Površinski valovi u idealnoj tekućini

« Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 9. travnja 2015.)

Pregled predavanja

Gravitacijski valovi

Rubni uvjeti

Površinski valovi u dubokoj tekućini

Valovi u plitkoj tekućini

Valni paket

Solitoni

Gravitacijski valovi

Slobodna površina tekućine koja se nalazi u gravitacijskom polju je ravna ploha u ravnoteži. Ako se to ravnotežno stanje poremeti, može se uočiti širenje valova na slobodnoj površini. Uzrok valova je gravitacijsko polje pa se valovi zovu **gravitacijski**.

U ovom dijelu promatrat će se valovi male amplitude, a, u odnosu na valnu duljinu, λ. Neka je τ period titranja. Tada je

$$|(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}| \sim \frac{a}{\tau}\frac{1}{\lambda}\frac{a}{\tau} = \frac{a^2}{\lambda\tau^2},$$

dok je

$$\left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right| \sim \frac{a}{\tau}\frac{1}{\tau} = \frac{a}{\tau^2}$$

pa je

$$\left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right| \gg |(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}| \quad \text{jer je} \quad a \ll \lambda.$$

Gravitacijski valovi

Ukoliko je moguće zanemariti član:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

tada je gibanje moguće tretirati kao potencijalno (bezvrtložno).

Skup jednadžbi koje treba riješiti je slijedeći:

$$\Delta\phi = 0$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\,z = 0$$
$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi.$$

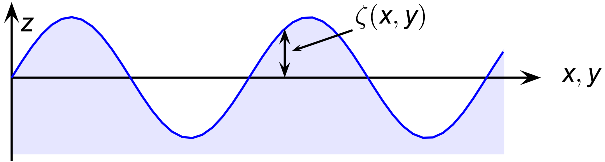
Skup jednadžbi treba nadopuniti:

- rubnim uvjetom na slobodnoj površini
- te rubnim uvjetom na dnu tekućine.

Rubni uvjeti - slobodna površina

U ovim izrazima pretpostavlja se da je slobodna površina tekućine u ravnotežnom stanju $z = 0$, te da gravitacijsko polje ima smjer negativne strane z-osi.

Uvodi se koordinata položaja površine $\zeta(x, y)$ koja opisuje pojavu valova na površini.

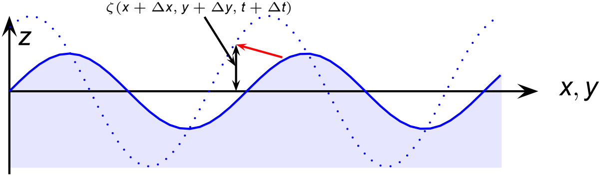


Položaj površine je:

$$z = \zeta(x, y, t).$$

U ravnoteži je $\zeta(x, y, t) = 0$.

Rubni uvjeti - slobodna površina



U vremenskom trenutku $t + \Delta t$ čestica na površini će se pomaknuti u drugi položaj:

$$
\begin{aligned}
\Delta z &= \zeta(x + v_x\Delta t, y + v_y\Delta t, t + \Delta t) - \zeta(x, y, t) \\
&\approx \left(v_x \frac{\partial\zeta}{\partial x} + v_y \frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial t} \right) \Delta t \qquad \Rightarrow \\
\frac{dz}{dt} &= v_z = \zeta_t + v_x\,\zeta_x + v_y\,\zeta_y
\end{aligned}
$$

gdje su uvedene ove oznake:

$$
\zeta_x = \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \qquad \zeta_y = \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \qquad \zeta_t = \frac{\partial\zeta}{\partial t}
$$

Rubni uvjeti

Rubni uvjet na slobodnoj površini opisan je jednadžbom koji brzina tekućine i funkcija površine moraju zadovoljavati:

$$\phi_z = \zeta_t + \phi_x\, \zeta_x + \phi_y\, \zeta_y \,|_{z=\zeta(x,y,t)}\, .$$

Ukoliko se radi o valovima male amplitude, često se rubni uvjet linearizira, te primjenjuje za točke prostora $z \approx 0$.

