

PRAKTIKUM IZ MODERNE FIZIKE -
NUKLEARNA FIZIKA

Geiger-Müllerov brojač

Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek

Zagreb, 2017

GEIGER-MULLEROV BROJAČ

Ionizacija plinova upotrebljava se od samih početaka istraživanja radioaktivnosti za detekciju nuklearnog zračenja. Nuklearne čestice najčešće imaju tako visoke energije da mogu proizvesti velik broj iona u plinu, pa je njihovo opažanje relativno lako. Pored razvoja mnogih novih metoda i danas nalazimo niz metoda detekcije zračenja koje su zasnovane na ionizaciji plinova, zbog niza pogodnosti u radu s plinovima.

Ionizacijske komore, elektroskopi i slični uređaji upotrebljavali su se mnogo ranije u drugim istraživanjima u fizici. Stari elektrometri imali su vrlo visoku osjetljivost i u njima su se mogle opažati vrlo male količine elektriciteta. Osjetljivost im ipak nije bila dovoljna da bi se pomoću njih mogla opažati ionizacija od pojedinačne nuklearne čestice. Tek iza Drugog svjetskog rata, s razvojem niskošumnih pojačala i impulsne elektronike, razvijene su i "impulsne" ionizacijske komore.

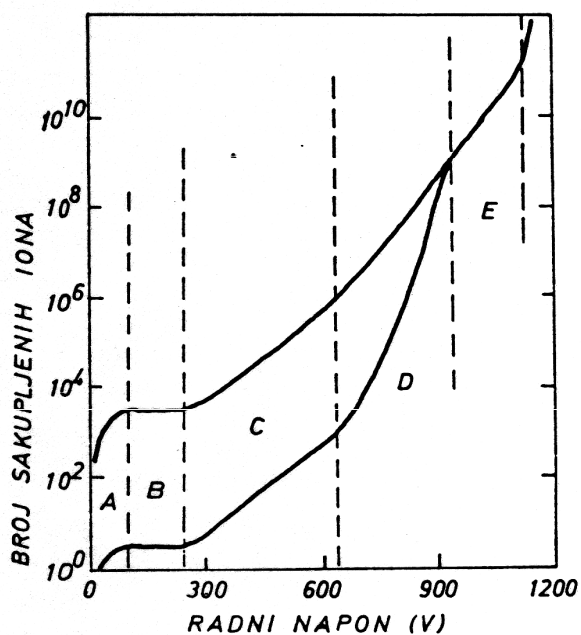
Spintariskop, fotografska emulzija, Wilsonova komora i komore s multiplikacijom ionizacije procesima sekundarne ionizacije su prve metode opažanja pojedinačnih čestica. Posljednju metodu primijenili su Rutherford i Geiger 1908., ali ona ostaje malo zapažena zbog nesigurnosti u radu. Geiger i Müller razvili su 1928. brojač, u kojemu se također primjenjuje pojačanje električkog impulsa sekundarnom ionizacijom plina. To je dobro poznati i vrlo pouzdani G.M.brojač kojeg, kao i ionizacijske komore, i danas često nalazimo u mjerenjima. Vrlo slična metoda detekcije je proporcionalan brojač.

IZVEDBA I SVOJSTVA G.M. BROJAČA

Opazanje ionizacije plina vrši se sakupljanjem iona i elektrona na dvjema elektrodama koje su na različitom električnom potencijalu. Pod djelovanjem električnog polja pozitivni ioni kreću se prema negativnoj elektrodi (katodi), a negativni ioni i elektroni k anodi. Elektroni se u plinovima gibaju oko sto puta brže od iona za jednak omjer električnog polja i tlaka plina. Brzo sabiranje elektrona primjenjuje se da bi se postigao bolji rad i da bi se izbjegla rekombinacija. Također se u plinskim detektorima najčešće upotrebljavaju plinovi koji imaju slabu tendenciju stvaranja negativnih iona.

