Izborno natjecanje za IMC

14.06.2007.

Zadatak 1. Neka je A kvadratna matrica reda 3 čiji su elementi iz skupa $\{1, -1\}$. Dokažite da je $\det A$ paran broj i nađite njegovu maksimalnu vrijednost.

Zadatak 2. Neka su A i B kompleksne matrice tipa 2×2 takve da vrijedi $(AB)^2 = A^2B^2$. Dokažite da je

$$\det(I + AB - BA) = 1.$$

Zadatak 3. Neka je $f\colon [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna i pretpostavimo da vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = 1\,.$$

Dokažite da je

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{3x} f(x) = 1.$$

Zadatak 4. Neka je R komutativni prsten s jedinicom i $f\colon R \to [0, \infty\rangle$ sa svojstvima

(*i*) $f(a) = 0$ ako i samo ako $a = 0$,

(*ii*) $f(ab) = f(a)f(b)$ za sve $a, b \in R$,

(*iii*) $f(a + b) \leq 2\max\{f(a), f(b)\}$ za sve $a, b \in R$.

Dokažite da za sve $a, b \in R$ vrijedi $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$.

Zadatak 5. Pronađite najmanji $n \in \mathbb{N}_0$ za kojeg postoji nekonstantna funkcija $f\colon \mathbb{Z} \to [0, \infty\rangle$ takva da za sve $x, y \in \mathbb{Z}$ vrijedi

(*i*) $f(xy) = f(x)f(y)$

(*ii*) $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Za taj n nađite sve funkcije koje zadovoljavaju uvjete (*i*) i (*ii*).

Zadatak 6. Nađite najmanju konstantu $C \in \mathbb{R}$ takvu da za sve $f \in L^2(\langle 0, 1\rangle)$ vrijedi

$$\int\limits_{\langle 0,1\rangle} \left| \int\limits_{\langle 0,x\rangle} f(t)dt \right|^2 dx \leq C \int\limits_{\langle 0,1\rangle} |f(x)|^2 dx.$$

$(L^2(\langle 0, 1\rangle) = \{f\colon \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{C} : \int_{\langle 0,1\rangle} |f(t)|^2 dt < \infty\})$.

Svaki zadatak vrijedi *20 bodova*.
Dozvoljeno vrijeme za rješavanje je *5 sati*.

Tomislav Pejković
Srđan Maksimović

Izborno natjecanje za IMC

14.06.2007.

Zadatak 1. Neka je A kvadratna matrica reda 3 čiji su elementi iz skupa $\{1,-1\}$. Dokažite da je $\det A$ paran broj i nađite njegovu maksimalnu vrijednost.

Rješenje. Prikladnim množenjem redaka i stupaca sa -1 determinantu možemo zapisati u obliku

$$\det A = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix},$$

gdje su $a,b,c,d \in \{1,-1\}$. Oduzimanjem prvog retka od drugog i trećeg dobijemo

$$\det A = \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & b-1 \\ 0 & c-1 & d-1 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)-(c-1)(d-1).$$

Umnošci na desnoj strani su jednaki 0 ili 4 što znači da je njihova razlika jednaka 4, 0 ili -4 odakle vidimo da je $\det A$ paran broj i najveća vrijednost mu je 4. $\square$

Zadatak 2. Neka su A i B kompleksne matrice tipa 2×2 takve da vrijedi $(AB)^2 = A^2B^2$. Dokažite da je

$$\det(I + AB - BA) = 1.$$

Rješenje. Neka je $S = AB - BA$. Tada je $\operatorname{tr}(S) = 0$. Izračunajmo $\operatorname{tr}(S^2)$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(S^2) &= \operatorname{tr}((AB)^2 - AB^2A - BA^2B + (BA)^2) = \\ &= \operatorname{tr}((AB)^2) - \operatorname{tr}((AB^2)A) - \operatorname{tr}(B(A^2B)) + \operatorname{tr}(B(ABA)) = \\ &= \operatorname{tr}((AB)^2) - \operatorname{tr}(A^2B^2) - \operatorname{tr}(A^2B^2) + \operatorname{tr}((AB)^2) = \\ &= 2\operatorname{tr}((AB)^2 - A^2B^2) = 0\end{aligned}$$

gdje posljednja jednakost slijedi iz uvjeta zadatka $(AB)^2 = A^2B^2$.

Iz $\operatorname{tr}(S) = 0$ slijedi da su $\pm\lambda$ svojstvene vrijednosti od S, a zatim da je λ^2 dvostruka svojstvena vrijednost od S^2. $\operatorname{tr}(S) = 2\lambda^2 = 0$ povlači $\lambda = 0$. Kako je $\sigma(I+S) = 1 + \sigma(S)$ jedina svojstvena vrijednost od $I+S$ je tada 1, pa i determinanta mora biti 1. $\square$

Zadatak 3. Neka je $f\colon [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna i pretpostavimo da vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\int_0^x f(t)^2 dt = 1\,.$$

