

7 Mjere vlažnosti zraka

Vježbe iz Dinamičke meteorologije 1

Definicije

1. Tlak vodene pare ***e*** [hPa]

$$(p_d + e)\alpha_m = R_m T$$
$$p_m = p_d + e$$

2. Omjer miješanja ***r***

$$r = \frac{m_v}{m_d} = \frac{\rho_v V}{\rho_d V} = \frac{\rho_v}{\rho_d}$$

3. Relativna vlažnost ***u*** [%]

$$u = \frac{r}{r_s} \cdot 100$$

4. Specifična vlažnost ***q***

$$q = \frac{m_v}{m_v + m_d} = \frac{\rho_v V}{\rho_v V + \rho_d V} = \frac{\rho_v}{\rho_v + \rho_d}$$

5. Apsolutna vlažnost ***a*** [g m⁻³]

$$a = \frac{e}{R_v T}$$

6. Gustoća vlažnog zraka ***ρ_m*** [kg m⁻³]

$$\rho_m = \rho_v + \rho_d$$

7. Specifična plinska konstanta vlažnog zraka ***R_m*** [J kg⁻¹ K⁻¹]

$$R_m \approx R_d (1 + 0.605 r)$$

8. Virtualna temperatura ***T_V*** [K]

$$T_V = (1 + 0.605 r) T$$

9. Specifična toplina vlažnog zraka

- pri konstantnom tlaku $c_{pm} \approx c_{pd}(1 + 0.8 r)$
- pri konstantnom volumenu $c_{vm} \approx c_{vd}(1 + 0.9 r)$

INDEKSI

v= water vapour

d=dry air

m=moist air

s=saturated

Clausius-Clapeyronova jednađžba

Diferencijalna jednađžba koja opisuje promjenu tlaka zasićenja vodene pare u ovisnosti o temperaturi u sustavu u kojem se dva agregatna stanja iste tvari nalaze u ravnoteži (npr. u oblaku u kojem se uz oblačne kapljice nalazi i vodena para u stanju zasićenja):

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{T(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

gdje indeksi 1 i 2 označavaju agregatno stanje tvari, L_{12} je latentna toplina promjene agregatnog stanja, α specifični volumen, T je temperatura.

Temperatura rosišta

Čest može postati zasićena izobarnim ohlađivanjem ili dodavanjem vodene pare, tj. Isparavanjem vode u čest.

Temperatura rosišta (eng. *dew point*) T_d ili τ je temperatura pri kojoj čest zraka izobarnim ohlađivanjem postaje zasićena vodenom parom. Ako se zrak izobarno ohladi do temperature rosišta (npr. noću zbog radijacijskog ohlađivanja), tada će se pri tlu pojaviti rosa ili mraz.

Temperaturu rosišta možemo odrediti grafički uz pomoć termodinamičkog dijagrama ili izračunati iz integralnog oblika Clausius-Clapeyronove jednačbe uz uvjet da je stvarni tlak vodene pare pri temperaturi T jednak maksimalnom (ravnotežnom) tlaku vodene pare na temperaturi rosišta $e(T) = e_s(T_d)$:

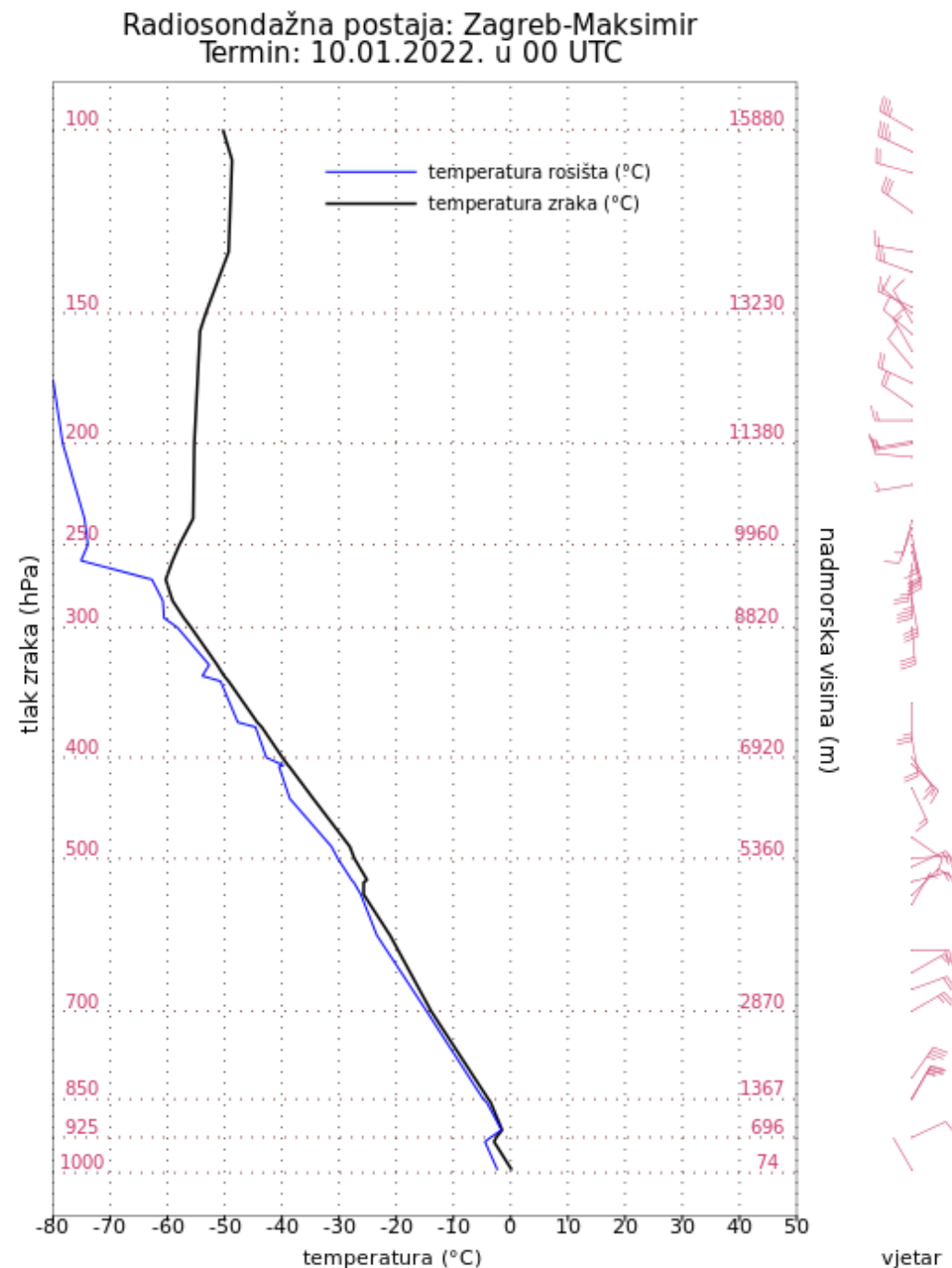
$$e_s(T_d) = e_{s0} \cdot \exp\left(\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d}\right)\right)$$