U G.M. brojaču raspodjela električnog polja podešena je tako da je u neposrednoj blizini anode snažno električno polje. Najčešća izvedba je

cilindrična. Katoda je od metalnog lima u vidu plašta valjka, a duž njene osi postavljena je anoda od tanke metalne žice. Oko njih u zatvorenoj posudi nalazi se "brojački" plin na tlaku od oko 10 do 100 kPa. Najčešće se brojači pune argonom u koji se dodaje oko 5% organskih para (etilnog alkohola) ili halogenih elemenata (broma). Proporcionalni brojači imaju vrlo sličnu izvedbu elektroda, ali im je brojački plin obično drugog sastava, bez dodatka organskih para odnosno halogenih elemenata. Ionizacijske komore su



Sl.1. Amplitude impulsa iz G.M. brojača u ovisnosti o naponu za dvije početne ionizacije omjera oko 100. Područja rada su: A - djelomično sakupljanje iona zbog rekombinacije, B - potpuno sakupljanje, C - područje proporcionalnosti, D - područje djelomične proporcionalnosti, E - područje rada G.M. brojača (neovisnost amplitude impulsa o početnoj ionizaciji)

vrlo različitih izvedbi. Koncentracija električnog polja oko anode u ionizacijskim komorama nije potrebna, jer se proces sekundarne ionizacije ne primjenjuje. Osim u posebnim primjenama ne postavljaju se uvjeti na plinsko punjenje komora, pa su često i otvorene, a "brojački" plin je zrak.

Ako se električni potencijal na G.M. brojaču postepeno podiže, dobit ćemo postepen prijelaz rada od područja u kojemu se samo sabiru ioni i elektroni, preko područja proporcionalne sekundarne ionizacije, do napona kod kojeg je stupanj sekundarne ionizacije u brojaču neovisan o broju primarnih iona. Ovo posljednje je područje rada G.M. brojača. Sl.1. ilustrira ovu ovisnost za dvije različite početne ionizacije, npr., od jedne α i jedne β čestice. Kod sasvim niskih napona, zbog rekombinacije, imamo samo djelomično sakupljanje naboja. Povećanjem napona rekombinacija postaje zanemariva i u nekom području napona dobiva se jednak ukupno sakupljen naboj

uz jednaku početnu ionizaciju. To je područje rada ionizacijske komore. Daljnje povećanje napona dovodi do sekundarne ionizacije. Između dva sudara u plinu, elektroni se u području snažnog polja oko anode ubrzaju dovoljno da mogu proizvesti sekundarnu ionizaciju. To je područje rada proporcionalnog brojača. Daljnje povećanje napona dovodi do širenja sekundarne ionizacije duž cijele anode, pa, iako amplituda električnog impulsa s naponom još uvijek raste, na stalnom naponu dobiva se ipak jednaka amplituda bez obzira da li je primarno proizveden jedan ili velik broj parova ion-elektron.

Gotovo svi G.M. brojači imaju dodatak para organskih spojeva ili para halogenih elemenata. Takvi brojači nazivaju se "samo-gašeći" (engl. self-quenching). Kad u takav brojač u radnim uvjetima uđe brza nabijena čestica, ona gubi energiju i proizvodi niz parove elektron-ion. Pod djelovanjem električnog polja elektroni se brzo gibaju prema anodi. Snažno električno polje u blizini anode ubrzava elektrone toliko, da između sudara s molekulama plina dosegnu energiju koja je dovoljna da izvrše sekundarnu ionizaciju. Primarni i sekundarni elektroni nastavljaju ovim procesom, te se dobiva "lavina" elektrona, koje sakuplja anoda. Neki atomi budu samo uzbuđeni i deeksitiraju se emisijom fotona. Ultravioletni fotoni snažno se apsorbiraju u višeatomskom plinu već nakon oko jednog milimetra. Na taj način proizvede se ionizacija u okolnom plinu, gdje se pojavljuje nova "lavina". Ova ionizacija širi se duž anode brzinom od oko $10 \text{ cm}/\mu\text{s}$. Ioni se pritom malo kreću zbog svoje relativno male brzine, pa se na kraju postigne stanje, u kojem je duž cijele anode, u njenoj neposrednoj blizini, oblak pozitivnih iona. Treba istaći da, iako su u taj čas elektroni sabrani, pad električnog potencijala na brojaču još gotovo nije započeo. Razlog je što su elektroni prošli relativno malu promjenu potencijala.

