giba s obzirom na fiksnu točku, tj. gibanje koje sa Zemlje djeluje inercijalno, zapravo je akcelerirano gibanje.

Newtonovi zakoni gibanja mogu se u tom slučaju primijeniti samo ako se uvaži akceleracija promatranog koordinatnog sustava. Najjednostavniji način jest uvođenje prividnih sila u II. Newtonov zakon. Prividne su sile članovi inercijalne reakcije koje nastaju zbog akceleracije koordinatnog sustava.

Prividne sile



Centrifugalna sila (tijelo miruje s obzirom na Zemlju)

Iz fiksnog koordinatnog sustava vidimo konstantnu centripetalnu akceleraciju

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2\vec{r}$$

Iz sustava koji rotira zajedno s promatranom masom m vidimo da je masa stacionarna, ali na tu masu djeluje sile u smjeru osi rotacije. Moramo dodati prividnu silu kako bi tijelo bilo u ravnoteži, a tu silu zovemo centrifugalna sila. Dakle, u sustavu koji rotira s masom m vidimo stacionarnu masu, a centripetalna sila uravnotežena je centrifugalnom.

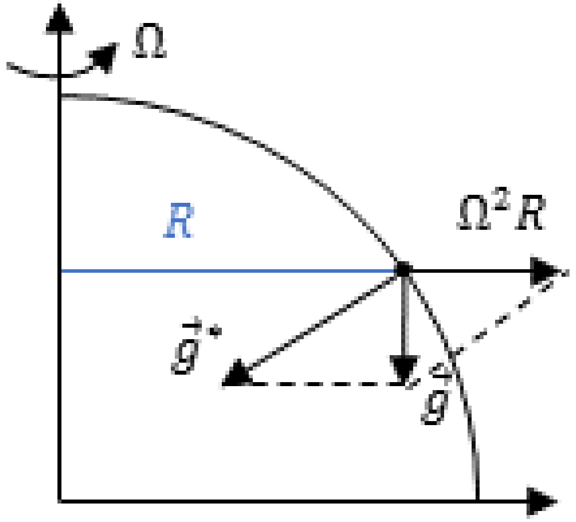
Prividne sile

Sila teža

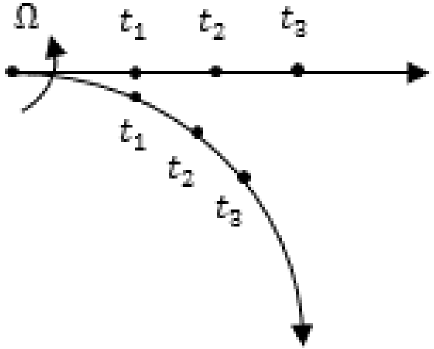
Sila teža je vektorski zbroj centrifugalne i gravitacijske sile.

Akceleracija sile teže:

$$\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R}$$



Prividne sile



Coriolisova sila

$$\vec{F}_{CO} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{V}$$

Neka se tijelo giba jednoliko s obzirom na inercijalni koordinatni sustav. Ako to tijelo promatramo iz sustava koji rotira i gdje je os rotacije okomita na ravninu gibanja, putanja tijela izgledat će zakrivljeno.

U rotirajućem koordinatnom sustavu postoji prividna sila koja otklanja tijelo koje se giba jednoliko s pravocrtne putanje. Rezultantna putanja je zakrivljena u smjeru suprotnom od smjera rotacije koordinatnog sustava, a silu otklona zovemo Coriolisova sila.

Coriolisova sila djeluje okomito na vektor brzine $\vec{v}$, te može promijeniti samo smjer gibanja. Otklon zbog Coriolisove sile na sjevernoj hemisferi uvijek je udesno od smjera gibanja.

Prividne sile

Coriolisova sila

Pretpostavimo da se tijelo giba u odnosu na Zemlju tako da ima komponente brzine u smjeru x-, y- i z-osi tako da je x-os usmjerena prema istoku, y-os prema sjeveru, a z-os vertikalno prema gore.