Temperatura rosišta

Pri temperaturi rosišta zrak postaje zasićen vodenom parom, tj. pri toj temperaturi počinje kondenzacija vodene pare.

Ako je razlika između temperature zraka i temperature rosišta velika, onda je zrak relativno suh, a ako je razlika mala onda je zrak relativno vlažan.

Dakle, ako su krivulje temperature zraka i temperature rosišta bliske u tom dijelu atmosfere ispunjeni su uvjeti za stvaranje oblaka i oborinu.



izvor: DHMZ (meteo.hr)

Primjeri i zadatci

1. Ako je omjer miješanja $r = 6 \cdot 10^{-3}$, tlak zraka 1000 hPa i temperatura 14 °C, nađite: specifičnu vlažnost (q), relativnu vlažnost (u) i apsolutnu vlažnost (a).
2. Izračunajte gustoću vodene pare koja se nalazi pri temperaturi od 20 °C, ako je tlak vodene pare jednak 9 hPa.
3. Ako je omjer miješanja vlažnog zraka 5.5 g kg^{-1} , a ukupni tlak vlažnog zraka 1026.8 hPa, izračunajte tlak vodene pare.
4. Specifična vlaga zraka pri 30 °C je 0.0196. Kolika je virtualna temperatura? Ako je ukupni tlak vlažnog zraka 1014 hPa, kolika je gustoća?
5. Izračunajte latentnu toplinu isparavanja vode pri 100 °C i 1013.25 hPa. Specifični volumen vodene pare je $1674 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1}$, vode $1 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1}$. Promjena tlaka zasićene vodene pare je 36 mbar K^{-1} .
6. Izračunajte promjenu tlaka zasićene vodene pare iznad leda ako se temperatura vodene pare smanji s 0 °C na -10 °C pomoću Magnus-Tetensove jednadžbe.

7. Polazeći od Clausius - Clapeyronove jednačbe pokažite da vrijedi: $\ln \frac{e_s}{6.11 \text{ hPa}} = \frac{L}{R_v} \left(\frac{1}{273 \text{ K}} - \frac{1}{T} \right)$, te izračunajte tlak zasićenja vodene pare pri 20 °C.
8. Izračunajte promjenu temperature taljenja leda ako se tlak povisi s 1 atm na 2 atm. Specifični volumeni iznose $\alpha_i = 1.0908 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$ i $\alpha_l = 1.001 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$ i $L_{il} = 334 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, gdje su specifični volumeni dani za normalni atmosferski tlak i temperaturu od 0 °C.
9. Koliko topline preda 1 m³ zasićenog zraka čija je temperatura 10 °C ako se kondenzira 0.25 g vode pri stalnom tlaku od 1000 hPa? $L_{lv} = 2500 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
10. Vlažni zrak volumena 20 l pri temperaturi 20 °C ima relativnu vlažnost 60% i izotermno se komprimira do volumena 4 l. Kolika je masa kondenzirane vode?
11. Zrak koji je zasićen vodenom parom hladi se zbog radijacije. Za koliko će se smanjiti temperatura zraka ako se kondenzira 1 g vodene pare po 1 m³ zraka? Početna temperatura je 293 K.
12. Tijekom dana temperatura zraka se promijeni za 15 °C, a parcijalni tlak vodene pare za 2 mbar. Koliko se promijeni relativna vlažnost zraka samo zbog promjene temperature, a koliko zbog promjene parcijalnog tlaka vodene pare? Srednja dnevna temperatura iznosi $\bar{T} = 280 \text{ K}$, a srednji tlak vodene pare $\bar{e} = 8 \text{ hPa}$.

