4. Termodinamika suhoga zraka

4.1 Prvi stavak termodinamike

Promatramo čest suhoga zraka mase *m*. Dodamo li česti malu količinu topline $đQ$ brzinom $đQ$ / dt, gdje je dt diferencijal vremena, možemo primijeniti prvi stavak termodinamike (3.1.1):

$$(đQ / dt)\, dt = dU + đW = m\,(c_{vd}dT + p d\alpha) = m\,(du + dw), \qquad (4.1.1)$$

gdje je c_{vd} specifični toplinski kapacitet suhoga zraka pri konstantnom volumenu, $c_{vd} = (đq / dT)_{vol=konst} = 718$ J kg^{-1}K^{-1}, a du i dw su unutarnja energija i rad izraženi po jedinici mase. T je temperatura, p je tlak, a α je specifični volumen suhoga zraka. Podijelimo li jednadžbu (4.1.1) sa masom suhoga zraka m, dobivamo prvi stavak termodinamike izražen po jedinici mase:

$$đq = c_{vd}dT + p d\alpha, \qquad (4.1.2)$$

gdje je $đq$ dodana toplina po jedinici mase. Kako se atmosferskim mjerenjima ne mjeri ni specifični volumen α, niti gustoća zraka ($\rho = \alpha^{-1}$), želimo jednadžbu (4.1.2) prikazati pomoću mjerljivih veličina. Stoga ćemo primijeniti jednadžbu stanja idealnog plina za suhi zrak ($p\,\alpha = R_dT$, gdje je R_d specifična plinska konstanta suhoga zraka, $R_d = 287$ J kg^{-1}K^{-1}), koju ćemo najprije diferencirati:

$$p d\alpha + \alpha\, dp = R_d dT\,. \qquad (4.1.3)$$

Odatle, uz ponovnu primjenu jednadžbe stanja idealnog plina, slijedi:

$$p d\alpha = R_d dT - \alpha\, dp = R_d dT - (R_d T / p)\, dp. \qquad (4.1.4)$$

Uvrstimo izraz (4.1.4) u (4.1.2):

$$đq = c_{vd}dT + R_d dT - (R_d T / p)\, dp = (c_{vd} + R_d)\, dT - \alpha\, dp = c_{pd}\, dT - \alpha\, dp, \qquad (4.1.5)$$

gdje je c_{pd} specifični toplinski kapacitet suhoga zraka pri konstantnom tlaku, $c_{pd} = (đq / dT)_{p=konst} = 1005$ J kg^{-1}K^{-1}, a jednakost $c_{pd} = c_{vd} + R_d$ je poznata kao Mayerova relacija. Jednadžba (4.1.5) predstavlja još jedan oblik prvog stavka termodinamike prikazan po jedinici mase suhoga zraka (koji se ponaša kao idealni plin).

4.2 Drugi stavak termodinamike, specifična entropija suhoga zraka i potencijalna temperatura suhoga zraka

Krenimo od prvog stavka termodinamike (4.1.5), koji za čest suhoga zraka glasi: $đq = c_{pd}\, dT - \alpha\, dp$. Uvažimo činjenicu da se suhi zrak ponaša kao idealni plin - dakle, vrijedi jednadžba stanja idealnog plina (1.5.8), koja je za suhi zrak oblika: $p\alpha = R_d\, T$. Odatle slijedi $\alpha = R_d\, T / p$. Uvrstimo α u prvi stavak termodinamike: $đq = c_{pd}\, dT - \alpha\, dp = c_{pd}\, dT - R_d\, T\, dp / p$. Zatim podijelimo tu jednadžbu s temperaturom T:

$$đq / T = c_{pd}\, dT / T - R_d\, dp / p. \qquad (4.2.1)$$

Član s lijeve strane jednak je prema drugom stavku termodinamike (3.2.1) jednak diferencijalu specifične entropije ds, gdje je $ds = dS / m$, S je entropija česti, a m je masa česti. Odatle jednadžba (4.2.1) prelazi u

$$ds = c_{pd}\, d(\ln T) - R_d\, d(\ln p) = d \ln (T^{c_{pd}} / p^{R_d}) = đq / T\,. \qquad (4.2.2)$$