Rubni uvjet na dno je sličan onome za slobodnu površinu, osim što se pretpostavlja da se dno ne mijenja s vremenom. Neka funkcija $h(x, y)$ opisuje konfiguraciju dna:

$$z = -h(x, y) \qquad \text{(ne postoji vremenska ovisnost).}$$

Rubni uvjet na gibanje tekućine je:

$$\phi_z = -\phi_x\, h_x - \phi_y\, h_y \,|_{z=-h(x,y)}\, .$$

Rubni uvjeti

Ovaj je rubni uvjet ekvivalentan već od prije poznatom rubnom uvjetu koji kaže da je normalna komponenta brzine tekućine na dno jednaka nuli:

$$v_n \big|_{z=-h(x,v)} = 0.$$

Naime funkcija dna se može zapisati kao:

$$f(x, y, z) = z + h(x, y) = 0.$$

Gradijent funkcije je vektor okomit na površinu dna:

$$\vec{n} \sim (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) = (\partial_x h, \partial_y h, 1) = (h_x, h_y, 1).$$

Množeći brzinu gibanja tekućine s tim vektorom:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \sim [v_x\, h_x + v_y\, h_y + v_z]_{z=-h} = 0$$

dobiva se izraz za rubni uvjet na dnu.

Rubni uvjeti

Funkcija koja opisuje rubni uvjet na površini, ζ, pojavljuje se i u Bernoullijevoj jednadžbi za z=ζ:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2\right) + \frac{p_0}{\rho} + g\,\zeta(x, y) = 0,$$

gdje je p_0 tlak zraka na slobodnoj površini tekućine. Član s tlakom u Bernoullijevoj jednadžbi moguće je uključiti kao dio potencijala ϕ:

$$\phi \to \phi + \frac{p_0}{\rho}\,t.$$

Ova redefinicija neće utjecati na brzinu tekućine koje su prostorni gradijenti potencijala. Bernoullijeva jednadžba na površini tekućine postaje:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2\right) + g\,\zeta(x, y) = 0.$$

Gravitacijski valovi

U granici male amplitude titranja naspram valne duljine, Bernoullijeva jednadžba, te jednadžbe koje opisuju rubne uvjete mogu se **linearizirati**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2\right) + g\,\zeta(x,y) \quad &\approx \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\,\zeta(x,y) = 0 \\ \phi_z = \zeta_t + \phi_x\,\zeta_x + \phi_y\,\zeta_y \quad &\approx \quad \zeta_t \end{aligned}$$

Kombiniranjem ovih jednadžbi s Laplaceovom jednadžbom za potencijal dobiva se:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\phi \quad &= \quad 0 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_{z=\zeta\approx 0} \quad &= \quad 0 \qquad \text{(R.U.+B.J.)} \end{aligned}}$$

skup jednadžbi koje opisuju gravitacijake valove u tekućini.

Površinski gravitacijski valovi u dubokoj tekućini

Postoji veliki broj rješenja koja zadovoljavaju ove jednadžbe, kao u ostalom i različitih vrsta valova.

Traži se rješenje tipa **ravnog vala**:

$$\phi(x, y, z, t) = f(z) \underbrace{\cos(k\,x - \omega t)}_{\text{ravni val}},$$

koje ima dobro definiranu valnu duljinu i frekvenciju titranja. Uvrštavanjem u Laplaceovu jednadžbu za potencijal:

$$\Delta\Phi = \cos(k\,x - \omega t)\left[-k^2\, f(z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right] = 0$$

slijedi da je:

$$f(z) = A\, e^{kz} + B\, e^{-kz}.$$

Površinski gravitacijski valovi u dubokoj tekućini

Tekućina se nalazi u području $z < 0$, a funkcija $f(z)$ u tom području treba biti konačna. Osim toga potebno je zadovoljiti i rubni uvjet na dnu. Oba uvjeta su zadovoljena (za beskonačno duboku tekućinu) ako se pretpostavi da je B=0:

$$\Rightarrow \qquad f(z) = A\, e^{kz}.$$

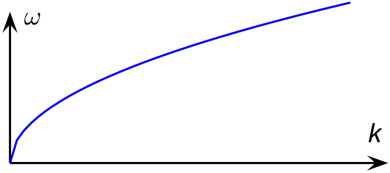
Uvrštavanjem rješenja za potencijal u rubni uvjet za površinu:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{z \approx 0} = \cos(k\,x - \omega\,t)\; f(z)\,\big|_{z\approx 0}\; \underbrace{\left[k - \frac{\omega^2}{g} \right]}_{=0} = 0$$

dobiva se disperzijska relacija koja povezuje valnu duljinu (tj. valni broj) i frekvenciju.