13. Zadana je dozvoljena promjena relativne vlažnosti $\Delta u = \pm 10 \%$ od stanja zraka koje je određeno s $T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$, $p = 1000 \text{ mbar}$, $u = 60\%$. Kolika je maksimalno moguće povećanje temperature zraka ako je kolebanje tlaka $\Delta p = \pm 1 \text{ mbar}$, a specifična vlažnost je konstantna?
14. Čest vlažnog zraka pri tlu ima temperaturu od $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Adijabatskim dizanjem ona postaje zasićena na plohi 800 mbar . Nađite temperaturu rosišta ako je prizemni tlak 1000 mbar .
15. Čest zraka adijabatskim dizanjem postaje zasićena na 700 hPa . Izračunajte parcijalni tlak vodene pare pri tlu ako je prizemni tlak 1000 hPa , a temperatura 280 K .
16. Kolika je temperatura rosišta ako je tlak vodene pare 16 mbar ?
17. Čest zraka temperature $17 \text{ }^\circ\text{C}$ i apsolutne vlage 7 g m^3 adijabatski se diže. Za koliko će se smanjiti apsolutna vlaga ako se čest podigne za 100 m , a pritom nema razmjene vlage s okolinom?

Rješenja zadataka

1. Ako je omjer miješanja $r = 6 \cdot 10^{-3}$, tlak zraka 1000 hPa i temperatura 14 °C, nađite: specifičnu vlažnost (q), relativnu vlažnost (u) i apsolutnu vlažnost (a).

Rješenje:

$$T = 14 \text{ °C} = 287.15 \text{ K}$$

$$p_m = 1000 \text{ hPa}$$

$$r = 6 \cdot 10^{-3}$$

INDEKSI
v=vapour
d=dry air
m=moist air

$$q = ? \quad u = ? \quad a = ?$$

$$q = \frac{m_v}{m_m} = \frac{m_v}{m_v + m_d} \quad / : m_d$$

$$q = \frac{m_v/m_d}{\frac{m_v}{m_d} + 1}, \quad \frac{m_v}{m_d} = r$$

$$q = \frac{r}{1 + r} = 5.96 \cdot 10^{-3}$$

$$u = \frac{r}{r_s} \cdot 100, \quad r = \frac{\varepsilon e}{p_m - e}, \quad r_s = \frac{\varepsilon e_s}{p_m - e_s}$$

$$u = \frac{e}{e_s} \frac{p_m - e_s}{p_m - e} \approx \frac{e}{e_s}$$

$$e_s = e_{s0} \exp \left(\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right)$$

$$e_{s0} = 6.11 \text{ hPa}, T_0 = 273.15 \text{ K}, L_{lv} = 2500 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$e_s = 16.1 \text{ hPa}$$

$$r = \frac{\varepsilon e}{p_m - e} \rightarrow p_m r - er = \varepsilon e \rightarrow e = \frac{p_m r}{\varepsilon + r} = 9.5 \text{ hPa}$$

$$\varepsilon = \frac{R_d}{R_v} = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} / 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = 0.6225$$

$$u = \frac{e}{e_s} = \frac{9.5 \text{ hPa}}{16.1 \text{ hPa}} = 59 \%$$

$$a = \frac{e}{R_v T} = 7.18 \text{ g m}^{-3}$$

2. Izračunajte gustoću vodene pare koja se nalazi pri temperaturi od 20 °C, ako je tlak vodene pare jednak 9 hPa.

Rješenje:

$$T = 20\text{ °C} = 293.15\text{ K}$$

$$e = 9\text{ hPa}$$

$$\rho_v = ?$$

$$e \alpha_v = R_v T \rightarrow e = \rho_v R_v T \rightarrow \rho_v = \frac{e}{R_v T}$$

$$R_v = 461\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$$

$$\rho_v = 6.66 \cdot 10^{-3}\text{ kg m}^{-3}$$

3. Ako je omjer miješanja vlažnog zraka 5.5 g kg^{-1} , a ukupni tlak vlažnog zraka 1026.8 hPa , izračunajte tlak vodene pare.

Rješenje:

$$r = 5.5 \text{ g kg}^{-1} = 5.5 \cdot 10^{-3}$$

$$p_m = p_d + e = 1026.8 \text{ hPa}$$

$$e = ?$$

$$r = \frac{m_v}{m_d} = \frac{\rho_v V}{\rho_d V} = \frac{\rho_v}{\rho_d}, \quad \rho_v = \frac{e}{R_v T}, \quad \rho_d = \frac{p_d}{R_d T}$$

$$r = \frac{e R_d}{p_d R_v} = \frac{e R_d}{(p_m - e) R_v}$$

$$R_v p_m r - R_v e r = R_d e \rightarrow e(R_d + R_v r) = R_v p_m r$$

$$e = \frac{R_v p_m r}{R_d + R_v r} = 8.99 \text{ hPa}$$

4. Specifična vlaga zraka pri 30 °C je 0.0196. Kolika je virtualna temperatura? Ako je ukupni tlak vlažnog zraka 1014 hPa, kolika je gustoća?