Električno polje, zbog ionskog omotača, nije više tako koncentrirano oko anode, jer pozitivni ioni uzrokuju postepeniju promjenu potencijala. Zbog ovog efekta u brojaču kroz jedno vrijeme neće biti moguća nova sekundarna ionizacija jednakog obima. Kroz to tzv. "mrtvo vrijeme" brojač neće registrirati prolaz nove čestice, jer se dobivaju impulsi manje amplitude koja nije dovoljna da premaši prag diskriminatora. Prag diskriminatora podešen je tako, da sama primarna ionizacija i manji impulsi ne proizvode dovoljno snažan električki impuls za brojanje, a uvodi se zbog izbjegavanja smetnji (impulsi u mreži i sl.).

Dok se lavine sekundarnih ionizacija šire aksijalno duž anode brojača, počinje relativno sporo radijalno širenje ionskog sloja prema katodi.

Vrijeme sakupljanja pozitivnih iona relativno je dugo, u području 200-400 μ s. Oni, međutim, u prvoj fazi gibanja imaju najveće brzine zbog snažnog polja, a ujedno prelaze najveće promjene potencijala. Zbog toga je glavni dio pada električnog potencijala (impuls) uzrokovan ovom fazom procesa u brojaču.

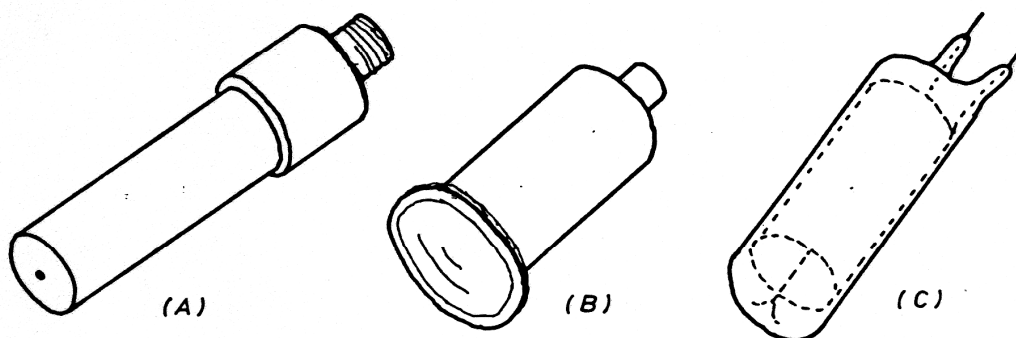
Uloga dodatnih organskih ili halogenih para je dvostruka. Zbog snažne apsorpcije ultravioletnog zračenja, u njima se sekundarna ionizacija širi duž anode brojača. Međutim, još veća je važnost tih molekula u tome što sprječavaju, gase, nastavak ionizacije. Kada bi ion argona, sa svojim prvim ionizacionim potencijalom od 15,7 eV, došao do katode, dva bi procesa mogla uzrokovati oslobađanje novog elektrona. Jedan proces je emisija ultraljubičastog fotona energije 15,7 eV manje energija vezanja vodljivih elektrona u metalu. Ultraljubičasti fotoni, kao što je spomenuto, snažno se apsorbiraju u plinu fotoelektričnim efektom. Moguće je, također, da pozitivni ion naprosto izvuče elektron nadoknađivši energiju vezanja kinetičkom energijom (proces emisije polja). Dovoljan je samo jedan slobodan elektron da se u ovom, oko 200 μ s kasnijem, trenutku, kada je brojač već postao osjetljiv, izazove nov izboj. Proces bi se očito bez prekida nastavljao. Gašenje se postiže tako da ioni argona u sudarima s organskim molekulama ili molekulama halogenog elementa prenose ionizaciju na molekule. Da bi se taj prijenos postigao, uzimaju se molekule koje imaju niži prvi ionizacioni potencijal. Zbog relativno dugog vremena gibanja do katode, ionizacija se u potpunosti prenese na molekule. Elektron iz metala nema mogućnosti da se oslobodi procesom emisije polja, pa neutralizira molekulu. Pri tom se ne emitira ultraljubičasti foton, jer se višak energije troši na disocijaciju molekule. Na taj način sprječava se novi izboj u brojaču. Zbog toga ih nazivamo "samo-gašeći" G.M. brojači.