Površinski gravitacijski valovi u dubokoj tekućini

$$\omega = \sqrt{k\,g} = \sqrt{\frac{2\pi\, g}{\lambda}}$$



Brzina gibanja tekućine:

$$\left.\begin{aligned} v_x(x,z,t) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -A\,k\,e^{k\,z}\,\sin(k\,x - \omega\,t) \\ v_y(x,z,t) &= 0 \\ v_z(x,z,t) &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = +A\,k\,e^{k\,z}\,\cos(k\,x - \omega\,t) \end{aligned}\right\} \text{brzine eksponencijalno trnu s dubinom.}$$

Površinski gravitacijski valovi u dubokoj tekućini

Neka su x, y i z položaj čestice tekućine koja se inače u ravnotežnom stanju se nalazi u x_0, y_0 i z_0.
Da bi se odredila trajektorija čestica potrebno je integrirati skup DJ:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v_x(x, z, t) = -A\,k\,e^{kz}\,\sin(k\,x - \omega\,t) \\
\frac{dz}{dt} &= v_z(x, z, t) = +A\,k\,e^{kz}\,\cos(k\,x - \omega\,t).
\end{aligned}
$$

Integriranjem se dobiva:

$$
\begin{aligned}
x(t) &\approx x_0 - A\,\frac{k}{\omega}\,e^{k\,z_0}\cos(k\,x_0 - \omega\,t) \\
z(t) &\approx z_0 - A\,\frac{k}{\omega}\,e^{k\,z_0}\sin(k\,x_0 - \omega\,t)
\end{aligned}
$$

Čestice se gibaju po kružnim putanjama čiji radijus se eksponencijalno smanjuje s povećavanjem dubine:

$$
(x(t) - x_0)^2 + (z(t) - z_0)^2 = A^2\,\frac{k^2}{\omega^2}\,e^{2k\,z_0}.
$$

Površinski gravitacijski valovi u dubokoj tekućini

Brzina gibanja valnih paketa (grupna brzina):

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\,\lambda}{2\pi}} \quad \stackrel{\lambda\to\infty}{\to} \quad \infty.$$

povećava se s povećanjem valne duljine. Nefizikalni rezultat je posljedica aproksimacije koja je učinjena pod pretpostavkom da je valna duljina kraća od dubine tekućine. U granici $\lambda \to \infty$ to više nije ispunjeno.

Valovi u plitkoj tekućini

Da bi se dobio fizikalni rezulat treba u izrazu za potencijal uzeti oba eksponencijalna člana u funkciji $f(z)$. Dakle:

$$\phi(x,z,t) = (A\,e^{k\,z} + B\,e^{-k\,z})\cos(k\,x - \omega\,t).$$

Neka je dubina tekućine jednaka h. Rubni uvjet traži da je okomita komponenta brzine tekućine na dnu jednaka nuli:

$$v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = k\,(A\,e^{k\,z} - B\,e^{-k\,z})\cos(k\,x - \omega\,t)|_{z=-h} = 0.$$

Odavdje slijedi:

$$\begin{aligned} B &= A\,e^{-2\,k\,h} \qquad \Rightarrow \\ \phi &= 2A\,e^{-k\,h}\cosh(k(z+h))\,\cos(k\,x - \omega\,t). \end{aligned}$$

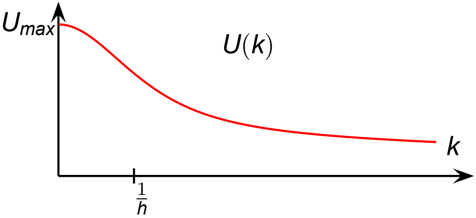
Valovi u plitkoj tekućini

Uvrštavanjem potencijala u jednadžbu za rubni uvjet dobiva se frekvencija:

$$\omega^2 = g\,k\,\tanh(k\,h) \rightarrow \begin{cases} g\,h\,k^2 & \text{za} \quad \lambda \gg h \\ g\,k & \text{za} \quad \lambda \ll h \end{cases}$$

