Osnove matematičke analize

2. zadaća

1. Neka je (X, d) metrički prostor i A i B podskupovi od X. Dokažite:
   a) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}\, A \cup \mathrm{Cl}\, B$
   b) $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}\, B$. Vrijedi li obratna inkluzija?
2. Neka je $A = [-1, 1] \times [0, 2]$. Precizno dokažite da je A zatvoren skup.
3. Za sljedeće skupove odredite interior, zatvarač i rub:
   a) $A = \{1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ u $\mathbb{R}$,
   b) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$,
   c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 1, 2] \cup \{5\}\}$ u $\mathbb{R}^2$,
   d) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, 0) = \frac{1}{n}\}$,
   e) $A = \{(2, y) : y < 0\}$ u $\mathbb{R}^2$.
4. Precizno dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ zatvoren u $(\mathbb{R}^n, d_2)$.
5. Precizno dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ otvoren u $(\mathbb{R}^n, d_2)$.
6. Neka je $f : [-1, 1] \times [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x + y)^3$. Precizno dokažite da je f neprekidna funkcija. Je li f uniformno neprekidna funkcija? Obrazložite odgovor.
7. Dokažite da ja svaki linearni operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uniformno neprekidna funkcija.
8. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi $f([2, 3]) = \langle 3, +\infty\rangle$. Je li f neprekidna funkcija? Obrazložite odgovor.
9. Dokažite da je $K(0, 1)$ putevima povezan skup u $\mathbb{R}^3$.