U standardnom brojaču nalazi se oko 10^{20} molekula organskih ili halogenih para. Prilikom svakog impulsa disociira se oko 10^{10} molekula. Pare organskog spoja, obično alkohola, na taj se način troše i nakon oko 10^9 impulsa brojač ne radi dobro. Molekule halogenih elemenata, obično broma, se rekombiniraju. Trajanje "halogenih" brojača u principu je bez ograničenja. Ipak, i oni se pokvare, obično zbog postepenog onečišćenja brojačkog plina (stijenke brojača postepeno propuštaju zrak u brojač).

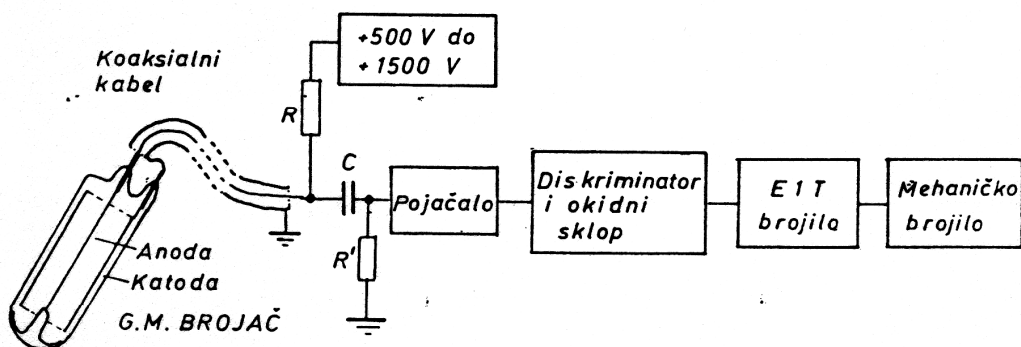
Geiger i Müller, u originalnom radu iz 1928., primijenili su drugi način prekidanja izboja. Oni su upotrebljavali anode prekrivene tankim, slabo vodećim slojem. Nakon pojedinog otkucaja elektroni su došli na vanjsku

plohu sloja i električki "zasjenili" anodu. Vrijeme odvođenja elektrona kroz sloj oko anode bilo je dovoljno dugo da se saberu ioni i spriječe svi izboji od različitih procesa zakašnjele ionizacije. Anodu su pripravljali jednostavnom oksidacijom željezne žice ili su upotrebljavali lakiranu žicu.

Ima mnogo vrsta G.M. brojača koje su podešene različitim primjenama. Neke od njih prikazuje Sl.2.



Sl.2. G.M. brojači: (A) beta brojač s aluminijskom katodom, (B) zvonasti beta brojač s tinjčevim prozorom, (C) stakleni brojač



Sl.3. Shematski prikaz uređaja za brojanje s G.M. brojačem

ELEKTRONSKI UREDAJ ZA G.M. BROJAČ

Za rad G.M. brojača potreban je izvor visokog napona i prikladno je imati na raspolaganju brzo elektronsko brojilo. Katoda se obično uzemljuje, a anoda napaja visokim naponom preko visokoomskog otpora. Električni impulsi amplitude od par volta prenose se veznim kapacitorom koji odvaja visok napon od niskonaponskog ulaza u pojačalo. Električni impulsi vode se u pojačalo, diskriminator s okidnim sklopom i u brojilo. Neki uređaji imaju

ugraden mjerač brzine brojenja, na kojem se može očitavati trenutni broj otkucaja u jedinici vremena.