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

U tom su slučaju komponente Coriolisove akceleracije jednake:

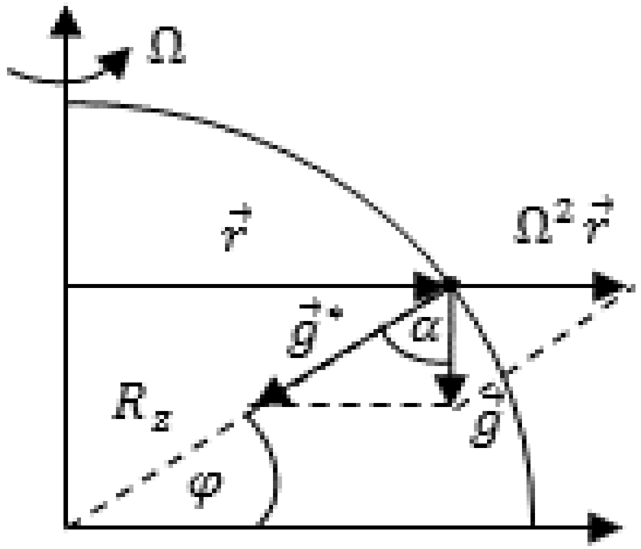
$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega v sin\varphi - 2\Omega \mathrm{wcos}\varphi = fv - 2\Omega \mathrm{wcos}\varphi$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u sin\varphi = -fu$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega u cos\varphi$$

Primjeri i zadatci

1. Izračunajte kut između gravitacijske sile i sile teže na površini Zemlje kao funkciju geografske širine. Pretpostavite da je radijus Zemlje konstantan. Izračunajte taj kut za čest koja miruje na površini Zemlje na $\varphi = 30°, 45°, 60°, 90°$.



2. Izračunajte visinu z na kojoj meteorološki satelit u ekvatorijalnoj ravnini može biti geostacionaran (tj. može uvijek ostati iznad iste točke na površini Zemlje).

3. Loptica je bačena u horizontalnoj ravnini pri geografskoj širini $\varphi = 46\ °\text{N}$. Ako loptica putuje 4 sekunde i pri tome prijeđe udaljenost od 100 m, koliko se lateralno (bočno) otkloni zbog rotacije Zemlje? Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$.

4. Projektil je ispaljen vertikalno uvis početnom brzinom w_0 na geografskoj širini φ. Zanemarite otpor zraka i izračunajte koliko će se projektil otkloniti kada se vrati na tlo? Zanemarite član $2\Omega u cos\varphi$ u odnosu na g u jednadžbi gibanja za vertikalnu komponentu.

5. Projektil je ispaljen prema istoku na geografskoj širini 45 °N, te putuje 1000 km horizontalnom brzinom od 800 m/s. Koliki je iznos otklona projektila od početne paralele u horizontalnoj ravnini zbog Coriolisove sile i u kojem je smjeru taj otklon? Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$.

6. Izračunajte koliko će se tijelo otkloniti od vertikale zbog djelovanja Coriolisove sile kada se pusti da slobodno pada s visine od 5 km iznad ekvatora. Viskoznost zraka se zanemaruje. Koliki je iznos tog otklona i u kojem je smjeru?

7. Igrač bejzbola baci lopticu prema istoku na geografskoj širini 38 °N. Za vrijeme od 5 s loptica prijeđe udaljenost od 145 m. Koliki je lateralni otklon loptice zbog djelovanja rotacije Zemlje?

Rješenja zadataka

1. Izračunajte kut između gravitacijske sile i sile teže na površini Zemlje kao funkciju geografske širine. Pretpostavite da je radijus Zemlje konstantan. Izračunajte taj kut za čest koja miruje na površini Zemlje na $\varphi = 30°, 45°, 60°, 90°$.