Razmjena topline česti s okolišem ($đQ = m\, đq$) događa se zbog difuzije topline (titranja molekula). Brzina kojom se toplina u atmosferi širi vođenjem zbog titranja molekula vrlo je polagani proces. Istovremeno, brzine, kojima se same atmosferske čest gibaju, puno su veće od brzina kojima se toplina vodi zrakom (prosječna horizontalna brzina atmosferskih česti na sinoptičkoj skali je reda veličine ~ 10 m s^{-1}). Stoga je $đQ / dt \to 0$, pa je veliki dio atmosferskih procesa približno adijabatski: $đQ \approx 0$, odnosno takav da je u njima entropija sačuvana (to naravno ne vrijedi za procese koji su dugotrajni). Za adijabatske procese drugi stavak termodinamike (4.2.2) prelazi u

$$đq / T = c_{pd}\, d(\ln T) - R_d\, d(\ln p) = 0. \qquad (4.2.3)$$

Podijelimo jednadžbu (4.2.3) sa c_{pd} i integriramo od početne temperature T_0 i početnog tlaka p_0 do krajnje temperature T i tlaka p. Dobivamo $\ln (T / T_0) = \ln (p / p_0)^{R_d/c_{pd}}$. Nakon antilogaritmiranja dobivamo:

$$T_0 = T\, (p_0 / p)^{R_d / c_{pd}}, \qquad (4.2.4)$$

gdje je p_0 proizvoljni konstantni (referentni) tlak. Uobičajeno je odabrati p_0 = 1000 hPa, a T_0 označiti sa θ_d, gdje je θ_d potencijalna temperatura suhoga zraka:

$$\theta_d = T\, (p_0 / p)^{R_d / c_{pd}}. \qquad (4.2.5)$$

Potencijalna temperatura suhoga zraka θ_d je konzervativna veličina za adijabatske procese, θ_d = konst. To je teorijska temperatura koju bi čest suhoga zraka imala kada bi se suhoadijabatskim procesom dovela sa tlaka p i temperature T na referentni tlak p_0.

Adijabatski procesi ($đQ = 0$) ujedino su i izentropni ($dS = 0$). To znači da se temperatura česti u adijabatskom procesu mijenja samo zbog kompresije ili ekspanzije česti, a ne zbog razmjene topline s okolišem. Da dokažemo da su adijabatski procesi izentropni, poći ćemo od Poissonove jednadžbe (4.2.5). Tu jednadžbu ćemo logaritmirati po bazi prirodnog logaritma i zatim diferencirati:

$$d\,(\ln\,\theta_d) = d\,(\ln T) + (\mathrm{R_d} / \mathrm{c_{pd}})\,d\,(\ln p_0) - (\mathrm{R_d} / \mathrm{c_{pd}})\,d\,(\ln p). \qquad (4.2.6)$$

Pomnožimo jednadžbu (4.2.6) sa $\mathrm{c_{pd}}$ i uvrstimo $d\,(\ln p_0) = 0$. Dobivamo:

$$\mathrm{c_{pd}}\,d\,(\ln\,\theta_d) = \mathrm{c_{pd}}\,d\,(\ln T) - \mathrm{R_d}\,d\,(\ln p) = \mathrm{c_{pd}}\,d\,(\ln T) - \mathrm{R_d}\,d\,(\ln p) =$$

$$= \mathrm{c_{pd}}\,dT / T - \mathrm{R_d}\,dp / p = ds = đq / T. \qquad (4.2.7)$$

Dobivamo

$$ds = \mathrm{c_{pd}}\,d\,(\ln\,\theta_d), \qquad (4.2.8)$$

što znači da su izentropni procesi ujedino i adijabatski.
Jednadžba (4.2.8) često se piše i ovako:

$$ds / dt = \mathrm{c_{pd}}\,d\,(\ln\,\theta_d) / dt. \qquad (4.2.9)$$

Konstante suhoga zraka imaju ove vrijednosti:
- specifični toplinski kapacitet (specifična toplina) suhoga zraka pri konstantnom tlaku, $\mathrm{c_{pd}} = 1005\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$;
- specifični toplinski kapacitet (specifična toplina) suhoga zraka pri konstantnom volumenu, $\mathrm{c_{vd}} = 718\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$;
- specifična plinska konstanta suhoga zraka, $\mathrm{R_d} = 287\ \mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