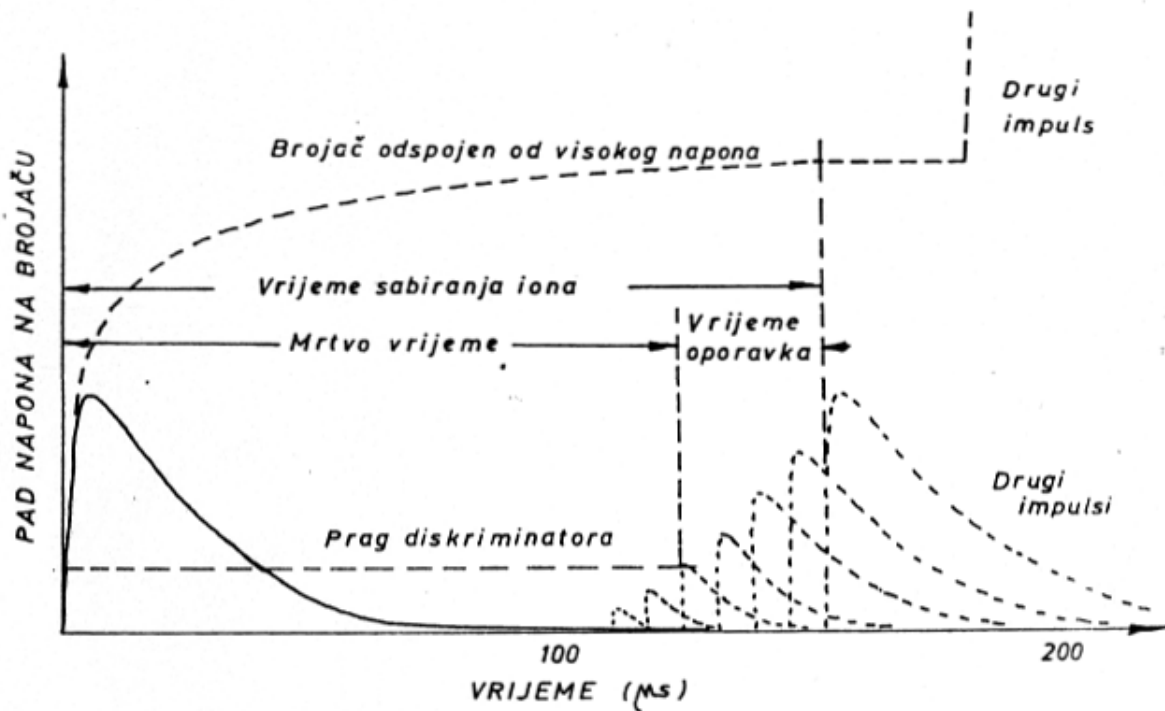
NAPONSKA KARAKTERISTIKA BROJAČA

Važno svojstvo G.M. brojača je vrlo mala ovisnost broja otkucaja o naponu napajanja. Broj otkucaja u danim uvjetima mijenja se svega par postotaka kada se napon na brojaču mijenja unutar radnog područja. Taj interval napona zovemo radno područje ili plato, a širina mu je 100 do 300 volta. Radno područje određuje se tako da se s izvorom srednje jačine mjeri broj otkucaja brojača u ovisnosti o naponu. Za niske napone brojilo ne broji zbog toga što sekundarna ionizacija nije dosegla stupanj koji bi dao dovoljno visoke impulse da premaše prag diskriminatora. Kad se dosegne napon praga, impulsi su još ovisni o početnoj ionizaciji, pa tek neke od upadnih čestica proizvedu dovoljnu početnu ionizaciju za brojenje. Kad se dosegne najniži radni napon, izboj u brojaču prestaje biti ovisan o početnoj ionizaciji. Povećanjem napona amplitude impulsa rastu, ali njihov broj povećava se tek neznatno - zbog povećanja osjetljivog volumena na krajevima brojača. Za više napone ionizacije se toliko poveća da gašenje nije više stopostotno. Povremeno se dešavaju dvostruki impulsi, pa njihov broj postepeno, pa sve brže, raste s naponom. Daljnje povećanje napona uzrokuje neprekidan izboj. Treba izbjegavati ovaj uvjet rada zbog brzog trošenja brojača.