Dakle, u granici kada valna duljina postane veća od dubine tekućine, grupna brzina se saturira na maksimalnu vrijednost:

$$U_{max} = \sqrt{g\,h}$$



Valovi u plitkoj tekućini

Brzina širenja valova u x i z-smjeru u granici malih valnih brojeva:

$$
\begin{aligned}
v_x(x,z,t) &= -2A\,k\,e^{-k\,h}\cosh(k(z+h))\ \sin(k\,x-\omega\,t) \\
&\sim k\cdot[\text{periodična funkcija od } x \text{ i } t] \\
v_z(x,z,t) &= +2A\,k\,e^{-k\,h}\sinh(k(z+h))\ \cos(k\,x-\omega\,t) \\
&\sim k^2\cdot[\text{periodična funkcija od } x \text{ i } t]
\end{aligned}
$$

Dodatni k-član u vertikalnoj komponenti brzine dolazi od sinh-funkcije:

$$\sinh(k(z+h)) \approx k\,(z+h).$$

Vertikalna komponenta brzine u dugovalnoj granici je reducirana u odnosu na horizontalnu komponentu brzine. Razlog tome je zahtijev koji dolazi od rubnog uvjeta na dnu.

Valovi u plitkoj tekućini

Vertikalno gibanje tekućine u granici kada je valna duljina veća od dubine (plitka tekućina) je reducirano te se može zanemariti u odnosu na horizontalno gibanje.

Ovo zapažanje može poslužiti da se izvedu jednadžbe gibanja za valove u plitkoj tekućini. U tim jednadžbama vertikalna gibanja se zanemaruju u odnosu na horizontalna.

Eulerovu jednadžbu za v_x je moguće aproksimirati kao:

$$\partial_t v_x + v_x \partial_x v_x + \underbrace{v_z \partial_z v_x}_{\approx 0} = -\frac{1}{\rho}\,\partial_x p = -g\,\partial_x \zeta$$

jer iz Eulerove jednadžbe za v_z slijedi da tlak ima *hidrostatsku* ovisnost:

$$\underbrace{\partial_t v_z}_{\approx 0} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) v_z}_{\approx 0} = \frac{1}{\rho}\partial_z p - g \;\Rightarrow\; \underbrace{p - p_0 \approx \rho g\,(\zeta - z)}_{\text{hidrostatski izraz!}} \;\Rightarrow\; \partial_x p = \rho g\,\partial_x \zeta$$

Valovi u plitkoj tekućini

Nadalje, jednadžba kontinuiteta se može preurediti tako da se napravi integracija po z-koordinati, od dna pa do visine tekućine:

$$\int_{-h}^{\zeta} dz \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Tada je:

$$\int_{-h}^{\zeta} dz \, \frac{\partial v_z}{\partial z} = v_z(x, y, \zeta, t) - \underbrace{v_z(x, y, -h, t)}_{=0}.$$

Također je:

$$\int_{-h}^{\zeta} dz \, \frac{\partial v_x}{\partial x} = \partial_x \int_{-h}^{\zeta} dz \, v_x - [v_x \, \partial_x \zeta]_{z=\zeta} - \underbrace{[v_x \, \partial_x h]_{z=-h}}_{=0 \text{ (za ravno dno)}}$$

Valovi u plitkoj tekućini

Pa slijedi:

$$\underbrace{v_z(\zeta) - v_x\,\partial_x\zeta - v_y\,\partial_y\zeta}_{=\partial_t\zeta} + \partial_x \underbrace{\int_{-h}^{\zeta} dz\, v_x}_{\approx(\zeta+h)\ v_x} + \partial_y \underbrace{\int_{-h}^{\zeta} dz\, v_y}_{\approx(\zeta+h)\ v_y} = 0$$

odnosno:

$$\partial_t H + \partial_x(H\,v_x) + \partial_y(H\,v_y) = 0 \qquad \text{(jed. kontinuiteta)}$$

gdje je:

$$H(x,y) = \zeta(x,y) + h$$

ukupna visina tekućine od dna do površine. Pretpostavlja se da je:

$$\partial_t H = \partial_t\zeta \qquad \text{(jer je } \partial_t h = 0.\text{)}$$