4.3 Entalpija suhoga zraka

Promatramo suhu čest zraka. Ako česti po jedinici mase dodamo količinu topline δq držeći tlak konstantnim ($\delta q > 0$, p = konst.), specifični volumen će se povećati od početnoga α_1 do α_2 ($\alpha_2 > \alpha_1$). Pri toj ekspanziji jedinična masa suhoga zraka učini rad $\delta w = p\delta\alpha = p(\alpha_2 - \alpha_1)$, a specifična unutarnja energija (unutarnja energija po jedinici mase) se promijeni od početne vrijednosti u_1 do vrijednosti u_2. Primijenimo prvi stavak termodinamike (4.1.1), pišući ga za jediničnu masu suhoga zraka. Uvrstimo li $\delta w = p(\alpha_2 - \alpha_1)$, dobivamo

$$\delta q = (u_2 - u_1) + p(\alpha_2 - \alpha_1) = (u_2 + p\alpha_2) - (u_1 + p\alpha_1). \qquad (4.3.1)$$

Primjenom definicije specifične entalpije (3.4.2) slijedi

$$\delta q = h_2 - h_1. \qquad (4.3.2)$$

Odatle zaključujemo da izobarno dodavanje topline rezultira promjenom entalpije suhoga zraka.

Krenimo ponovno od izraza za specifičnu entalpiju (3.4.2), kojeg ćemo najprije diferencirati

$$dh = du + pd\alpha + \alpha dp. \qquad (4.3.3)$$

Uvrstimo li u (4.3.3) prvi stavak termodinamike: $đq = du + pd\alpha$, nakon preuređivanja dobivamo još jedan oblik prvog stavka pisan za jediničnu masu

$$đq = dh - \alpha\, dp. \qquad (4.3.4)$$

Usporedimo li jednadžbu (4.3.4) sa jednadžbom (4.1.5), koju smo izveli za pretpostavljajući idealni plin (dobro nam je poznato da se suhi zrak ponaša poput idealnog plina). Pri tom koristimo jednakost $đq = c_{pd}\, dT - \alpha\, dp$. Izjednačavanjem $đq$ iz dviju jednadžbi, dobivamo diferencijal specifične entalpije za idealni plin

$$dh = c_{pd}\, dT. \qquad (4.3.5)$$

Integracijom (4.3.5) od početne entalpije $h = 0$ i početne temperature $T = 0$ do entalpije h i temperature T dobivamo specifičnu entalpiju suhoga zraka (koji se ponaša kao idealni plin)

$$h = c_{pd}\, T. \qquad (4.3.6)$$

Pretpostavimo sada da se čest suhoga zraka nalazi u hidrostatičkoj ravnoteži te da miruje. Tada mora vrijediti hidrostatička jednadžba (2.3.4a): $\partial p = -\rho\, \partial\phi$. Pokažimo najprije da je u stanju ravnoteže $\partial p = dp$, odnosno da je u stanju ravnoteže parcijalni diferencijal tlaka jednak totalnom: $\partial p = dp$.

Ukupnu promjenu tlaka općenito možemo rastaviti na doprinose od promjena tlaka u x, y i z smjeru te na doprinos od vremenske promjene: $dp = (\partial p / \partial x)\, dx + (\partial p / \partial y)\, dy + (\partial p / \partial z)\, dz + (\partial p / \partial t)\, dt$. Međutim, kako čest suhoga zraka u stanju ravnoteže miruje, mora vrijediti Pascalov zakon (2.3.3): $\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0$. Nadalje, ravnotežno stanje je stacionarno, pa nema promjena tlaka u vremenu. Stoga je ukupna (totalna) promjena tlaka u tom slučaju jednaka $dp = (\partial p / \partial z)\, dz$. Drugim riječima, tlak u slučaju hidrostatičke ravnoteže ovisi samo o visini z: $p = p(z)$, pa je $\partial p / \partial z = dp / dz$, odnosno $\partial p = dp$. Stoga jednadžbu (2.3.4) možemo prikazati i ovako