ELEKTRIČNI IMPULS IZ G.M. BROJAČA

Kad bi se prekinuo spoj s visokim naponom, nakon što je brojač bio doveden na radni napon, napon na brojaču bi se smanjio prilikom svakog otkucaja. Naime, naboj na kapacitetu C koji čine brojač i spojni kabel i ulaz upojačalo bio bi smanjen za ukupno sakupljen naboj od impulsa. Takva vremenska ovisnost napona prikazana je crtkano na Sl.4. U normalnim uvjetima rada kroz otpor R dovodi se napon natrag na punu vrijednost, s konstantom RC . Zbog toga se dobivaju "derivirani" impulsi prikazani punom linijom. Ako se uz brojač stavi jači izvor, gustoća impulsa se poveća i na osciloskopu mogu se povremeno vidjeti, nakon pojedinog ("prvog") impulsa, vremenski bliski ("drugi") impulsi. Amplituda "drugih" impulsa varira u ovisnosti o zakašnjenju, kako prikazuju točkaste linije. Mrtvo vrijeme brojača je vrijeme od početka "prvog" do početka "drugog" impulsa koji ima dovoljno veliku amplitudu da aktivira diskriminator brojila. Mrtvo vrijeme smanjuje

se s povećanjem napona jer a) amplitude rastu i b) brzine iona se povećavaju. Vrijeme oporavka brojača traje sve dok se ne saberu svi ioni, a tada amplituda "drugog" impulsa dosegne punu vrijednost.

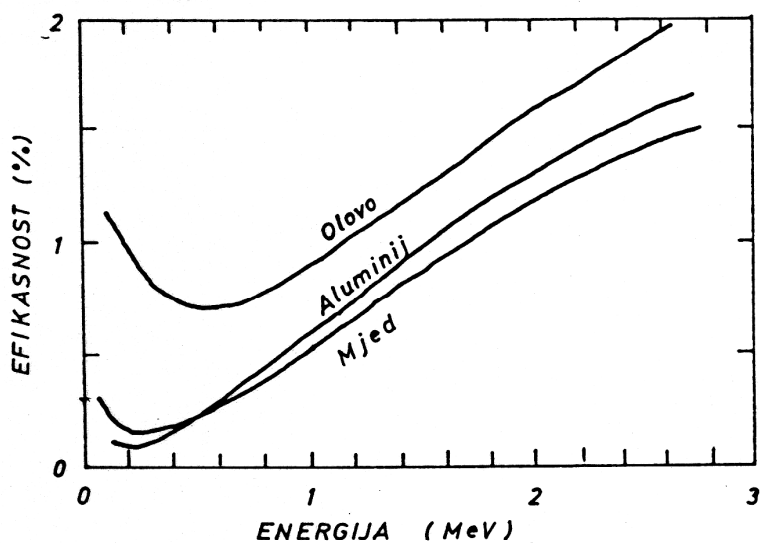


Sl.4. Pad napona na G.M. brojaču u ovisnosti o vremenu. Svaki impuls izblja električni naboj na brojaču. Kad ne bi stalno bio spojen na izvor visokog napona preko "radnog otpornika", napon bi mu se smanjivao (gornja crtkana linija). U normalnim uvjetima rada napon se vraća na punu vrijednost i dobivaju se "derivirani" impulsi, (puna linija). Za vrijeme sabiranja iona polje u brojaču je oslabljeno, pa se dobivaju manji "drugi" impulsi.

Pomocu osciloskopa mogu se proucavati svojstva elektricnih impulsa iz G.M. brojača u ovisnosti o naponu brojača. To su oblik impulsa, ovisnost amplitude o naponu, mrtvo vrijeme i vrijeme oporavka.

DJELOTVORNOST G.M. BROJAČA

Kod mjerenja aktivnosti pomoću G.M. brojača često je potrebno odrediti apsolutan broj čestica koje emitira preparat. U tu svrhu potrebno je poznavati odnos između broja čestica koje dolaze na površinu brojača, i broja impulsa, koji one uzrokuju. Apsorpcija u stijenkama brojača može imati velik utjecaj. Npr. alfa čestice često ne mogu prodrijeti u brojač zbog relativno malog dosega. Često se djelotvornost G.M. brojača definira kao omjer broja otkucaja (uzevši u obzir mrtvo vrijeme) i broja brzih električki



