Izborno natjecanje za IMC

29. svibnja 2009.

1. Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ preslikavanje klase C^1 na $[0,1]$. Ako je $f(1/2) = 0$, dokažite da je
$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 12 \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2.$$

2. Dano je 17 realnih brojeva. Ako maknemo bilo koji od tih brojeva, preostalih 16 možemo podijeliti u dvije grupe od 8 brojeva tako da su sume brojeva u obje grupe jednake. Dokažite da su svi dani brojevi jednaki.

3. Dokažite da invertibilna matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ ima svojstvo $A^{-1} = \overline{A}$ ako i samo ako postoji invertibilna matrica $B \in M_n(\mathbb{C})$ takva da je $A = B^{-1} \cdot \overline{B}$.

4. Neka je $f(x)$ racionalna funkcija s kompleksnim koeficijentima (t.j. količnik dva polinoma) koja nema pol reda većeg od 1. Neka su $u_0, u_1, ..., u_n$ kompleksni korijeni od f i neka su $w_1, w_2, ..., w_m$ kompleksni korijeni od f' (svaki korijen je napisan onoliko puta kolika mu je kratnost). Pretpostavimo da je u_0 jednostruki korijen od f. Dokažite da je
$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{w_k - u_0} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k - u_0}.$$

5. Neka je $\mathcal{G}$ skup svih konačnih grupa s barem dva elementa.
   a) Pokažite da za $G \in \mathcal{G}$ vrijedi
   $$|End(G)| \leq \sqrt[p]{n^n},$$
   pri čemu je $|End(G)|$ broj endomorfizama od G, $n = |G|$ broj elemenata od G, a p najveći prost djeljitelj od n.
   b) Odredite sve grupe u $\mathcal{G}$ takve da u nejednakosti u a) podzadatku vrijedi jednakost.

6. Za $n \geq 2$ neka su $S_1, S_2, ..., S_{2^n}$ podskupovi skupa $A = \{1, 2, 3, ..., 2^{n+1}\}$ koji zadovoljavaju sljedeće svojstvo: *Ne postoje indeksi a i b uz $a < b$ i elementi $x, y, z \in A$ uz $x < y < z$ takvi da su $y, z \in S_a$ i $x, z \in S_b$.*

   Dokažite da barem jedan od skupova $S_1, S_2, ..., S_{2^n}$ ne sadrži više od $2n + 1$ elementa.

Tomislav Pejković
Matija Bašić

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova. Vrijeme pisanja je 5 punih sati.