

# ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.**

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.

**Zadatak 1.** (2+2+3+3 bodova)

- a) Napišite nužan i dovoljan uvjet da se ravnine  $\Pi_1$  i  $\Pi_2$ , zadane s

$$\Pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{i} \quad \Pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

siijeku po pravcu. Napišite nužan i dovoljan uvjet da se ravnina  $\Pi_1$  i pravac  $p$ , zadan s

$$p \dots \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

siijeku, tj. da imaju točno jednu zajedničku točku. Oba uvjeta potrebno je napisati u terminima realnih parametara iz jednadžbi pripadnih ravnina i pravca.

- b) Imaju li pravci  $p_1$  i  $p_2$  zadani s

$$p_1 \dots \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 3}{0} \quad \text{i} \quad p_2 \dots \frac{x + 3}{-4} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 3}{0}$$

zajedničku normalu? Ako imaju, je li ona jedinstvena? Obrazložite Vaše odgovore.

- c) Napišite i dokažite formulu za udaljenost mimosmjernih pravaca u  $E^3$ .
- d) Dokažite formulu za udaljenost točke od pravca u  $E^3$ . Koristeći tu formulu izračunajte udaljenost ishodišta od pravca  $p_1$  iz b) dijela zadatka.

**ANALITIČKA GEOMETRIJA**

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Zadatak 2.** (3+2+3+5+1+1 bodova)

- a) Definirajte direktrisu elipse. Koliko direktrisa ima elipsa zadana s  $x^2 + 2y^2 = 2$ ?  
Napišite koordinate svih tjemena te elipse.
- b) Precizno iskažite Pappus–Boškovićevu karakterizaciju elipse.
- c) Napišite (središnju) jednadžbu neke hiperbole čija je jedna asimptota pravac zadan s  $y = x$ . Koliko ima hiperbola kojima je taj pravac asimptota? Može li se na hiperbolu koju ste odabrali povući tangenta paralelna  $y$ -osi? Ako može, napišite njenu jednadžbu.
- d) Iskažite i dokažite zrcalno svojstvo parabole.
- e) Napišite jednadžbu kružnice zadane s  $x^2 + y^2 = 18$  u polarnom koordinatnom sustavu.
- f) Napišite jednadžbu središnje parabole čija udaljenost od fokusa do direktrise iznosi 5.

**ANALITIČKA GEOMETRIJA**

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Zadatak 3.** (2+3+2 bodova)Dani su pravac  $p$  i ravnina  $\pi$ 

$$p \dots \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{4}, \quad \pi \dots 2y - z = 5.$$

- a) Odredite ravninu paralelnu ravnini  $\pi$  koja sadrži pravac  $p$ .
- b) Odredite pravac  $q$  koji je ortogonalna projekcija pravca  $p$  na ravninu  $\pi$ .
- c) Odredite udaljenost pravaca  $p$  i  $q$ .

**ANALITIČKA GEOMETRIJA**

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Zadatak 4.** (3+4 bodova)

- a) Odredite jednadžbu hiperbole s fokusima  $F_1 = (3 - 2\sqrt{5}, 2)$  i  $F_2 = (3 + 2\sqrt{5}, 2)$  i asimptotama  $y = 2x - 4$  i  $y = -2x + 8$ .
- b) Zadane su točke  $A = (-1, 0)$  i  $B = (1, 0)$ . Odredite geometrijsko mjesto točaka  $T$  za koje vrijedi  $|TA| = \sqrt{3}|TB|$ .

**ANALITIČKA GEOMETRIJA**

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Zadatak 5.** (6 bodova)

Odredite kut (dovoljno je odrediti tangens kuta) između tangenti parabole  $y^2 = 4x$  u točkama njezinog presjeka s pravcem  $2x + y - 12 = 0$ .

**ANALITIČKA GEOMETRIJA**

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.**

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.

**Zadatak 1.** (2+2+3+3 bodova)

- a) Napišite nužan i dovoljan uvjet da se ravnine
- $\Pi_1$
- i
- $\Pi_2$
- , zadane s

$$\Pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{i} \quad \Pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

sijeku po pravcu. Napišite nužan i dovoljan uvjet da se ravnina  $\Pi_1$  i pravac  $p$ , zadan s

$$p \dots \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

sijeku, tj. da imaju točno jednu zajedničku točku. Oba uvjeta potrebno je napisati u terminima realnih parametara iz jednadžbi pripadnih ravnina i pravca.

- b) Imaju li pravci
- $p_1$
- i
- $p_2$
- zadani s

$$p_1 \dots \frac{x}{0} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 3}{-3} \quad \text{i} \quad p_2 \dots \frac{x + 3}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z - 3}{6}$$

zajedničku normalu? Ako imaju, je li ona jedinstvena? Obrazložite Vaše odgovore.

- c) Napišite i dokažite formulu za udaljenost mimosmjernih pravaca u
- $E^3$
- .
- 
- d) Dokažite formulu za udaljenost točke od pravca u
- $E^3$
- . Koristeći tu formulu izračunajte udaljenost ishodišta od pravca
- $p_1$
- iz b) dijela zadatka.

**ANALITIČKA GEOMETRIJA**

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Zadatak 2.** (3+2+3+5+1+1 bodova)

- a) Definirajte direktrisu hiperbole. Koliko direktrisa ima hiperbola koja je zadana s  $x^2 - 2y^2 = 2$ ? Napišite koordinate svih tjemena te hiperbole.
- b) Precizno iskažite Pappus–Boškovićevu karakterizaciju elipse.
- c) Napišite (središnju) jednadžbu neke hiperbole čija je jedna asimptota pravac zadan s  $y = -x$ . Koliko ima hiperbola kojima je taj pravac asimptota? Može li se na hiperbolu koju ste odabrali povući tangenta paralelna  $y$ -osi? Ako može, napišite njenu jednadžbu.
- d) Iskažite i dokažite zrcalno svojstvo parabole.
- e) Napišite jednadžbu središnje parabole čija udaljenost od fokusa do direktrise iznosi 3.
- f) Napišite jednadžbu kružnice zadane s  $x^2 + y^2 = 8$  u polarnom koordinatnom sustavu.

**ANALITIČKA GEOMETRIJA**

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Zadatak 3.** (2+3+2 bodova)Dani su pravac  $p$  i ravnina  $\pi$ 

$$p \dots \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad \pi \dots x - 2y = 4.$$

- a) Odredite ravninu paralelnu ravnini  $\pi$  koja sadrži pravac  $p$ .
- b) Odredite pravac  $q$  koji je ortogonalna projekcija pravca  $p$  na ravninu  $\pi$ .
- c) Odredite udaljenost pravaca  $p$  i  $q$ .



**ANALITIČKA GEOMETRIJA**

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Zadatak 4.** (3+4 bodova)

- a) Odredite jednadžbu hiperbole s fokusima  $F_1 = (2 - 3\sqrt{10}, 3)$  i  $F_2 = (2 + 3\sqrt{10}, 3)$  i asimptotama  $y = 3x - 3$  i  $y = -3x + 9$ .
- b) Zadane su točke  $A = (0, -1)$  i  $B = (0, 1)$ . Odredite geometrijsko mjesto točkaka  $T$  za koje vrijedi  $|TB| = \sqrt{2}|TA|$ .

**ANALITIČKA GEOMETRIJA**

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

**Zadatak 5.** (6 bodova)

Odredite kut (dovoljno je odrediti tangens kuta) između tangenti parabole  $y^2 = 8x$  u točkama njezinog presjeka s pravcem  $2x - y - 8 = 0$ .