Sl.5. Efikasnost G.M. brojača s katodama od mjedi, aluminija i olova za detekciju gama zračenja u ovisnosti o energiji.

nabijenih čestica, koje prođu kroz osjetljiv volumen. Ta je osjetljivost vrlo visoka. Dovoljan je jedan elektron-ion par da se izazove izboj u brojaču. Ako, npr., čestica s jednim elementarnim nabojem na minimumu ionizacije prođe kroz 2 cm plina u brojaču, recimo kod tlaka od oko 10 kPa smjese argona sa 10% alkohola, u prosjeku će biti proizvedeno 8 parova elektron-ion. Prema Poissonovoj raspodjeli, vjerojatnost, da u tom slučaju čestica neće proizvesti niti jedan par, jednaka je tada e^{-8} . Vjerojatnost da će biti proizveden jedan ili više parova ion-elektron jednaka je dakle $(1 - e^{-8}) \approx 1$. Očito je da je ova "unutarnja" osjetljivost za nabijene čestice vrlo visoka. Djelotvornost za gama zračenje ovisi o vjerojatnosti da foton nekim procesom izbaci elektron u osjetljiv volumen brojača. Doprinos brojačkog plina vrlo je malen zbog male mase plina. Bitan doprinos dolazi od interakcije fotona sa stijenkom brojača, dakle s katodom. Zato G.M. brojači za gama zračenje trebaju imati stijenke odnosno dodatni oklop, čija je debljina otprilike jednaka doseg elektronu koje izbacuju fotoni. U području energija oko 1 MeV najveći doprinos je od Comptonovog efekta koji gotovo ne ovisi o protonskom broju Z . Na niskim energijama zbog fotoelektričnog efekta i na visokim, zbog tvorbe parova, materijali s visokim Z daju veće djelotvornosti. Za ilustraciju na Sl. 5. je prikazana djelotvornost G.M. brojača s katodom od mjedi, aluminija i olova za fotone energije do 3 MeV.

POISSONOVA RASPODJELA

Poissonova raspodjela daje vjerojatnost u procesima u kojima imamo diskretnu varijablu, te malu i konstantnu vjerojatnost da će se pojedini događaj desiti. Može se primijeniti u vrlo različitim procesima, među kojima važno mjesto zauzimaju nuklearne pretvorbe.

se načini granični prijelaz tako da broj mogućih događaja raste u beskonačnost, a prosječan broj događaja ostaje konstantan. Ovdje ćemo je izvesti na osnovi općih principa, koji vrijede za raspad radioaktivnih atoma:

1. Vjerojatnost za raspad u intervalu vremena određene duljine jednaka je za svaki atom dane vrste (atomi su identični).
2. Ta vjerojatnost za pojedini atom ne mijenja se ako se drugi atom raspadne (atomi su nezavisni).
3. Ta vjerojatnost neovisna je o vremenu (konstanta raspada ne ovisi o starosti atoma).
4. Ukupan broj atoma i broj vremenskih intervala promatranja je velik (vremenski intervali su kratki u usporedbi s prosječnim životom i statistička analiza je opravdana).

Pretpostavimo da je a prosječan broj događaja (npr. raspada) u jedinici vremena. U kratkom vremenskom intervalu između t i $t+dt$ imat ćemo u prosjeku adt događaja. Ako je taj prosjek malen, tj. $adt \ll 1$, najčešće se neće opaziti ni jedan događaj, rijetko po jedan, dok je vjerojatnost za dva ili više događaja zanemariva. Budući da je

$$adt = 0 \cdot P(0, dt) + 1 \cdot P(1, dt) + 2 \cdot P(2, dt) + \dots$$

uz zanemarivanje $P(2, dt)$, $P(3, dt)$ itd. imat ćemo

$$P(1, dt) = a dt, \quad \text{i} \quad P(0, dt) = 1 - a dt$$

Vjerojatnost da u vremenskom intervalu dužine $t+dt$ opazimo k događaja jednaka je vjerojatnosti da u intervalu t opazimo k u slijedećim dt nijedan, ili da u intervalu t opazimo $k-1$ i u slijedećih dt jedan događaj. Zbog kratkog intervala dt , kombinacije s dva ili više događaja u intervalu dt su zanemarene. Budući da "i" vjerojatnost znači produkt, a "ili" zbroj, slijedi

$$P(k, t + dt) = P(0, dt) \cdot P(k, t) + P(1, dt) \cdot P(k - 1, t)$$

odnosno

$$\frac{P(k, t + dt) - P(k, t)}{dt} = \frac{\partial P(k, t)}{\partial t} = a [P(k - 1, t) - P(k, t)]$$