$$dp = -g\, \rho\, dz \qquad (4.3.7)$$

Kako je veza između akceleracije sile teže i geopotencijala $g = \partial\phi \;/\; \partial z$ (2.2.4), to jednadžbu (4.3.7) možemo preurediti $dp = -(\partial\phi \;/\; \partial z)\;\rho\, dz = -\rho\,(\partial\phi \;/\; \partial z)\;dz = -\rho\;d\phi$, gdje je $\rho = 1\;/\;\alpha$, je ρ gustoća, a α specifični volumen suhe česti. Tako dobivamo

$$dp = -d\phi \;/\; \alpha\,. \tag{4.3.8}$$

Uvrstimo hidrostatičku jednadžbu (4.3.8) u prvi stavak termodinamike (4.3.4). Dobivamo $đq = dh - \alpha\, dp = dh - \alpha\,(-d\phi \;/\; \alpha) = dh + d\phi$, odnosno

$$đq = d\,(h + \phi). \tag{4.3.9}$$

Jednadžba (4.3.9) pokazuje da je za adijabatski process suhoga zraka ($đq = 0$), koji se događa pri hidrostatičkoj ravnoteži, zbroj entalpije i geopotencijala sačuvan: $h + \phi =$ konst. To strogo vrijedi samo za mirnu atmosferu. Međutim, u troposferi je kinetička energija zbog gibanja fluida općenito puno manja od ukupne energije, pa su odstupanja od $h + \phi =$ konst. (~ %).

Uvrstimo li u (4.3.9) izraz za specifičnu entalpiju idealnog plina (4.3.6) dobivamo prvi stavak termodinamike za suhi zrak (idealni plin) koji se nalazi u hidrostatičkoj ravnoteži

$$đq = d\,(\mathrm{c}_{\mathrm{pd}}\, T + \phi). \tag{4.3.10}$$

Znamo da se suhi zrak može dobro aproksimirati idealnim plinom. Nadalje, hidrostatička aproksimacija dobro opisuje promjenu atmosferskog tlaka s visinom na sinoptičkoj skali[1]. Stoga je jednadžba (4.3.10) dobro opisuje ponašanje suhoga zraka.

4.4 Suhoadijabatska stopa ohlađivanja

Ako se suha čest zraka adijabatski giba duž vertikale, temperatura joj se mijenja. Takav proces nazivamo suhoadijabatskim procesom. Dizanjem čest dolazi na niži tlak[2] i zbog toga ekspandira. Pri ekspanziji čest obavlja rad, dakle troši energiju i zbog toga se ohlađuje. Pri adijabatskom spuštanju česti događa se suprotno. Spuštanjem čest dospijeva na veći tlak i zbog toga se komprimira, a kako je proces adijabatski, temperatura česti raste. Definiramo suhoadijabatsku stopu ohlađivanja δ (ili Γ_d) kao iznos za koji se suha čest zraka hladi pri dizanju suhoadijabatskim procesom po jedinici visine:

$$\delta = (-dT\,/dz)_{\mathrm{dry}}, \tag{4.4.1}$$

gdje je $dT\,/dz$ procesna promjena, a indeks *dry* ukazuje na to da se radi o procesu kojem je podvrgnuta suha čest. Da bi odredili iznos suhoadijabattske stope ohlađivanja krećemo od prvog stavka termodinamike pisanog za jediničnu masu (4.1.5): $đq = \mathrm{c}_{\mathrm{pd}}\; dT - \alpha\; dp$. Za adijabatski proces mora vrijediti $đq = 0$, pa tako dobivamo $\mathrm{c}_{\mathrm{pd}}\; dT = \alpha\; dp$. Uvrstimo

[1] U poglavlju 2.3 izveli smo hidrostatičku jednadžbu uz pretpostavku da fluid miruje. U poglavlju 7.3 pokazati ćemo da hidrostatička aproksimacija vrijedi na sinoptičkoj skali čak i onda kada se fluid giba, dakle u uvjetima realne atmosfere. (Realna atmosfera ustvari nikada nije mirna, već uvijek postoje bar slaba gibanja uzrokovana gradijentima tlaka).