Rješenje:

$$T = 30\text{ °C} = 303.15\text{ K}$$

$$q = 0.0196$$

$$p_m = 1014\text{ hPa}$$

$$T_V = ?, \quad \rho_m = ?$$

$$T_V = T(1 + 0.605 r)$$

$$r = \frac{m_v}{m_d}, \quad q = \frac{m_v}{m_v + m_d}$$

$$\frac{r}{q} = \frac{\frac{m_v}{m_d}}{\frac{m_v}{m_v + m_d}} = \frac{m_v + m_d}{m_d} = 1 + \frac{m_v}{m_d}$$

$$r = q \left(1 + \frac{m_v}{m_d} \right) = q(1 + r) \rightarrow r(1 - q) = q$$
$$r = \frac{q}{1 - q}$$

$$T_V = T \left(1 + 0.605 \frac{q}{1 - q} \right) = 306.8\text{ K} \rightarrow T_V = 33.6\text{ °C}$$

$$p_m = \rho_m R_m T, \quad T_V = \frac{R_m}{R_d} T \rightarrow R_m T = R_d T_V$$

$$p_m = \rho_m T_V R_d$$

$$\rho_m = \frac{p_m}{T_V R_d} = 1.15\text{ kg m}^{-3}$$

5. Izračunajte latentnu toplinu isparavanja vode pri 100 °C i 1013.25 hPa. Specifični volumen vodene pare je 1674 cm³g⁻¹, vode 1 cm³g⁻¹. Promjena tlaka zasićene vodene pare je 36 mbar K⁻¹.

Rješenje:

$$T = 100\text{ °C} = 373.15\text{ K}$$

$$p = 1013.25\text{ hPa}$$

$$\alpha_v = 1.674\text{ m}^3\text{kg}^{-1}$$

$$\alpha_l = 10^{-3}\text{ m}^3\text{kg}^{-1}$$

$$\frac{de_s}{dT} = 36\text{ mbar K}^{-1}$$

INDEKSI

v=water vapour

l=liquid water

i=ice

$$L_{lv} = ?$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{T(\alpha_2 - \alpha_1)} \rightarrow L_{12} = L_{lv} = T(\alpha_v - \alpha_l) \frac{de_s}{dT}$$

$$L_{lv} = 373.15\text{ K} \cdot 1.673\text{ m}^3\text{kg}^{-1} \cdot 3600 \frac{\text{Pa}}{\text{K}} = 2247.4\text{ kJ kg}^{-1}$$

6. Izračunajte promjenu tlaka zasićene vodene pare iznad leda ako se temperatura vodene pare smanji s 0 °C na -10 °C pomoću Magnus-Tetensove jednadžbe.

Rješenje:

$$T_1 = 0 \text{ °C} = 273.15 \text{ K}$$

$$T_2 = -10 \text{ °C} = 263.15 \text{ K}$$

$$\Delta e_s = ?$$

Iz Magnus-Tetensove jednadžbe:

$$e_s = e_{s0} \cdot 10^{\frac{at}{b+t}}; \quad t[\text{°C}]$$

$$e_s(t = -10 \text{ °C}) = 6.11 \text{ hPa} \cdot 10^{\frac{9.5 \cdot (-10 \text{ °C})}{265.5 - 10 \text{ °C}}} = 6.11 \cdot 10^{-\frac{95}{2555}}$$
$$e_s(t = -10 \text{ °C}) = 2.6 \text{ hPa}$$

$$e_s(t = 0 \text{ °C}) = 6.11 \text{ hPa}$$

$$\Delta e_s = e_{s2} - e_{s1} = -3.51 \text{ hPa}$$

7. Polazeći od Clausius - Clapeyronove jednačbe pokažite da vrijedi: $\ln \frac{e_s}{6.11 \text{ hPa}} = \frac{L}{R_v} \left(\frac{1}{273 \text{ K}} - \frac{1}{T} \right)$, te izračunajte tlak zasićenja vodene pare pri 20 °C.

Rješenje:

$$T = 20 \text{ °C} = 293.15 \text{ K}$$

$$e_s = ?$$

- Clausius – Clapeyronova jednačba:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{T(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

- led $\alpha_i = 1.091 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$
- voda $\alpha_l = 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$
- vodena para $\alpha_v = 1.674 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$
- Zbog $\alpha_v \gg \alpha_l, \alpha_i$ slijedi:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{\alpha_2 T} = \frac{L_{lv}}{\alpha_v T}$$

$$e_s \alpha_v = R_v T \rightarrow \alpha_v = R_v T / e_s$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv} e_s}{R_v T^2} \rightarrow \frac{de_s}{e_s} = \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2} \quad / \quad \int_1^2$$

$$\ln \frac{e_{s2}}{e_{s1}} = -\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

- Za $T_1 = 273 \text{ K} \rightarrow e_s = 6.11 \text{ hPa}$
 $e_{s2} = e_s, \quad T_2 = T$

$$\ln \frac{e_s}{e_{s0}} = \frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \rightarrow \ln \frac{e_s}{6.11 \text{ hPa}} = \frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{273 \text{ K}} - \frac{1}{T} \right)$$

$$e_s(t = 20 \text{ °C}) = 6.11 \text{ hPa} e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{T} \right)}$$

$$R_v = 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, L_{lv} = 2.5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$$

$$e_s(t = 20 \text{ °C}) = 23.93 \text{ hPa}$$

8. Izračunajte promjenu temperature taljenja leda ako se tlak povisi s 1 atm na 2 atm. Specifični volumeni iznose $\alpha_i = 1.0908 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$ i $\alpha_l = 1.001 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$ i $L_{il} = 334 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, gdje su specifični volumeni dani za normalni atmosferski tlak i temperaturu od 0 °C.