Rješenje ove diferencijalne jednačbe, uzevši u obzir da je k cjelobrojan, je Poissonova raspodjela

$$P_x(k) = \frac{x^k}{k!} e^{-x}$$

gdje je $x = at$ prosječan broj događaja u intervalu duljine t . Poissonove raspodjele za $x = 20$ i $x = 100$ prikazuju Sl.1. i Sl.2. Za izračunavanje raspodjele praktično je primijeniti rekurzivsku formulu

$$P_x(0) = e^{-x}, \quad P_x(k) = \frac{x}{k} P_x(k-1)$$

Poissonova raspodjela je normirana sa srednjom vrijednošću x , varijancijom x i standardnom devijacijom \sqrt{x} :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_x(k) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1$$

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P_x(k) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^k}{k!} = x$$

$$\langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{x^k}{k!} e^{-x} - \langle k \rangle^2 = x^2 + x - x^2 = x$$

Dakle, standardna devijacija iznosi

$$\sqrt{\langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{x}$$

Kada se, dakle, u nekom eksperimentu dobije rezultat od k događaja, on predstavlja najbolju ocjenu srednje vrijednosti x , i ujedno najbolju ocjenu kvadrata standardne devijacije. Stoga se takav rezultat navodi

$$x = k \pm \sqrt{k}$$

s otprilike 68 % sigurnosti. Da je raspodjela normalna, interval sigurnosti bio bi 68.3 %.

Zadaci

1. Određivanje karakteristike GM brojača
 - (a) Uključite glavnu sklopku na uređaju te zatim sklopku napona.
 - (b) Postaviti slab radioaktivni izvor unutar štita kraj detektora (isključivo nastavnik rukuje s izvorima).
 - (c) Mjeriti broj događaja u jedinici vremena u ovisnosti o naponu, u koracima od 20V u području 800 V do 1200 V.
 - (d) Skicirati broj događaja u jedinici vremena u ovisnosti o naponu i odrediti plato. (U izvješću je potrebno isto precizno nacrtati uključivo s pogrešakama).
2. Mjerenje amplitude signala u ovisnosti o radnom naponu
 - (a) Pomoću osciloskopa mjeriti srednju amplitudu signala za radne napone u području 800 V to 1200 V u koracima od 40 V.
 - (b) U izvješću nacrtati srednju amplitudu u ovisnosti u radnom naponu u logaritamskoj skali i usporediti s očekivanim ponašanjem.
3. Ocjena mrtvog vremena brojača
 - (a) Radioaktivni izvor sa minimalno 200 raspada/s se postavi unutar štita brojača.
 - (b) Osciloskop se postavi u način rada "infinite persistence", pri tome je potrebno pravilno podesiti vremensku skalu.
 - (c) Odredite mrtvo vrijeme i vrijeme oporavka i usporedite s očekivanjem.
4. Poissonova statistika
 - (a) Postaviti radni napon brojača na sredinu platoa i mjeriti pozadinu.
 - (b) Postaviti slab radioaktivni izvor unutar štita detektora.
 - (c) Odredite srednju brzinu brojanja mjereći broj impulsa u 5 minuta. Od izmjerene vrijednosti oduzmite šum.
 - (d) Svakih 10 s zabilježiti broj impulsa, bez poništavanja brojača i napraviti 100 očitavanja.
 - (e) Iz razlike očitavanja odrediti broj impulsa u 10s i nacrtati histogram frekvencije tog broja.
 - (f) Na temelju Poissonove raspodjele izračunati teorijske frekvencije i ucrtati ih u histogram.
 - (g) Pomoću χ^2 -testa ispitajte slaganje teorijske i izmjerene raspodjele.