Valovi u plitkoj tekućini

Prema tome skup jednadžbi koji opisuje valove u dugovalnoj granici (plitkoj tekućini) je:

$$\begin{aligned} \partial_t H + \partial_x (v\, H) &= 0 \\ \partial_t v + v\, \partial_x v + g\, \partial_x H &= 0, \end{aligned}$$

Jednadžbe vrijede uz ove pretostavke:

$$v_y = 0, \qquad v_z \approx 0, \qquad v_x = v.$$

Linearizirana verzija ovih jednadžbi za ravno dno dubine -*h*:

$$\left.\begin{aligned} \partial_t \zeta + h\, \partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + g\, \partial_x \zeta &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \partial_t^2 \zeta + h\, \partial_x(\partial_t v) = \partial_t^2 \zeta - hg\, \partial_x^2 \zeta = 0$$

svodi se na **1d valnu jednadžbu**, gdje je brzina širenja valova:

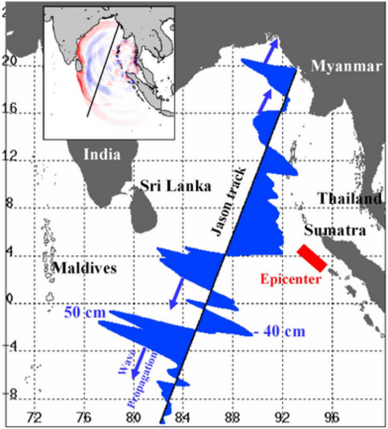
$$U = \sqrt{h\, g}.$$

Valovi u plitkoj tekućini

Npr. ako je valna duljina 800 km, a val se širi oceanom prosječne dubine 3,5 km ($\ll$ 800 km) brzina širenja vala je:

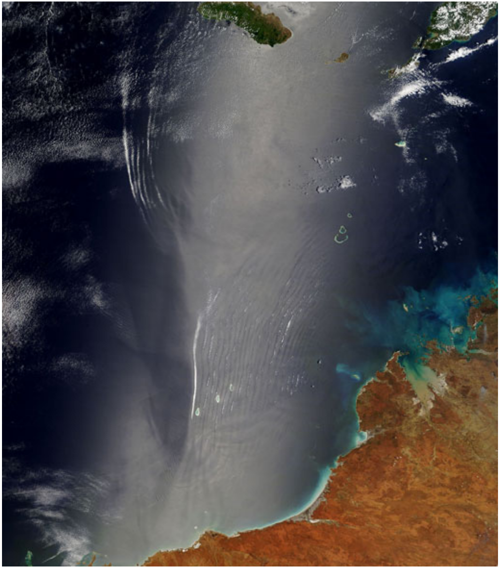
$$U = \sqrt{g\,h} = 187 \text{ m/s} = 673 \text{ km/h}.$$

Ovo su podaci koji odgovaraju **tsunami**-valu koji se je dogodio 26. prosinca 2004. u Indijskom oceanu zbog potresa kod otoka Sumatre. Vertikalna ampliduda vala na pučini oceana je bila do 0,5 m. Tek u blizini obale val je narastao i do 20 m u visinu.



Valovi u plitkoj tekućini

Gravitacijski valovi se mogu pojaviti i u atmosferi. Satelitska slika pokazuje utjecaj atmosferskih gravitacijskih valova na površinu oceana mjenjajući mu sposobnost refleksije sijetla. Slobodna površina koja titra je u stvari dno atmosfere koje dodiruje površinu vode. U donjem dijelu slike se vidi obala Australije, a u gornjem početak Indonezijskih otoka.



(http://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_484.html)

Valni paket

Proizvoljni val (valni paket) može se prikazati kao superpozicija ravnih valova dobro definiranog valnog broja k (valne duljine) i frekvencije titranja ω_k:

$$\zeta(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi}\, \zeta_k\, e^{\imath(kx-\omega_k t)}.$$

(Ako su jednadžbe gibanja linearne).