Rješenje:

- Gravitacija:

$$\vec{F}_G = -G\frac{M_z m}{R_z^2}\left(\frac{\overrightarrow{R_z}}{R_z}\right) = m\vec{g}^*$$

- Centrifugalna sila:

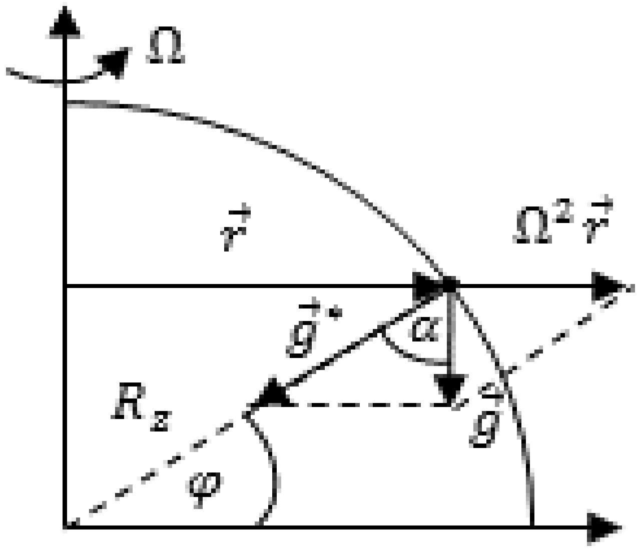
$$\vec{F}_c = m\Omega^2\vec{r}$$

- Akceleracija sile teže:

$$\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2\vec{r}$$

- $\vec{r}$ – vektor udaljenosti od osi rotacije

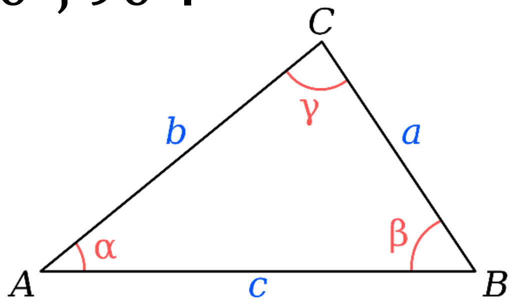
$$|\vec{r}| = R_z cos\varphi$$



1. Izračunajte kut između gravitacijske sile i sile teže na površini Zemlje kao funkciju geografske širine. Pretpostavite da je radijus Zemlje konstantan. Izračunajte taj kut za čest koja miruje na površini Zemlje na $\varphi = 30°, 45°, 60°, 90°$.

- Sinusov poučak

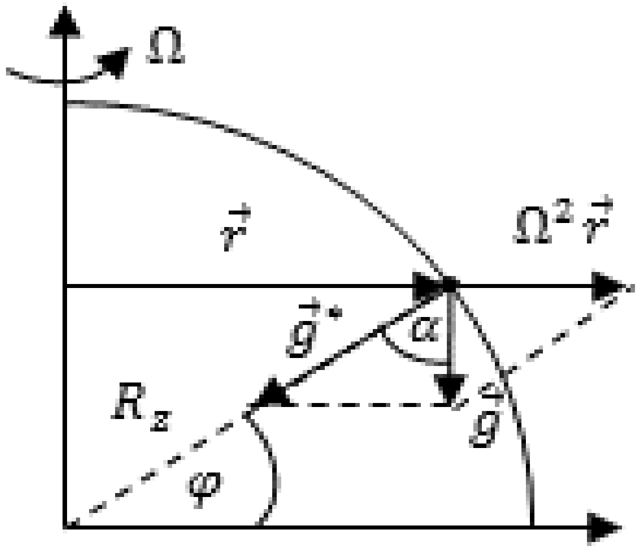
$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$$



$$\left|\frac{\Omega^2\vec{r}}{sin\alpha}\right| = \left|\frac{\vec{g}}{sin\varphi}\right| \Rightarrow sin\alpha = \left|\frac{sin\varphi}{\vec{g}}\right| \cdot |\Omega^2\vec{r}| = \frac{sin\varphi}{g}\Omega^2 R_z cos\varphi$$