Dokažite da je

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{3x} f(x) = 1.$$

Rješenje. Definiramo

$$F(x) := \left(\int_0^x f(t)^2 dt\right)^3.$$

Vrijedi

$$F'(x) = 3f(x)^2\left(\int_0^x f(t)^2 dt\right)^2$$

pa je zbog uvjeta zadatka

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{3} = 1.$$

Prema L'Hospitalovom pravilu je tada

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{F(x)f(x)^3}{3xf(x)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3xf(x)^3}$$

te preostaje primijeniti korijenovanje. □

Zadatak 4. Neka je R komutativni prsten s jedinicom i $f\colon R \to [0, \infty\rangle$ sa svojstvima

(*i*) $f(a) = 0$ ako i samo ako $a = 0$,

(*ii*) $f(ab) = f(a)f(b)$ za sve $a, b \in R$,

(*iii*) $f(a + b) \le 2\max\{f(a), f(b)\}$ za sve $a, b \in R$.

Dokažite da za sve $a, b \in R$ vrijedi $f(a + b) \le f(a) + f(b)$.

Rješenje. Iz Neka je $n = 2^m$ za neki $m \in N$ i neka su $a_1, \ldots, a_n \in R$. Uzastopnom uporabom svojstva (*iii*) dobivamo sljedeću relaciju

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \le 2^m \max_{j=1,\ldots,n} f(a_j).$$

Neka je sada n proizvoljan prirodan broj i neka je $2^m \ge n > 2^{m-1}$. Niz $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq R$ možemo nadopuniti do 2^m članova dodavanjem nula. Na taj način smijemo primijeniti dokazanu nejednakost

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \le 2^m \max_{j=1,\ldots,n} f(a_j) \le 2n \max_{j=1,\ldots,n} f(a_j) \le 2n \sum_{j=1}^{n} f(a_j).$$

Uzimanjem $a_j = 1_R$ za sve j dobije se $f(n1_R) \le 2n$. Nadalje je

$$\begin{aligned}
f(a+b)^n = f((a+b)^n) = f\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}\right) \le \\
&\le 2(n+1) \sum_{j=0}^{n} f\left(\binom{n}{j} 1_R\right) f(a)^j f(b)^{n-j} \le \\
&\le 4(n+1) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f(a)^j f(b)^{n-j} = \\
&= 4(n+1)(f(a) + f(b))^n.
\end{aligned}$$

Uzimanjem n-tog korijena i puštanjem $n \to \infty$ slijedi $f(a+b) \le f(a)+f(b)$. □

Zadatak 5. Pronađite najmanji $n \in \mathbb{N}_0$ za kojeg postoji nekonstantna funkcija $f\colon \mathbb{Z} \to [0, \infty\rangle$ takva da za sve $x, y \in \mathbb{Z}$ vrijedi

(*i*) $f(xy) = f(x)f(y)$

(*ii*) $2f(x^2 + y^2) - f(x) - f(y) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Za taj n nađite sve funkcije koje zadovoljavaju uvjete (*i*) i (*ii*).

Rješenje. U zadatku će nam trebati sljedeća lema

Lema 1. Ako je $p \equiv 3 \pmod 4$ tada $p \mid a^2 + b^2$ povlači $p \mid a$ i $p \mid b$.

Dokaz leme. Pretpostavimo $p \mid a^2 + b^2$ i $p \nmid b$. Tada je $a^2 \equiv -b^2 \pmod p$ tj. $(ab^{-1})^2 \equiv -1 \pmod p$. Dakle -1 je kvadratni ostatak modulo p, no to je u kontradikciji s $p \equiv 3 \pmod 4$. ◇

Neka f zadovoljava (*i*). Tada je $f(1 \cdot 1) = f(1)^2$ što povlači $f(1) \in \{0, 1\}$. Kada bi bilo $f(1) = 0$ tada bi imali $f(x) = f(x)f(1) = 0$ za sve x pa bi f bila konstantna. Dakle $f(1) = 1$. Slično se dobije $f(-1) = 1$ i $f(0) = 0$.

Pokažimo da je najmanji traženi n jednak 1.
Za $n = 1$ definiramo funkciju f_0 s $f_0(0) = 0$, $f_0(x) = 1$, za sve $x \neq 0$. f_0 očito zadovoljava oba uvjeta. Ako bi bilo $n = 0$, tada bi uz $x = 1$ i $y = 0$ imali $f(1) = f(0)$ što prema dokazanome nije istina.

Fiksirajmo sada $n = 1$. Neka je p prost takav da je $p \equiv 3 \pmod 4$ i definiramo funkciju $f_p\colon \mathbb{Z} \to [0, \infty\rangle$

$$f_p(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } p \mid x, \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

f_p očito nije konstantna i zadovoljava (*i*) jer $p \mid xy$ povlači $p \mid x$ ili $p \mid y$. Neka je $K_p(x, y) := 2f_p(x^2 + y^2) - f_p(x) - f_p(y)$. Ako $p \mid x$ i $p \mid y$ tada $p \mid x^2 + y^2$ pa je $K_p(x, y) = 0$. Ako p dijeli točno jedan od brojeva x i y tada $p \nmid x^2 + y^2$ pa je $K_p(x, y) = 1$. U slučaju $p \nmid x, y$ prema lemi 1 je $p \nmid x^2 + y^2$ i time $K_p(x, y) = 1$. Svakako je $K_p(x, y) \in \{0, 1\}$ tj. f_p zadovoljava (*ii*) i f_p je rješenje.

