

Izlučno natjecanje za IMC 2004

28. 5. 2004.

Zadatak 1.

Na kružnici se nalazi 2^k ($k \in \mathbb{N}$) brojeva iz skupa $\{-1, 1\}$. Uzastopno se provodi sljedeća operacija: između svaka dva susjedna broja napišemo njihov produkt; na taj način dobijemo novih 2^k brojeva, a stare brojeve obrišemo. Dokažite da ćemo nakon konačno mnogo koraka (primjena opisane operacije) na kružnici imati samo jedinice.

Zadatak 2.

U koordinatnom (x, y, z) -sustavu nalazi se kocka takva da je jedan njezin vrh u ishodištu O , a dužine \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} su joj bridovi. Neka su nožištima okomica iz točaka A , B , C na (x, y) -ravninu (shvaćenu kao kompleksnu ravninu) pridruženi kompleksni brojevi u , v , w . Dokažite da je $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

Zadatak 3.

Nađite sve funkcije $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ koje su neprekidne na $[0, 1]$, derivabilne na $(0, 1)$ i za koje vrijedi

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \\ f'(x) + 2f(x) \geq 2x + 3 \quad \text{za svaki } x \in (0, 1).$$

Zadatak 4.

Niz realnih brojeva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadan je rekurzivno:

$$a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 2004a_n^2 + a_n \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Izračunajte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Zadatak 5.

Dokažite jednakosti:

$$(a) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \quad (b) \quad \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Zadatak 6.

Kažemo da je $(G, +, \leq)$ Arhimedova grupa ako je $(G, +)$ grupa i \leq je relacija totalnog (tj. linearnog) uređaja na skupu G sa svojstvima:

- (1) $(\forall a, b, c, d \in G) (a \leq b \ \& \ c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d)$,
- (2) $(\forall a, b \in G) (a > 0 \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}) (na \geq b))$.

Da li je svaka Arhimedova grupa nužno komutativna?

(Napomena: na označava $\underbrace{a + \dots + a}_n$.)

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Vrijeme pisanja je 5 sati.

M. Kazalicki, V. Kovač, M. Praljak