Rješenje:

$$p_1 = 1 \text{ atm} = 1013 \text{ hPa}$$

$$p_2 = 2 \text{ atm}$$

$$\Delta T = ?$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{T(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

- Taljenje leda:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{il}}{T(\alpha_l - \alpha_i)}$$

$$p_m = p_d + e/d$$

$$dp_m = dp_d + de, \quad dp_d = 0 \rightarrow dp_m = de$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L_{il}}{T(\alpha_l - \alpha_i)} \rightarrow dT = \frac{T(\alpha_l - \alpha_i)}{L_{il}} dp \rightarrow \Delta T = \frac{T(\alpha_l - \alpha_i)}{L_{il}} \Delta p$$

Porastom tlaka temperatura taljenja opada.

$$\Delta T = -0.0075 \text{ K}$$

9. Koliko topline preda 1 m³ zasićenog zraka čija je temperatura 10 °C ako se kondenzira 0.25 g vode pri stalnom tlaku od 1000 hPa? $L_{lv} = 2500 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Rješenje:

$$V = 1 \text{ m}^3$$

$$T = 10 \text{ °C} = 283.15 \text{ K}$$

$$m_{H_2O} = 0.25 \text{ g}$$

$$p = \text{const.} = 1000 \text{ hPa}$$

$$c_{pm} = c_{pd}(1 + 0.8r)$$

$$r_s = \frac{\varepsilon e_s}{p - e_s}$$

$$\delta q = ?$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{T(\alpha_v - \alpha_l)}, \alpha_v \gg \alpha_l \rightarrow \frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{\alpha_v T}$$

$$e_s \alpha_v = R_v T \rightarrow \alpha_v = \frac{R_v T}{e_s}$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv} e_s}{R_v T^2} \rightarrow dT = \frac{R_v T^2}{e_s L_{lv}} de_s$$

$$e_s = \rho_v R_v T / d \rightarrow de_s = R_v \rho_v dT + R_v T d\rho_v$$

$$dT = \frac{R_v T^2}{e_s L_{lv}} (R_v \rho_v dT + R_v T d\rho_v) = \frac{R_v^2 \rho_v T^2 dT}{e_s L_{lv}} + \frac{R_v^2 T^3 d\rho_v}{e_s L_{lv}}$$

$$dT = \frac{R_v \rho_v T \cdot R_v T dT}{e_s L_{lv}} + \frac{R_v \rho_v T \cdot R_v T^2 \frac{d\rho_v}{\rho_v}}{e_s L_{lv}} = \frac{e_s \cdot R_v T dT}{e_s L_{lv}} + \frac{e_s \cdot R_v T^2 \frac{d\rho_v}{\rho_v}}{e_s L_{lv}}$$

$$dT = \frac{R_v T}{L_{lv}} dT + \frac{R_v T^2}{L_{lv}} \frac{d\rho_v}{\rho_v}$$

$$dT(1 - \frac{R_v T}{L_{lv}}) = \frac{R_v T^2}{L_{lv}} \frac{d\rho_v}{\rho_v}$$

$$dT = \frac{R_v T^2}{L_{lv}} \frac{1}{(1 - \frac{R_v T}{L_{lv}})} \frac{d\rho_v}{\rho_v} = \frac{R_v T^2}{L_{lv} - R_v T} \frac{d\rho_v}{\rho_v} \leftarrow \rho_v = e_s / R_v T$$

$$dT = \frac{R_v^2 T^3}{L_{lv} - R_v T} \frac{d\rho_v}{e_s}$$

$$\Delta \rho_v = \frac{\Delta m_v}{V} = -0.25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad e_s = e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)} = 1232.866 \text{ Pa}$$

$$\delta q = c_p dT - \alpha dp, \quad dp = 0 \rightarrow \delta q = c_p dT$$

$$\Delta q = c_p \frac{R_v^2 T^3}{L_{lv} - R_v T} \frac{\Delta \rho_v}{e_s} = -417.53 \text{ J kg}^{-1}$$

10. Vlažni zrak volumena 20 l pri temperaturi 20 °C ima relativnu vlažnost 60% i izotermno se komprimira do volumena 4 l. Kolika je masa kondenzirane vode?

