IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - RJEŠENJA

06. 06. 2014.

Zadatak 1. Neka su A i B realne kvadratne matrice istog reda takve da je A simetrična i da je $A^3B = BA^3$. Dokažite da je tada $AB = BA$.

Rješenje. Kako je A realna simetrična matrica, ona je ortogonalno slična nekoj dijagonalnoj matrici, tj. pripadni linearni operator se može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi. Preciznije, $A = S^{-1}DS$ za neku realnu dijagonalnu matricu D i neku ortogonalnu matricu S. Neka su dijagonalni elementi od D redom $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tako da su dijagonalni elementi od D^3 onda $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \ldots, \lambda_n^3$. Kako se radi o realnim brojevima, za svake i, j vrijedi $\lambda_i^3 = \lambda_j^3$ ako i samo ako je $\lambda_i = \lambda_j$. Zato postoji (interpolacijski) polinom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k, \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R},$$

takav da je $f(\lambda_i^3) = \lambda_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Kao posljedicu imamo $f(D^3) = D$ te

$$\begin{aligned} f(A^3) = f(S^{-1}D^3S) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k (S^{-1}D^3S)^k \\ &= S^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k (D^3)^k\Big)S = S^{-1}f(D^3)S = S^{-1}DS = A. \end{aligned}$$

Po uvjetu zadatka je $A^3B = BA^3$ pa (trivijalnom) indukcijom dobivamo i

$$(A^3)^k B = B(A^3)^k$$

za svaki prirodni broj k. Kao linearna kombinacija tih jednakosti odmah slijedi $f(A^3)B = Bf(A^3)$, što je (po konstrukciji od f) upravo $AB = BA$. ✓

Zadatak 2. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija takva da je $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ i $f'(0) = f'(1) = 0$. Dokažite da postoji $x \in [0, 1]$ takav da je $|f''(x)| \geq 4$.

Rješenje. Ukoliko postoji $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ takav da je $f''(x) \geq 4$ gotovi smo, stoga pretpostavimo da je $f''(x) < 4$, za sve $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Prema teoremu srednje vrijednosti znamo da za svaki $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right]$ postoji $c_x \in \langle 0, x\rangle$ takav da je

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = f''(c_x) < 4.$$

Zaključujemo da je $f'(x) < 4x$, za svaki $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right]$. Funkcija f' je neprekidna pa time i integrabilna na segmentu $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Vrijedi:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f'(t)\, \mathrm{d}t < 4\int_0^{\frac{1}{2}} t\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kao

$$g(x) = 1 - f(1-x), \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Vidimo da je $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ i $g'(0) = g'(1) = 0$, tj. funkcija g zadovoljava iste uvjete kao funkcija f. Dakle, ako je $g''(x) < 4$, za svaki $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, onda je $g\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$. No, to onda znači da je $1 - f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$, odnosno $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$, što je kontradikcija. Dakle, postoji $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ takav da je $g''(x) \geq 4$. To onda znači da je $-f''(1-x) \geq 4$, odnosno da postoji $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ takav da je $f''(x) \leq -4$. Ovime je dokaz priveden kraju. ✓

Zadatak 3. Neka je R komutativan prsten s jedinicom i neka je

$$\mathrm{SL}_2(R) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) | a, b, c, d \in R; ad - bc = 1 \right\}.$$

Dokažite da je za svaki prirodan broj N preslikavanje

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) &\mapsto \left(\begin{smallmatrix} a \bmod N & b \bmod N \\ c \bmod N & d \bmod N \end{smallmatrix}\right), \end{aligned}$$

surjektivno.

Rješenje. Neka je $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ i neka je $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{Z})$ bilo koja matrica čija je redukcija mod N jednaka γ. Očito je $GCD(c, d, N) = 1$ pa prema kineskom teoremu o ostacima postoji $t \in \mathbb{Z}$ takav da su $c' = c$ i $d' = d + tN$ relativno prosti. Sad još treba pokazati da postoje $k, l \in \mathbb{Z}$ takvi da vrijedi

$$(a + kN)d' - (b + lN)c' = 1.$$

Budući da su c' i d' relativno prosti postoje $u, v \in \mathbb{Z}$ za koje je $ud' - vc' = -1$. Neka je $ad' - bc' = 1 + rN$ za neki $r \in \mathbb{Z}$. Tada možemo odabrati: $k = ru$ i $l = rv$. ✓

Zadatak 4. Neka je $q \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekcija. Za svaki $r \in \mathbb{R}$ neka je

$$T_r = \sum_{q_n < r} \frac{1}{n!}.$$

Dokažite da je skup $\{T_r \colon r \in \mathbb{R}\}$ linearno nezavisan nad $\mathbb{Q}$.