Nepoznata amplituda ravnih valova, ζ_k, može se odrediti iz poznatog početnog uvjeta, $\zeta(x,t=0)$:

$$\zeta(x,t=0) = \int \frac{dk}{2\pi}\, \zeta_k\, e^{\imath kx} \quad \Leftrightarrow \quad \zeta_k = \int dx\, \zeta(x,t=0)\, e^{-\imath kx}$$

Valni paket

Brzina širenja ravnog vala je odnos frekvencije i valnog broja:

$$e^{\imath(kx-\omega_k t)} = e^{\imath k(x-u_k t)},$$

gdje je

$$u_k = \frac{\omega_k}{k} \qquad (\textbf{fazna brzina}).$$

Ukoliko veza između frekvencije titranja, ω_k, i valnog broja, k, nije linearna, valovi različite valne duljine šire se različitim brzinama. Kao posljedica valni paket koji je superpozicija različitih ravnih valova se vremenom raspada, tj. mijenja oblik. Ipak, centar valnog paketa nastavlja se gibati tz. **grupnom brzinom** koja je jednaka:

$$u_k^{(g)} = \frac{d\omega_k}{dk}$$

Valni paket

To je lako provjeriti na primjeru Gaussovog valnog paketa gdje je

$$\zeta_k = e^{-\alpha(k-k_0)^2}.$$

Vremenska evolucija valnog paketa je:

$$\zeta(x,t) \approx \frac{e^{k_0 x - \omega_{k_0} t}}{2\sqrt{\pi\Gamma(t)}}\, e^{-\frac{(x-\omega' t)^2}{2\Gamma(t)}},$$

gdje je

$$\begin{aligned}
\omega' &= \left(\frac{d\omega_k}{dk}\right)_{k=k_0} \\
\omega_k'' &= \left(\frac{d^2\omega_k}{dk^2}\right)_{k=k_0} \\
\Gamma(t) &= 2\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\omega_k'' t}{2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Valni paket

Do širenja valnog paketa ne dolazi ako je veza između frekvencije i valnog broja linearna:

$$\omega_k = U\, k. \qquad (\textbf{linearna disperzija}).$$

Tada su fazna i grupna brzina identične. Tekućina zadovoljava valnu jednadžbu:

$$\partial_t^2 \zeta - U^2\, \partial_x^2 \zeta = 0$$

čije se opće rješenje može prikazati kao superpozicija dva vala koja se gibaju u suprotnim smjerovima brzinama $\pm U$:

$$\zeta = f(x - Ut) + g(x + Ut).$$

f i g su proizvoljne funkcije.

Valni paket

Svaki od gibajućih valova zadovoljava linearnu parcijalnu DJ 1. reda u prostornim i vremenskim derivacijama:

$$
\begin{aligned}
(\partial_t + U\,\partial_x)\, f(x - Ut) &= 0 \\
(\partial_t - U\,\partial_x)\, g(x + Ut) &= 0.
\end{aligned}
$$

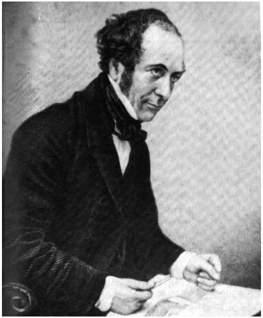
Treba napomenuti da je

- **superpozicija** posljedica linearnosti jednadžbi gibanja, a
- **linearna disperzija** je posljedica zanemarivanja pojedinih članova u jednadžbama.

Solitoni

Unatoč nelinearnosti disperzije u realnim sustavima, postoje valni paketi koji **zadržavaju svoj oblik** u vremenu. Prvi put su opaženi 1844 g. od J.S. Russella, škotskog inžinjera. Budući da je riječ o jednom **usamljenom valu** takva je pojava nazvana **soliton**, što je skraćenica od **solitary wave**.

Više o opažanjima J.S. Russella može se naći na adresi:



`http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html`

Kako je poznato da linearne jednadžbe ne čuvaju oblik valnog paketa, očito da za opis solitonskog vala je potrebno uzeti u obzir nelinearnost. Nelinearne jednadžbe i nelinearnost disperzije kao da imaju suprotan učinak koji se međusobno potire čuvajući oblik vala u vremenu.