Rješenje:

$$V_1 = 20 \text{ l} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T = 20 \text{ °C} = 293.15 \text{ K} = \text{const.}$$

$$u_1 = 60\%$$

$$V_2 = 4 \text{ l} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

INDEKSI
v= water vapour
d=dry air
m=moist air
l= liquid water
s= saturated

$$m_l = ?$$

$$u = \frac{r}{r_s} = \frac{\frac{\varepsilon e}{p - e}}{\frac{\varepsilon e_s}{p - e_s}} = \frac{e}{e_s} \frac{p - e_s}{p - e} \approx \frac{e}{e_s} \rightarrow e = u e_s$$

$$\text{I.} \quad m_{uk} = m_m = m_{v1} + m_d \\ V_1, e_1, u_1$$

$$\Rightarrow \\ T = \text{const.} \\ \text{kompresija}$$

$$\text{II.} \quad m_{uk} = m_{v2} + m_d + m_l \\ V_2, e_2, u_2 = 100\%$$

- Iz I. i II. slijedi: $m_{v1} + m_d = m_{v2} + m_d + m_l$
 $m_{v1} = m_{v2} + m_l$

10. Vlažni zrak volumena 20 l pri temperaturi 20 °C ima relativnu vlažnost 60% i izotermno se komprimira do volumena 4 l. Kolika je masa kondenzirane vode?

- Izotermna kompresija: $p\alpha = \text{const.}$

$$p_1 \frac{V_1}{m_{uk}} = p_2 \frac{V_2}{m_{uk}} \rightarrow p_1 V_1 = p_2 V_2 \rightarrow p_1 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = p_2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$$

$$p_2 = 5p_1$$

I. vodena para

$$e_1 \alpha_{v1} = R_v T \rightarrow e_1 \frac{V_1}{m_{v1}} = R_v T$$

$$m_{v1} = \frac{e_1 V_1}{R_v T}$$

$$e_1 = u_1 e_s = u_1 e_{s0} \exp\left(\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$$

$$m_{v1} = \frac{V_1}{R_v T} u_1 e_{s0} \exp\left(\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$$

$$m_{v1} = 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$$

II. $u_2 = 100\%$

$$e_2 = u_2 e_s = e_s$$

$$e_2 = e_s = e_{s0} \exp\left(\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$$

$$e_2 = 23.71 \text{ hPa}$$

$$e_2 \alpha_{v2} = R_v T \rightarrow e_2 \frac{V_2}{m_{v2}} = R_v T$$

$$m_{v2} = \frac{e_2 V_2}{R_v T} = 7.021 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$$

$$m_l = m_{v1} - m_{v2} = \frac{e_1 \bar{V}_1 - e_2 \bar{V}_2}{R_v T} = 0.14 \text{ g}$$

11. Zrak koji je zasićen vodenom parom hladi se zbog radijacije. Za koliko će se smanjiti temperatura zraka ako se kondenzira 1 g vodene pare po 1 m³ zraka? Početna temperatura je 293 K.

$$R_v \rho_v dT + R_v T d\rho_v = \frac{L_{lv}}{T} \rho_v dT$$

Rješenje:

$$T = 293 \text{ K}$$

$$\Delta \rho_v = -1 \text{ g m}^{-3}$$

$$\Delta T = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{de_s}{dT} &= \frac{L_{lv}}{T(\alpha_v - \alpha_l)} \\ \alpha_v \gg \alpha_l &\rightarrow \frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{\alpha_v T} \\ de_s &= \frac{L_{lv}}{\alpha_v T} dT \end{aligned}$$

$$e_s \alpha_v = R_v T / d \rightarrow de_s = R_v \rho_v dT + R_v T d\rho_v$$

$$R_v T d\rho_v = \left(\frac{L_{lv}}{T} \rho_v - R_v \rho_v \right) dT$$

$$dT = \frac{R_v T d\rho_v}{\frac{L_{lv}}{T} \rho_v - R_v \rho_v} = \frac{R_v T d\rho_v}{\rho_v \left(\frac{L_{lv}}{T} - R_v \right)} = \frac{R_v T d\rho_v}{\frac{e_s}{R_v T} \left(\frac{L_{lv}}{T} - R_v \right)}$$

$$dT = \frac{R_v^2 T^2 d\rho_v}{e_s \left(\frac{L_{lv}}{T} - R_v \right)}$$

$$e_s = e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)} = 23.7 \text{ hPa}$$

$$\Delta T = \frac{R_v^2 T^2 \Delta \rho_v}{e_s \left(\frac{L_{lv}}{T} - R_v \right)} = -0.95 \text{ K}$$

12. Tijekom dana temperatura zraka se promijeni za 15 °C, a parcijalni tlak vodene pare za 2 mbar. Koliko se promijeni relativna vlažnost zraka samo zbog promjene temperature, a koliko zbog promjene parcijalnog tlaka vodene pare? Srednja dnevna temperatura iznosi $\bar{T} = 280$ K, a srednji tlak vodene pare $\bar{e} = 8$ hPa.

Rješenje:

$$\Delta T = 15 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta e = 2 \text{ mbar}$$

$$\bar{T} = 280 \text{ K}$$

$$\bar{e} = 8 \text{ hPa}$$

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right|_{T=\text{const.}} = ?$$

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right|_{e=\text{const.}} = ?$$

- Relativna vlažnost: $u = \frac{e}{e_s} / \ln$

$$\ln u = \ln e - \ln e_s \quad / d$$

$$\frac{du}{u} = \frac{de}{e} - \frac{de_s}{e_s}$$

- Clausius – Clayperonova jednadžba:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{T(\alpha_v - \alpha_l)} = \frac{L_{lv}}{T\alpha_v} = \frac{L_{lv}e_s}{T^2 R_v}$$

jer je $\alpha_v \gg \alpha_l$, te vrijedi $\alpha_v = R_v T / e_s$.

$$\frac{de_s}{e_s} = \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{de}{e} - \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2}$$

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right|_{T=\text{const.}} = \left| \frac{\Delta e}{e} \right| = 0.25 = 25\%$$

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right|_{e=\text{const.}} = \left| -\frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2} \right| = 1.038 = 103.8\%$$

13. Zadana je dozvoljena promjena relativne vlažnosti $\Delta u = \pm 10\%$ od stanja zraka koje je određeno s $T = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $p = 1000\text{ mbar}$, $u = 60\%$. Kolika je maksimalno moguće povećanje temperature zraka ako je kolebanje tlaka $\Delta p = \pm 1\text{ mbar}$, a specifična vlažnost je konstantna?

