$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

2. kolokvij, 5.2.2018.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 18 bodova)

   (a) (9 bodova) Ispitajte tip lokalnih ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s

   $$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{3} + x^2(y - 1) - y^2(1 - x).$$

   (b) (9 bodova) Na skupu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ odredite maksimum funkcije $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

2. kolokvij, 5.2.2018.

2. (ukupno 18 bodova)

   (a) (9 bodova) Odredite površinu skupa u ravnini omeđenog krivuljama $x = y^2$ i $x = y^3 - y^2$.

   (b) (9 bodova) Izračunajte trostruki integral

$$\iiint\limits_A \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

za skup $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z^2 \leq x^2+y^2 \leq 1,\ z \geq 0,\ x \geq 0,\ y \leq 0\}$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

2. kolokvij, 5.2.2018.

3. (ukupno 14 bodova)

   (a) (6 bodova) Izračunajte integral funkcije f duž puta C ako je

   $$f(x,y,z) = \sqrt{1+4y+9xz}, \text{ uz } C(t) = (t, t^2, t^3),\ t \in [0,1].$$

   (b) (8 bodova) Koristeći Greenov teorem izračunajte

   $$\int_C 2xy \sin y\, dx + x^2 y \cos y\, dy,$$

   gdje je C pozitivno orijentirana krivulja koja spaja točke $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,\pi)$ i $(0,\pi)$.

4	5	6	7	8	9

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

2. kolokvij, 5.2.2018.

4. (7 bodova) Dajte primjer funkcije $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koja ima lokalni maksimum u točki $(2, -3)$.

5. (10 bodova) Neka je Ω područje izvan (zatvorene) krivulje $r = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$ a unutar kružnice $r = 1$. Skicirajte Ω i prikažite površinu od Ω pomoću uzastopnih integrala. Integrale nije potrebno računati.

6. (10 bodova) Neka je T tijelo volumena

$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \int_{x^2}^1 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Napišite formulu za volumen V u obliku

$$V = \int_\square^\square \int_\square^\square \int_\square^\square \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z.$$

7. (5 bodova) Dajte primjer neprekidne i nekonstantne funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ za koju je integral po području između dva kraka hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ te unutar kvadrata s vrhovima $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$ i $(2, -2)$ jednak nuli.

8. (9 bodova) Nađite područje Ω u xy–ravnini koje odgovara području

$$\Gamma = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\}$$

uz zamjenu varijabli $x = 2u - 3v$, $y = u - 2v$. Izračunajte Jacobijan $J(u, v)$.

9. (9 bodova) Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom: ako $P_1(x, y)\vec{i} + Q_1(x, y)\vec{j}$ i $P_2(x, y)\vec{i} + Q_2(x, y)\vec{j}$ nisu gradijenti, onda ni $(P_1 + P_2)(x, y)\vec{i} + (Q_1 + Q_2)(x, y)\vec{j}$ nije gradijent.

1a	1b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

2. kolokvij, 5.2.2018.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 18 bodova)

   (a) (9 bodova) Ispitajte tip lokalnih ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s

   $$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{3} + xy(x + y - 2).$$

   (b) (9 bodova) Na skupu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ odredite maksimum funkcije $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

2. kolokvij, 5.2.2018.

2. (ukupno 18 bodova)

   (a) (9 bodova) Odredite površinu skupa u ravnini omeđenog krivuljama $x = y^3 + 1$ i $x = y^3 + y^2$.

   (b) (9 bodova) Izračunajte trostruki integral

   $$\iiint\limits_A \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

   za skup $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

2. kolokvij, 5.2.2018.

3. (ukupno 14 bodova)

(a) (6 bodova) Izračunajte integral funkcije f duž puta C ako je

$$f(x,y,z) = \sqrt{16yz + 4\sqrt{z}}, \text{ uz } C(t) = (1, t^2, t^4), \ t \in [0,1].$$

(b) (8 bodova) Koristeći Greenov teorem izračunajte

$$\int_C xy^2 \sin x \, dx - 2xy \cos x \, dy,$$

gdje je C pozitivno orijentirana krivulja koja spaja točke $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, 1)$ i $(-\pi, 1)$.

4	5	6	7	8	9

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

2. kolokvij, 5.2.2018.

4. (7 bodova) Dajte primjer funkcije $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koja ima lokalni minimum u točki $(3, -2)$.

5. (10 bodova) Neka je Ω područje unutar (zatvorene) krivulje $r = 4\cos\theta$ a izvan kružnice $r = 2$. Skicirajte Ω i prikažite površinu od Ω pomoću uzastopnih integrala. Integrale nije potrebno računati.

6. (10 bodova) Neka je T tijelo volumena
$$V = \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_1^2 \int_0^{\ln y} \int_{x-y}^{x+y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
Napišite formulu za volumen V u obliku
$$V = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

7. (5 bodova) Dajte primjer neprekidne i nekonstantne funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ za koju je integral po području unutar elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ jednak nuli.

8. (9 bodova) Nađite područje Ω u xy–ravnini koje odgovara području
$$\Gamma = \{(u, v) : 4 \le u \le 6, 1 \le v \le 4\}$$
uz zamjenu varijabli $x = 3u - 2v$, $y = 2u - v$. Izračunajte Jacobijan $J(u, v)$.

9. (9 bodova) Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom: ako su $P_1(x,y)\vec{i} + Q_1(x,y)\vec{j}$ i $P_2(x,y)\vec{i} + Q_2(x,y)\vec{j}$ gradijenti, onda je i $(P_1 + P_2)(x,y)\vec{i} + (Q_1 + Q_2)(x,y)\vec{j}$ gradijent.