Solitoni

Potpuni skup jednadžbi koji opisuju valove suviše se složen za istraživati. (Naravno numerički proračuni su uvijek mogući.)

Ideja je originalni skup jednadžbi pojednostaviti tako da ga je moguće analitički riješiti, a pri tome zadržati sve što je potrebno za adekvatni opis solitonskog vala. Adekvatni opis znači nelinearne jednadžbe i nelinearne disperzijske relacije.

Nelinerana disperzijska relacija za tekućinu konačne dubine u dugovalnoj granici je:

$$\omega_k^2 = g\, k\, \tanh(h\, k) \approx U^2 k^2 - \frac{U^2 h^2}{3} k^4 + \ldots .$$

U izrazu je zadržan prvi nelinarni član u Taylorovom razvoju.

Solitoni

Linearizirane jednadžbe, koje inače daju linearnu disperziju, mogu se nadopuniti dodatnim članom koji će dovesti do nelinearne disperzije, npr.:

$$\partial_t^2\,\zeta - U^2\,\partial_x^2\,\zeta + \underbrace{\frac{U^2 h^2}{3}\,\partial_x^4\,\zeta}_{\text{nelinearna disp.}} = 0.$$

Ova modificirana valna jednadžba može izvesti iz *početnog skupa* jednadžbi također dodavanjem jednog dodatnog člana:

$$\begin{aligned} \partial_t H + \partial_x (v\,H) &= 0 \\ \partial_t v + v\,\partial_x v + g\,\partial_x H + \frac{h}{3}\,\partial_x \partial_t^2 H &= 0, \qquad (H(x,t) = \zeta(x,t) + h) \end{aligned}$$

Linearizacijom sustava dobiva se ova jednadžba:

$$\partial_t^2\,\zeta - U^2\,\partial_x^2\,\zeta + \frac{h^2}{3}\,\partial_x^2 \partial_t^2\,\zeta = 0$$

koja daje traženu nelinearnost disperzije:

$$\omega_k^2 = \frac{U^2 k^2}{1 + \frac{h^2 k^2}{3}} \approx U^2 k^2 - \frac{h^2 U^2}{3} k^4 + \dots$$

Frekvencija titranja:

$$\omega_k = \pm U\, k \sqrt{1 - \frac{h^2 k^2}{3}} \approx \pm \left(U\, k - \frac{h^2 U}{6} k^3 \right)$$

Linearna 1d valna jednadžba ima opće rješenje koje je superpozicija dva putujuća rješenje koji se gibaju u suprotnim smjerovima. Svako od tih rješenja zadovoljava jednostavniju jednadžbu 1. reda u derivacijama. Npr. rješenje koje putuje u pozitivnom smjeru:

$$\partial_t \zeta + U\, \partial_x \zeta = 0.$$

Solitoni

Modificirana jednadžba 1. reda koja opisuje putujuće rješenje u pozitivnom smjeru ali s nelinearnošću u disperziji je:

$$\partial_t \zeta + U\,\partial_x \zeta + \frac{h^2 U}{6}\,\partial_x^3 \zeta = 0$$

Ako se jednadžba nadopuni još s nelinearnim članom u najnižem redu, dobiva se:

$$\partial_t \zeta + U\Big(1 + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{\zeta}{h}}_{\text{NL član}}\Big)\,\partial_x \zeta + \underbrace{\frac{h^2 U}{6}\,\partial_x^3 \zeta}_{\text{NL disperzija}} = 0$$

Ovo je **Korteweg-de Vries**ova jednadžba (skraćeno KdV).

Solitoni

KdV jednadžba ima kao rješenje solitonske valove **koji ne mijenjaju oblik** u vremenu. Opće putujuće rješenje ima formu:

$$\zeta(x,t) = h\, f(x - u\, t),$$

gdje je f nepoznata funkcija koju treba odrediti iz DJ. u je brzina širenja vala općenito različita od U.