Rješenje:

$$\Delta u = \pm 10\%$$

$$T = 10\text{ }^\circ\text{C} = 283.15\text{ K}$$

$$p = 1000\text{ mbar}$$

$$u = 60\%.$$

$$\Delta p = \pm 1\text{ mbar}$$

$$q = \text{const.}$$

$$\Delta T = ?$$

$$u = \frac{e}{e_s} / \ln \rightarrow \ln u = \ln e - \ln e_s \quad / d$$

$$\frac{du}{u} = \frac{de}{e} - \frac{de_s}{e_s}$$

$$q = \text{const.} \rightarrow dq = 0$$

$$q = \frac{\varepsilon e}{p + (\varepsilon - 1)e} \approx \frac{\varepsilon e}{p} \quad / \ln$$

$$\ln q = \ln \varepsilon + \ln e - \ln p \quad / d$$

$$\frac{dq}{q} = \frac{de}{e} - \frac{dp}{p} = 0 \rightarrow \frac{de}{e} = \frac{dp}{p}$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{T(\alpha_v - \alpha_l)}, \alpha_v \gg \alpha_l \rightarrow \frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{\alpha_v T}, \quad \alpha_v = \frac{R_v T}{e_s}$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv} e_s}{R_v T^2} \rightarrow \frac{de_s}{e_s} = \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dp}{p} - \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2} \rightarrow \frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{\Delta T}{T^2}$$

$$\Delta T = \frac{R_v T^2}{L_{lv}} \left(\frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta u}{u} \right)$$

Maksimalno povećanje temperature bit će uz odabir $\Delta p = +1\text{ mbar}$ i $\Delta u = -10\%$.

$$\Delta T = \frac{283.15^2\text{ K}^2 \cdot 461\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}}{2.5 \cdot 10^6\text{ J kg}^{-1}} \left(\frac{1\text{ hPa}}{1000\text{ hPa}} + \frac{0.1}{0.6} \right) = 2.48\text{ K}$$

14. Čest vlažnog zraka pri tlu ima temperaturu od 20 °C. Adijabatskim dizanjem ona postaje zasićena na plohi 800 mbar. Nađite temperaturu rosišta ako je prizemni tlak 1000 mbar.

- Suoadijabatski proces $r = \frac{m_v}{m_d} = \text{const.}$

Rješenje:

$$p_1 = 1000 \text{ hPa}$$

$$T_1 = 293.15 \text{ K}$$

$$p_2 = p_k = 800 \text{ hPa}$$

$$\tau = T_d = ?$$

- Adijabatski proces: $\dot{d}q = c_p dT - \alpha dp = 0$

$$c_p dT = \alpha dp, \quad p\alpha = RT$$

$$c_p dT = \frac{RT}{p} dp$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} \quad / \int_1^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p}$$

$$r_1 = r_k \rightarrow \frac{\varepsilon e_1}{p_1 - e_1} = \frac{\varepsilon e_k}{p_k - e_k} \quad / \cdot \frac{1}{\varepsilon} \frac{p_k - e_k}{e_1}$$

$$\frac{p_k - e_k}{p_1 - e_1} = \frac{e_k}{e_1} \quad / \cdot \frac{p_1 - e_1}{e_k}$$

$$\frac{p_k}{e_k} - 1 = \frac{p_1}{e_1} - 1 \rightarrow \frac{p_k}{p_1} = \frac{e_k}{e_1}$$

- Za $T_2 = T_k$ i $p_2 = p_k$:

$$\left(\frac{T_k}{T_1} \right) = \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{R/c_p} \rightarrow \left(\frac{T_k}{T_1} \right) = \left(\frac{e_k}{e_1} \right)^{R/c_p}$$

$$T_k = 275.05 \text{ K}$$

$$e_2 = e_k = e_s(T_2) = e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_k} \right)}$$

$$e_k = 7.08 \text{ hPa}$$

14. Čest vlažnog zraka pri tlu ima temperaturu od 20 °C. Adijabatskim dizanjem ona postaje zasićena na plohi 800 mbar. Nađite temperaturu rosišta ako je prizemni tlak 1000 mbar.

$$e_k = 7.082 \text{ hPa}$$

- $e_k = e_s(T_k)$ je maksimalni parcijalni tlak vodene pare pri temperaturi T_k i tlaku p_k

$$e_1(T_1, p_1) = e_s(\tau, p_1) = 6.11 \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right)}$$

