Izlučno natjecanje za IMC 2003

Prvi Dan, 30. 5. 2003.

$\boxed{20}$ 1. Na ploči su napisani brojevi 2, 3, 5 i 7. Ivica može uzastopno provoditi sljedeću operaciju: U jednom koraku smije odabrati (ne nužno različite) brojeve s ploče x i y te na ploču dopisati broj $xy + x + y$. Može li Ivica tim postupkom na ploči dobiti broj 2003?

$\boxed{20}$ 2. Neka su $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ regularne matrice takve da je $A + B$ također regularna i da vrijedi

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}.$$

Dokažite da je

$$(\det A)^3 = (\det B)^3.$$

$\boxed{20}$ 3. Neka su $F, G\colon [0, 1] \to [0, 1]$ neprekidne funkcije, a F neka je još i rastuća. Dokažite nejednakost:

$$\int_0^1 F(G(x))\, dx \leq \int_0^1 F(x)\, dx + \int_0^1 G(x)\, dx.$$

$\boxed{20}$ 4. Za koje sve prirodne brojeve n postoji neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja u svaki element kodomene preslikava točno n elemenata domene, tj. za svaki $a \in \mathbb{R}$ skup $f^{-1}(\{a\})$ ima točno n elemenata?

$\boxed{20}$ 5. Nađite sve prirodne brojeve koji se mogu prikazati u obliku $\dfrac{(x + y + z)^2}{xyz}$ za neke prirodne brojeve x, y, z.

$\boxed{20}$ 6. Pravokutnik je "razrezan" na manje pravokutnike među kojima svaki ima bar jednu stranicu cjelobrojne duljine. Dokažite da je tada cjelobrojna i barem jedna od duljina stranica polaznog pravokutnika.

Marjan Praljak & Vjekoslav Kovač

Izlučno natjecanje za IMC 2003

Drugi Dan, 31. 5. 2003.

$\boxed{20}$ 1. Neka su $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ kompleksni brojevi. Definiramo $n \times n$ matricu $A = [a_{i,j}]$ tako da na (i, j)-tom mjestu ima element $a_{i,j} = (x_i + y_j)^{n-1}$ za svake $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dokažite

$$\det A = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \right) \cdot \left(\prod_{\substack{(i,j) \\ 1 \le i < j \le n}} (x_j - x_i)(y_i - y_j) \right).$$

$\boxed{20}$ 2. Za $a_1, \dots, a_n > 0$ dokažite nejednakost:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k!)^{\frac{1}{k}}}{k+1} (a_1 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} \le \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

$\boxed{20}$ 3. Neka su $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ za koje vrijedi $A^2 = A = A^*$, $B^2 = B = B^*$. Pokažite da su sve svojstvene vrijednosti od AB realne i pripadaju segmentu $[0, 1]$.

$\boxed{20}$ 4. Neka je f neprekidna strogo rastuća funkcija takva da je $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dokažite nejednakost:

$$\sum_{k=1}^{9} f\left(\frac{k}{10}\right) + \sum_{k=1}^{9} f^{-1}\left(\frac{k}{10}\right) \le \frac{99}{10}.$$

$\boxed{20}$ 5. Neka su a i b različiti realni brojevi. Pretpostavimo da neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadovoljava:

(1) za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x+a) + f(x+b) = \dfrac{1}{2} f(2x)$,

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

Dokažite da f mora biti periodička funkcija.

$\boxed{20}$ 6. Nađite najmanji prirodni broj n sa sljedećim svojstvom: Ako su $a_1, \dots, a_n$ prirodni brojevi čiji se svi prosti djelitelji nalaze u skupu $\{2, 3, 5\}$, tada postoje indeksi $i < j < k$ takvi da je $a_i a_j a_k$ jednak kubu nekog prirodnog broja.

Marjan Praljak & Vjekoslav Kovač