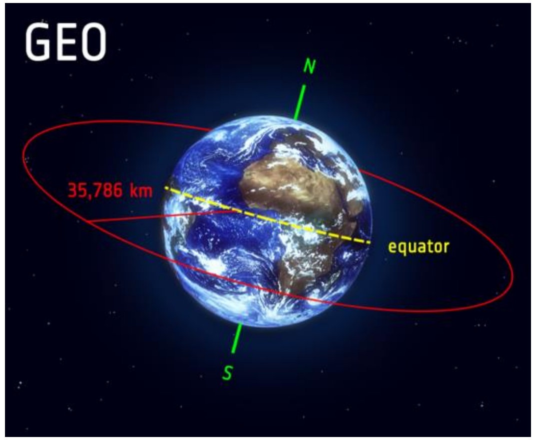
- $R_z = 6371$ km; $g = 9.81\ ms^{-2}$; $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$
- $\sin(2\varphi) = 2sin\varphi cos\varphi$

$$sin\alpha = \frac{\Omega^2 R_z \sin(2\varphi)}{2g}$$



$\boldsymbol{\varphi}$ [°]	30; 60	45	90
$\boldsymbol{\alpha}$ [°]	$8.6 \cdot 10^{-2}$	$9.9 \cdot 10^{-2}$	0

2. Izračunajte visinu z na kojoj meteorološki satelit u ekvatorijalnoj ravnini može biti geostacionaran (tj. može uvijek ostati iznad iste točke na površini Zemlje).



izvor:
https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Transportation/Types_of_orbits

Rješenje:

- Gravitacijska sila kojom Zemlja privlači satelit mora biti u ravnoteži s centrifugalnom silom:

$$m\vec{g}^* + m\Omega^2\vec{r} = 0$$

$$\vec{g}^* = -G\frac{M_z}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right), \qquad r = R_z + z$$

- gravitacijska konstanta

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$$

- masa Zemlje

$$M_z = 5.976 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

- radijus Zemlje $R_z = 6371\ \mathrm{km}$
- kutna brzina rotacije Zemlje

$$\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s^{-1}}$$

$$\Omega^2\vec{r} = G\frac{M_z}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\Omega^2 r = G\frac{M_z}{r^2}$$

$$\Omega^2(R_z + z) = G\frac{M_z}{(R_z + z)^2}$$

$$(R_z + z)^3 = G\frac{M_z}{\Omega^2}$$

$$z = \left(G\frac{M_z}{\Omega^2}\right)^{1/3} - R_z$$

$$\boxed{z \approx 35855\ \mathrm{km}}$$

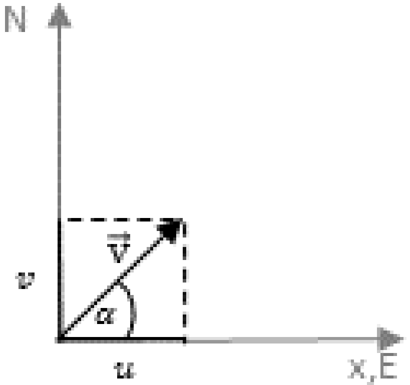
3. Loptica je bačena u horizontalnoj ravnini za geografskoj širini $\varphi = 46$ °N. Ako loptica putuje 4 sekunde i pri tome prijeđe udaljenost od 100 m, koliko se lateralno (bočno) otkloni zbog rotacije Zemlje? Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rješenje:

$\varphi = 46$ °N

d = 100 m

t = 4 s



Lateralni otklon:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$|\vec{\mathrm{v}}| = \frac{d}{t} = \frac{100\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{s}} = 25\ \mathrm{m\ s}^{-1}$$

- Coriolisova akceleracija

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega v sin\varphi - 2\Omega w cos\varphi$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u sin\varphi$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega u cos\varphi$$

$$u = |\vec{\mathrm{v}}| cos\alpha, \qquad v = |\vec{\mathrm{v}}| sin\alpha, \qquad w = 0$$