[2] Tlak zraka eksponencijalno opada visinom u hidrostatičkoj atmosferi (vidi sliku 2.7).

hidrostatičku aproksimaciju (4.3.7) $dp = - g\,\rho\,dz$ i zatim dobivenu jednakost podijelimo s dz i sa ($-c_{pd}$). Dobivamo $-(dT/dz) = g/c_{pd}$. Kako smo suhoadijabatsku stopu ohlađivanja δ definirali kao negativnu procesnu promjenu temperature $-(dT/dz)$ u suhoadijabatskom procesu, to je

$$\delta = -(dT/dz)_{\mathrm{dry}} = g/c_{pd}. \tag{4.4.2}$$

Uvrštavanjem g = konst. $\approx 10\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ i $c_{pd} = 1005\ \mathrm{J\ kg^{-1}\ K^{-1}}$, dobivamo $\delta \approx 1°\mathrm{C} / 100\ \mathrm{m}$.

Zadaci

4.1. Uzorak suhoga zraka mase 100 g nalazi se na početku pri tlaku od 1010 hPa i temperaturi od 300 K. Zraku se izobarno dodaje toplina sve dok uzorak ne ekspandira. Pri ekspanziji volumen uzorka se poveća za 15% u odnosu na početni volumen. Izračunajte temperaturu uzorka na kraju procesa, rad učinjen tijekom ekspanzije te toplinu koja je dodana uzorku. (**Rješenje**: T_2 = 345 K; ΔW = 1291.5 J, ΔQ = 4522.5 J)

4.2. Pri temperaturi od 10°C i tlaku od 980 hPa uzorku suhoga zraka mase 10 g dodamo 20 J topline. Koliko će se pri tom promijeniti temperatura uzorka, ako se tlak smanji za 70 hPa?

(**Rješenje**: $\Delta T = \Delta Q / (m\,c_{pd}) + R_d\,T\,\Delta p / (c_{pd}\,p) = -3.783$ K)

4.3. Uzorak suhoga zraka mase 5 g u početku se nalazi na temperaturi od 15°C i tlaku od 1000 hPa. Koliko topline dobije uzorak, ako mu se nakon dodavanja topline tlak smanji za 40 hPa, a temperatura poraste za 2.7°C?

(**Rješenje**: ΔQ = 30.1 J)

4.4. Uzorak suhoga zraka mase 1 kg najprije dobije 3 kJ topline pri konstantnom volumenu, a zatim izgubi 2 kJ topline pri konstantnom tlaku. Kako se pri tom promijeni temperatura uzorka?

(**Rješenje**: $\Delta T = \Delta Q_1 / (m\,c_{vd}) + \Delta Q_2 / (m\,c_{pd}) = 2.188$ K)

4.5. Za koliko postotaka se promijeni prizemna temperatura suhoga zraka ako se prizemni tlak adijabatski smanji za 6%?

(**Rješenje**: $\Delta T / T = R_d\,\Delta p / (c_{pd}\,p) = -1.71\%$)

4.6. Koliko je topline potrebno da se temperatura suhoga zraka pri konstantnom tlaku povisi za 4.5°C?

(**Rješenje**: $\Delta q = 4522.5\ \mathrm{J\ kg^{-1}}$)

4.7. Koliki rad učini idealni plin mase m pri izotermnoj promjeni stanja? Kolika je pri tom razmjena topline s okolišem?

(**Rješenje**: $\Delta W = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p\,d\alpha = m\,R_d\,T \ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$; $\Delta Q = \Delta W$)

4.8. Uzorak suhoga zraka mase 2 kg nalazi se na temperaturi od 273 K i tlaku od 980 hPa. Zbog razmjene topline s okolišem i zbog obavljenog rada temperatura uzorka se smanji za 5 K, a tlak padne za 50 hPa. Koliko se promijeni potencijalna temperatura zraka?

(**Rješenje**: $\Delta\theta = T\,(p_0/p)^{R_d/c_{pd}}\,(\Delta T/T - R_d\,\Delta p / (c_{pd}\,p)) = -1.028$ K)

4.9. Pokaži da za suhi zrak, koji je podvrgnut adijabatskom procesu, vrijedi: $p\,V^{c_{pd}/c_{vd}}$ = konst., gdje je p tlak zraka, V je volumen, a c_{pd} i c_{vd} su specifični toplinski kapaciteti suhoga zraka pri konstantnom tlaku i volumenu.