Uvrštenjem pretpostavljenog riješenja u KdV DJ, dobiva se obična DJ:

$$\frac{h^2}{6}\, f''' + \frac{3}{2}\, f\, f' + (1 - \frac{u}{U})\, f' = 0.$$

Prva integracija daje:

$$\frac{h^2}{6}\, f'' + \frac{3}{4}\, f^2 + (1 - \frac{u}{U})\, f + \underbrace{konst.}_{=A} = 0.$$

Solitoni

Član s drugom derivacijom može se preurediti:

$$f'' = \frac{1}{2}\,\frac{d}{df}\,f'^2 .$$

Jednadžba se može preurediti u:

$$\frac{h^2}{12}\,d[\,f'^2\,] + [\,\frac{3}{4}\,f^2 + (1-\frac{u}{U})\,f + A\,]\,df = 0.$$

Integracijom se dobiva:

$$\frac{h^2}{12}\,f'^2 + \frac{1}{4}\,f^3 + \frac{1}{2}\,(1-\frac{u}{U})\,f^2 + A\,f + \underbrace{konst.}_{=B} = 0.$$

Budući da se traži rješenje koje opisuje usamljeni val, rubni uvjeti na funkciju f su:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \to 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) \to 0 \quad \Rightarrow \quad A, B \equiv 0.$$

Solitoni

Konačno se dobiva jednadžba 1. reda:

$$\frac{h^2}{3}\, f'^2 = f^2\,(\alpha - f), \qquad \text{ili} \qquad \frac{d\,f}{f\,\sqrt{\alpha - f}} = \frac{\sqrt{3}}{h}\,dx$$

gdje je:

$$\frac{u}{U} - 1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Integriranjem dobiva se konačni izraz za solitonsko rješenje:

$$\zeta(x,t) = \frac{\zeta_0}{\cosh^2\left[\dfrac{x - ut}{\Delta x}\right]},$$

gdje je:

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= h\,\alpha \\
\alpha &= 2\left(\frac{u}{U} - 1\right) \\
\Delta x &= \sqrt{\frac{4\,h^3}{3\,\zeta_0}} \qquad \text{(širina solitona).}
\end{aligned}$$

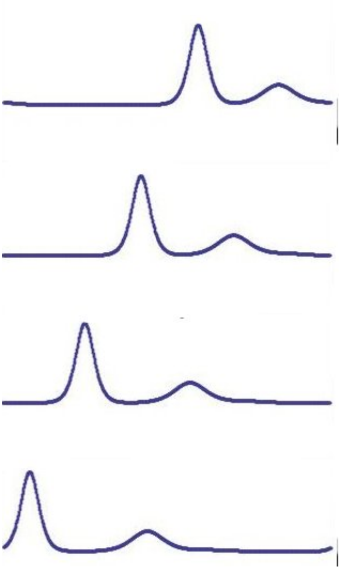
Solitoni

- Širina solitona Δx je neovisna o vremenu.
- Brzina širenja solitonskog vala je:

$$u = U\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\zeta_0}{h}\right)$$

- Brzina širenja ovisi o amplitudi ζ_0. Solitoni veće amplitude putuju većom brzinom.
- Prilikom sudara (susreta) dva solitona čuvaju svoju *individualnost*. Valovi se ponašaju kao čestice koje se sudare, odbiju ili prođu jedna kroz drugu te se nastavljaju gibati kao da do sudara (susreta) nije ni došlo.

Solitoni



Slika: Dva KdV solitona gibaju se s desne strane na lijevo. Soliton veće amplitude ima veću brzinu te se udaljava od sporijeg solitona manje amplitude.

Solitoni

Solitonska rješenja imaju i druge PDJ, od kojih su najpoznatije sine-Gordonova PDJ:

$$\left(\partial_t^2 - U^2 \partial_x^2\right) \phi = \sin(\phi)$$

te nelinearna Schrödingerova PDJ:

$$\left(\imath\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2\right)\psi = \kappa\,|\psi|^2\psi$$

Solitoni se pojavljuju i u složenim sustavima mnoštva čestica, kao npr. u sustavu elektrona i rešetke u *fizici krutih tijela* (kao topološki defekti osnovnog stanja ili kao lokalizirana pobuđenja osnovnog stanja).

U fizici elementarnih čestica postoji nastojanje da se elementarne čestice prikažu kao solitonska pobuđenja nekog osnovnog kvantnog polja.