3. Loptica je bačena u horizontalnoj ravnini za geografskoj širini $\varphi = 46$ °N. Ako loptica putuje 4 sekunde i pri tome prijeđe udaljenost od 100 m, koliko se lateralno (bočno) otkloni zbog rotacije Zemlje? Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega v sin\varphi - 2\Omega w cos\varphi = 2\Omega v sin\varphi \ / \int_{t=0}^{t}$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u sin\varphi \ / \int_{t=0}^{t}$$

$$u = 2\Omega v sin\varphi \ \cdot \mathrm{t}, \qquad v = -2\Omega u sin\varphi \ \cdot t$$

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}$$

$$\Delta x = \int_{t=0}^{t} u dt = 2\Omega v sin\varphi \int_{t=0}^{t} t dt = 2\Omega v sin\varphi \frac{t^2}{2}$$

$$\Delta y = \int_{t=0}^{t} v dt = -2\Omega u sin\varphi \int_{t=0}^{t} t dt = -2\Omega u sin\varphi \frac{t^2}{2}$$

3. Loptica je bačena u horizontalnoj ravnini za geografskoj širini $\varphi = 46$ °N. Ako loptica putuje 4 sekunde i pri tome prijeđe udaljenost od 100 m, koliko se lateralno (bočno) otkloni zbog rotacije Zemlje? Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$.

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\Delta l^2 = \Omega^2 |\vec{\mathrm{v}}|^2 sin^2\alpha\ sin^2\varphi\ t^4 + \Omega^2 |\vec{\mathrm{v}}|^2 cos^2\alpha\ sin^2\varphi\ t^4$$

$$\Delta l^2 = \Omega^2 |\vec{\mathrm{v}}|^2 sin^2\varphi\ t^4 (sin^2\alpha + cos^2\alpha\ )$$

$$\Delta l^2 = \Omega^2 |\vec{\mathrm{v}}|^2 sin^2\varphi\ t^4$$

$$\Delta l = \Omega |\vec{\mathrm{v}}| sin\varphi\ t^2$$

$$\Delta l = 7.29 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1} \cdot 25\ \mathrm{ms}^{-1} \cdot \sin(46°) \cdot 16\ \mathrm{s}^2$$

$$\boxed{\Delta l = 2.1\ \mathrm{cm}}$$

4. Projektil je ispaljen vertikalno uvis početnom brzinom w_0 na geografskoj širini φ. Zanemarite otpor zraka i izračunajte koliko će se projektil otkloniti kada se vrati na tlo? Zanemarite član $2\Omega u cos\varphi$ u odnosu na g u jednadžbi gibanja za vertikalnu komponentu.

Rješenje:

- U jednadžbi gibanja zanemarujemo doprinos Coriolisove sile, $2\Omega u cos\varphi \ll$

$$\frac{dw}{dt} = 2\Omega u cos\varphi - g \approx -g$$

- Integriramo po vremenu od 0 do t, tako da se dobije:

$$w = w_0 - gt$$

gdje je w_0 početna brzina kojom je projektil ispaljen.

- Na vrhu putanje $w(t) = 0$, slijedi da je vrijeme potrebno za gibanje prema gore jednako

$$t = \frac{w_0}{g}$$

- Ukupno vrijeme gibanja jednako je dvostrukom vremenu do vrha

$$t_k = \frac{2w_0}{g}$$

4. Projektil je ispaljen vertikalno uvis početnom brzinom w_0 na geografskoj širini φ. Zanemarite otpor zraka i izračunajte koliko će se projektil otkloniti kada se vrati na tlo? Zanemarite član $2\Omega u cos\varphi$ u odnosu na g u jednadžbi gibanja za vertikalnu komponentu.