4.10. Kolika je relativna pogreška pri određivanju potencijalne temperature suhoga zraka iz izmjerenih vrijednosti temperature i tlaka, ako je relativna pogreška pri mjerenju temperature

0.4%, a relativna pogreška pri mjerenju tlaka 0.8%? Što u tom slučaju više utječe na točnost pri određivanju potencijalne temperature, točnost mjerenja tlaka ili temperature?

(**Rješenje**: $|\Delta\theta_d \; / \; \theta_d| = |\Delta T \, / \, T| + |R_d \, \Delta p \, / \, (c_{pd} \, p)|$; $|\Delta\theta_d \; / \; \theta_d|_{max}$ = 0.4% + 0.228% = 0.628 %. Pogreška pri mjerenju temperature više utječe na točnost izračunate potencijalne temperature, nego pogreška pri mjerenju tlaka.)

4.11. Izračunaj rad učinjen pri izotermnoj kompresiji 200 g suhoga zraka, ako je konačni volumen jednak polovici početnog, a temperatura zraka je 10°C.

(**Rješenje**: diferencijal rada koji učini plin pri ekspanziji/kompresiji je $dW = p \, dV = \rho \, R_d \, T \, dV = m \, R_d \, T \, dV \, / \, V$, ako se na plinu obavi rad, odna je $dW = - p \, dV = - m \, R_d \, T \, dV \, / \, V$. Kako se u ovom primjeru rad učini na plinu, to je $\Delta W = -m \, R_d \, T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\, m \, R_d \, T \ln \frac{V_2}{V_1}$ = 11.26 kJ)

4.12. Temperatura suhe česti na tlaku p = 1000 hPa iznosi -3°C. Nađi temperaturu česti na tlaku p = 850 hPa, ako čest na taj tlak dospije politropnim procesom. Pretpostavi politropni toplinski kapacitet c = 0.12 cal g^{-1} K^{-1}.

(**Rješenje**: vidi zadatak 3.1. Za suhi zrak mora biti $T_2 = T_1 \, (p_2 \, / \, p_1)^{R_d \, / \, (c_{pd} - c)}$ = 239.8 K).

4.13. Nađi vezu između potencijalne temperature suhoga zraka i diferencijala specifične entropije.

(**Rješenje**: Iz prvog stavka termodinamike [jednadžba (4.1.5)] $đq = c_{pd} \, dT - \alpha \, dp$ dobije se za potencijalna temperatura [jednadžba (4.2.5)] $\theta_d = T \, (p_0 \, /p)^{R_d \, / \, c_{pd}}$, koju smo izveli pretpostavljajući adijabatski proces $đq = 0$. Logaritmiramo θ_d po bazi prirodnog logaritma i diferenciranjamo. Tako dobivamo prvu jednadžbu $c_{pd} \, d \, (\ln \theta_d) = c_{pd} \, d \, (\ln T) - R_d \, d \, (\ln p)$ [već smo je ranije izveli – vidi (4.2.7)]. Drugu jednadžbu dobijemo polazeći od drugog stavka termodinamike $ds = đq \, / \, T$ u kojeg uvrstimo prvi stavak $đq = c_{pd} \, dT - R_d \, dp$. Dobivamo $ds = c_{pd} \, d \, (\ln T) - R_d \, d \, (\ln p)$ [već smo je ranije izveli – vidi (4.2.2)]. Izjednačavanjem prve i druge jednadžbe dobivamo vezu između potencijalne temperature suhoga zraka i specifične entropije $c_{pd} \, d \, (\ln \theta_d) = ds$. Time smo pokazali da su adijabatski procesi ujedino i izentropski.)

4.14. Koliko se pri dizanju ohladi suha čest zraka koja se adijabatski podigne a) s nadmorske visine Geofizičkog odsjeka PMF-a u Zagrebu (181.53 m) do visine najvišeg vrha Medvednice (Sljeme, 1033 m); b) sa srednje razine mora do visine najvišeg vrha Velebita (Vaganski vrh, 1757 m)?

(**Rješenje**: Čest se ohladi za a) ≈ 8.5°C; b) ≈ 17.5°C)