- e_1 je stvarni tlak vodene pare pri tlaku 1000 hPa i temperaturi 20 °C i mora biti jednak maksimalnom tlaku vodene pare pri 1000 hPa i temperaturi τ

$$\ln \frac{e_s}{6.11} = \frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right)$$

$$\frac{T_k}{T_1} = \left(\frac{e_k}{e_1} \right)^{R/c_p} \rightarrow \left(\frac{T_k}{T_1} \right)^{c_p/R} = \frac{e_k}{e_1}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_0} - \frac{R_v}{L_{lv}} \ln \frac{e}{6.11} = \frac{1}{273.15 \text{ K}} - \frac{461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{2.5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}} \cdot \ln \frac{8.85 \text{ hPa}}{6.11 \text{ hPa}}$$

$$e_1 = e_k \left(\frac{T_1}{T_k} \right)^{c_p/R} = 8.85 \text{ hPa}$$

$$\tau = 278.35 \text{ K}$$

$$\tau = 5.2 \text{ °C}$$

15. Čest zraka adijabatskim dizanjem postaje zasićena na 700 hPa. Izračunajte parcijalni tlak vodene pare pri tlu ako je prizemni tlak 1000 hPa, a temperatura 280 K.

Rješenje:

$$p_1 = 1000 \text{ hPa}$$

$$T_1 = 280 \text{ K}$$

$$p_2 = p_k = 700 \text{ hPa}$$

$$e_1 = ?$$

- Adijabatski procesi: $\left(\frac{T_k}{T_0}\right) = \left(\frac{p_k}{p_0}\right)^{R/c_p}$, $\frac{p_k}{p_0} = \frac{e_k}{e_0}$

$$T_k = T_0 \left(\frac{p_k}{p_0}\right)^{R/c_p} = 252.88 \text{ K}$$

$$e_k = e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)} = 1.25 \text{ hPa}$$

$$\frac{p_k}{p_0} = \frac{e_k}{e_0} \rightarrow \left(\frac{T_k}{T_0}\right) = \left(\frac{e_k}{e_0}\right)^{R/c_p}$$

$$e_0 = \frac{p_0}{p_k} e_k = 1.786 \text{ hPa}$$

16. Kolika je temperatura rosišta ako je tlak vodene pare 16 mbar?

Rješenje:

$$e = 16 \text{ mbar}$$

$$\tau = T_d = ?$$

- Za rosište vrijedi: $e = e_s$

$$e_s = e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)}, \quad e = e_s, \quad T = \tau$$

$$e = e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right)} \rightarrow \frac{e}{e_{s0}} = e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right)} / \ln$$

$$\ln \frac{e}{e_{s0}} = \frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right)$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_0} - \frac{R_v}{L_{lv}} \ln \frac{e}{e_{s0}} = \frac{1}{273.15 \text{ K}} - \frac{461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{2.5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}} \cdot \ln \frac{16 \text{ hPa}}{6.11 \text{ hPa}} = 0.00348 \text{ K}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \tau &= 287.07 \text{ K} \\ \tau &= 13.92 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

17. Čest zraka temperature 17 °C i apsolutne vlage 7 g m³ adijabatski se diže. Za koliko će se smanjiti apsolutna vlaga ako se čest podigne za 100 m, a pritom nema razmjene vlage s okolinom?

Rješenje:

$$T = 17\text{ °C} = 290.15\text{ K}$$

$$a = 7\text{ g m}^3$$

$$\Delta z = 100\text{ m}$$

$$q = \text{const.}$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta z} = ?$$

$$a = \frac{e}{R_v T} / \ln$$

$$\ln a = \ln e - \ln R_v - \ln T / d$$

$$\frac{da}{a} = \frac{de}{e} - \frac{dT}{T}$$

$$q = \frac{\varepsilon e}{p + (\varepsilon - 1)e} \approx \frac{\varepsilon e}{p} / \ln$$

$$\ln q = \ln \varepsilon + \ln e - \ln p / d$$

$$\frac{dq}{q} = \frac{de}{e} - \frac{dp}{p} = 0 \rightarrow \frac{de}{e} = \frac{dp}{p}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} /: dz$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dz} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = \frac{1}{\rho R T} (-\rho g) - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz}$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dz} = \frac{1}{T} \left(-\frac{g}{R} - \frac{dT}{dz} \right)$$

- Specifična vlažnost $q = \text{const.}$

17. Čest zraka temperature 17 °C i apsolutne vlage 7 g m³ adijabatski se diže. Za koliko će se smanjiti apsolutna vlaga ako se čest podigne za 100 m, a pritom nema razmjene vlage s okolinom?

- Adijabatski proces: $\delta q = c_p dT - \alpha dp = 0$

$$c_p dT = \alpha dp, \quad \alpha = \frac{RT}{p}, \quad c_p dT = \frac{RT}{p} dp$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{R}{c_p p} \frac{dp}{dz} dz$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p p} (-\rho g) dz = -\frac{R \rho g}{c_p \rho R T} dz = -\frac{g}{c_p T} dz$$

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} = -1^\circ\text{C}/100 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta z} = -\frac{a}{T} \left(\frac{g}{R} - \frac{g}{c_p} \right) = -\frac{7 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^3}{290.15 \text{ K}} \left(\frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} - \frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \right)$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta z} = -0.0589 \text{ g m}^3/100 \text{ m}$$