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega v sin\varphi - 2\Omega w cos\varphi = -2\Omega w cos\varphi \ / \int_{t=0}^{t}$$

$$\int_{u_0}^{u} du = -2\Omega cos\varphi \int_0^t (w_0 - gt)dt = -\ 2\Omega cos\varphi(w_o t - \frac{gt^2}{2})$$

$$u = \frac{dx}{dt} = -2\Omega cos\varphi(w_o t - \frac{gt^2}{2}) / \int_0^{t_k}$$

$$\Delta x = -2\Omega cos\varphi \int_0^{t_k} \left(w_o t - \frac{gt^2}{2}\right) dt$$

$$\Delta x = -2\Omega cos\varphi \left(\frac{w_0 t_k^2}{2} - \frac{g t_k^3}{6}\right) \leftarrow t_k = \frac{2w_0}{g}$$

$$\Delta x = -\frac{4}{3}\frac{\Omega cos\varphi w_0^3}{g^2}$$

Otklon prema zapadu.

5. Projektil je ispaljen prema istoku na geografskoj širini 45 °N, te putuje 1000 km horizontalnom brzinom od 800 m/s. Koliki je iznos otklona projektila od početne paralele u horizontalnoj ravnini zbog Coriolisove sile i u kojem je smjeru taj otklon? Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rješenje:

$u = \ konst. = \ 800$ m s^{-1}

$d = 1000$ km

$\varphi = 45$ °N

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u sin\varphi \ / \int_{t=0}^{t}$$

$$v - v_0 = -2\Omega u sin\varphi\, t, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad v_0 = 0$$

$$dy = -2\Omega u sin\varphi\, t\, dt$$

- Integrira se po vremenu od 0 do t:

$$\Delta y = -2\Omega u sin\varphi\ \frac{t^2}{2}, \qquad t = \frac{d}{u}$$

$$\Delta y = -\Omega \frac{d^2}{u} sin\varphi = -64.4 \text{ km}$$

Otklon je prema jugu.

6. Izračunajte koliko će se tijelo otkloniti od vertikale zbog djelovanja Coriolisove sile kada se pusti da slobodno pada s visine od 5 km iznad ekvatora. Viskoznost zraka se zanemaruje. Koliki je iznos tog otklona i u kojem je smjeru?

Rješenje:

$u = v = 0$

$\varphi = 0° \rightarrow sin\varphi = 0,\ cos\varphi = 1$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega w cos\varphi$$

$$\frac{du}{dt} = -2\Omega w$$

- Za w $< 0 \rightarrow \frac{du}{dt} > 0$. Slobodni pad w $= -$gt:

$$\frac{du}{dt} = 2\Omega gt \ / \int_{t=0}^{t}$$

$$u = 2\Omega g \frac{t^2}{2} = \Omega g t^2$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \Omega g t^2 \rightarrow \ dx = \Omega g t^2 dt$$

- Integrira se po vremenu od 0 do t:

$$\Delta x = \Omega g \frac{t^3}{3}$$

- Slobodni pad s visine $h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}$

$$\Delta x = \frac{1}{3}\Omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = 7.75 \text{ m}$$

Otklon je prema istoku.

7. Igrač bejzbola baci lopticu prema istoku na geografskoj širini 38 °N. Za vrijeme od 5 s loptica prijeđe udaljenost od 145 m. Koliki je lateralni otklon loptice zbog djelovanja rotacije Zemlje?

Rješenje:

$\varphi = 38\ \text{°N}$

$\vec{\mathrm{v}} = u\vec{\imath}$

$u = \frac{145\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{s}} = 29\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u sin\varphi \ / \int_{t=0}^{t}$$

$$v = -2\Omega u sin\varphi\ t$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\Omega u sin\varphi\ t \ / \int_{t=0}^{t}$$

$$\Delta y = -\Omega u sin\varphi\ t^2 = -3258.9 \cdot 10^{-5}\mathrm{m} \cong -3.3\ \mathrm{cm}$$

$\boxed{\text{Otklon je prema jugu.}}$