Pokazat ćemo da drugih rješenja osim f_0 i f_p za $p \equiv 3 \pmod 4$ nema. Neka je f neko rješenje. Uvjeti (*i*) i (*ii*) povlače

$$2f(x)^2 - f(x) = 2f(x^2 + 0) - f(x) - f(0) \in \{0, 1\}$$

pa mora biti $f(x) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Ako bi bilo $f(x) = \frac{1}{2}$ za neki x tada

$$f(x^2 + 1) - f(x) - f(1) \leq 1 - \frac{3}{2} < 0.$$

Dakle $f(x) \in \{0, 1\}$ za sve $x \in \mathbb{Z}$.

Nadalje, $f(2) = 1$ jer $2f(1^2 + 1^2) \in f(1) + f(1) + \{0, 1\} = \{2, 3\}$. Neka je q prost i $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$. Pošto je -1 kvadratni ostatak modulo q postoje cijeli brojevi a i k takvi da je $qk = a^2 + 1$. Tada je

$$2f(k)f(q) = 2f(kq) = 2f(a^2 + 1) = f(a) + f(1) + \varepsilon,$$

gdje je $\varepsilon \in \{0,1\}$. Stoga je $2f(k)f(q) \geq f(1) = 1 \neq 0$ i time $f(q) = 1$.

Pretpostavimo $f \neq f_0$. Tada je $f(x_0) = 0$ za neki $x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$. Prema uvjetu (i) mora biti $f(p) = 0$ za neki prosti faktor p od x_0, a prema dokazanome mora biti $p \equiv 3 \pmod 4$. Ako bi za još neki prosti p' bilo $f(p') = 0$ tada bi imali $2f(p^2 + p'^2) \in \{0,1\}$, tj. $f(p^2 + p'^2) = 0$. To opet povlači da postoji prosti faktor p'' od $p^2 + p'^2$ takav da je $f(p'') = 0$, a to znači da je i $p'' \equiv 3 \pmod 4$. No to je nemoguće jer bi prema lemi 1 p'' dijelio i p i p'. Kontradikcija. Dakle $f(x) = 0$ akko je p faktor od x odnosno $f = f_p$. $\square$

Zadatak 6. Nađite najmanju konstantu $C \in \mathbb{R}$ takvu da za sve $f \in L^2(\langle 0,1\rangle)$ vrijedi

$$\int\limits_{\langle 0,1\rangle} \left| \int\limits_{\langle 0,x\rangle} f(t)dt \right|^2 dx \leq C \int\limits_{\langle 0,1\rangle} |f(x)|^2 dx.$$

$(L^2(\langle 0,1\rangle) = \{f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{C} : \int\limits_{\langle 0,1\rangle} |f(t)|^2 dt < \infty\})$.

Rješenje. Označimo lijevu stranu s I.

$$I \leq \int\limits_{\langle 0,1\rangle} \left(\int\limits_{\langle 0,x\rangle} |f(t)|dt \right)^2 dx = \int\limits_{\langle 0,1\rangle} \left(\int\limits_{\langle 0,x\rangle} \sqrt{\cos\frac{\pi t}{2}} \frac{|f(t)|}{\sqrt{\cos\frac{\pi t}{2}}} dt \right)^2 dx.$$

Primijenimo Cauchyjevu nejednakost

$$\begin{aligned} I &\leq \int\limits_{\langle 0,1\rangle} \int\limits_{\langle 0,x\rangle} \cos\frac{\pi t}{2} dt \int\limits_{\langle 0,x\rangle} \frac{|f(t)|^2}{\cos\frac{\pi t}{2}} dt\ dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int\limits_{\langle 0,1\rangle} \sin\frac{\pi x}{2} \int\limits_{\langle 0,x\rangle} \frac{|f(t)|^2}{\cos\frac{\pi t}{2}} dt\ dx. \end{aligned}$$

Podintegralna funkcija je pozitivna pa smijemo primijeniti Fubinijev teorem

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{\langle 0,1\rangle} \frac{|f(t)|^2}{\cos\frac{\pi t}{2}} \int\limits_{\langle t,1\rangle} \sin\frac{\pi x}{2} dx\ dt = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int\limits_{\langle 0,1\rangle} \frac{|f(t)|^2}{\cos\frac{\pi t}{2}} \cos\frac{\pi t}{2} dt = \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int\limits_{\langle 0,1\rangle} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Ovo povlači $C \leq \frac{4}{\pi^2}$. S druge strane, stavljajući $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ dobivamo

$$\int\limits_{\langle 0,1\rangle} \left| \int\limits_{\langle 0,x\rangle} \cos\frac{\pi t}{2} dt \right|^2 dx = \frac{4}{\pi^2} \int\limits_{\langle 0,1\rangle} |\cos t|^2 dt$$

što daje drugu nejednakost pa zaključujemo $C = \frac{4}{\pi^2}$. $\square$