Rješenje. Neka su $r_1 > \cdots > r_k$, te $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}$, takvi da je

$$a_1 T_{r_1} + \cdots + a_k T_{r_k} = 0.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a_1 \neq 0$. Uočimo da nakon eventualnog množenja sa zajedničkim nazivnikom, možemo pretpostaviti da su $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. Odaberimo n dovoljno velik, odnosno, preciznije, takav da je $n > |a_1|$, $r_1 > q_n > r_2$ i[1]

$$(|a_1| + \cdots + |a_k|) \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{n!}{m!} < 1.$$

[1]Takav n postoji zbog nejednakosti $\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!/(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}$.

Uočimo da je zbog $n!(a_1T_{r_1} + \cdots + a_kT_{r_k}) = 0$ i odabira broja n, suma *necjelobrojnih* dijelova izraza $n!(a_1T_{r_1} + \cdots + a_kT_{r_k})$ jednaka 0. Zbog toga je

$$a_1 = -\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{q_m<r_i} a_i \frac{n!}{m!} \equiv 0 \pmod{n},$$

pa zbog $n > |a_1|$ slijedi $a_1 = 0$, što je kontradikcija. ✓

Zadatak 5. Pretpostavimo da je pravokutnik P sa stranicama duljina a i b podijeljen na kvadrate $K_1, \ldots, K_n$ stranica paralelnih stranicama pravokutnika P. Ako je s_i duljina stranice kvadrata K_i, dokažite da je $s_i/a, s_i/b \in \mathbb{Q}$, za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $(0,0)$ i (a,b) nasuprotni vrhovi pravokutnika P. Neka su $X = \{0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{m_X} = a\}$ i $Y = \{0 = y_1 < y_2 < \cdots < y_{m_Y} = b\}$ redom skupovi x- i y-koordinata vrhova kvadrata $K_1, \ldots, K_n$. Promatrajmo $\mathbb{R}$ kao (beskonačno-dimenzionalni) vektorski prostor nad $\mathbb{Q}$, te neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljno linearno preslikavanje. Tada je (da jednakosti vrijede najlakše se uvjeriti tako da se nacrta skica particije pravokutnika P i skupova X i Y)

$$\begin{aligned}
f(a)f(b) &= \sum_{\alpha=1}^{m_X-1} f(x_{\alpha+1} - x_\alpha) \cdot \sum_{\beta=1}^{m_Y-1} f(y_{\beta+1} - y_\beta) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m_X-1} \sum_{\beta=1}^{m_Y-1} f(x_{\alpha+1} - x_\alpha) f(y_{\beta+1} - y_\beta) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{(\alpha,\beta)\colon\, [x_\alpha, x_{\alpha+1}]\times[y_\beta, y_{\beta+1}] \subseteq K_i} f(x_{\alpha+1} - x_\alpha) f(y_{\beta+1} - y_\beta) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha\colon\, ((x_\alpha, x_{\alpha+1})\times[0,b])\cap K_i \neq \emptyset} f(x_{\alpha+1} - x_\alpha) \sum_{\beta\colon\, \left([0,a]\times(y_\beta, y_{\beta+1})\right)\cap K_i \neq \emptyset} f(y_{\beta+1} - y_\beta) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot f(s_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(s_i)^2.
\end{aligned}$$

Odaberimo sada neku bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}$ koja sadrži vektor a, te definirajmo linearnu funkciju za koju je $f(a) = 0$, te koja fiksira sve elemente baze različite od a. Iz gornje jednakosti sada dobivamo

$$0 = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)^2,$$

odnosno $f(s_i) = 0$ za svaki $i = 1, \ldots, m$. Slijedi da je $s_i \in \mathrm{Ker} f = \mathbb{Q}a$, a to smo i trebali dokazati. Da je $s_i/b \in \mathbb{Q}$ dokazuje se potpuno analogno. ✓

Zadatak 6. Za koje parove prirodnih brojeva m i n je polinom $X^m - Y^n$ ireducibilan u $\mathbb{C}[X,Y]$?

Prvo rješenje. Ako m i n nisu relativno prosti, tada postoji prirodan broj d takav da je $m = m'd$ i $n = n'd$ uz $m' < m$ i $n' < n$. Kako je polinom $X^m - Y^n$ djeljiv sa $X^{m'} - Y^{n'}$, zaključujemo da u tom slučaju dani polinom nije ireducibilan.

Pretpostavimo sada da su m i n relativno prosti, te dokažimo da je u tom slučaju dani polinom ireducibilan. Budući da je prsten $\mathbb{C}[X,Y]$ izomorfan prstenu $\mathbb{C}[Y][X]$ (uz očiti izomorfizam), element je ireducibilan u jednom ako i samo ako je ireducibilan promatran kao element drugog prstena. Nadalje, pošto[2] je $K = \mathbb{C}(Y) = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[Y])$, zbog Gaussove leme zaključujemo da je nužno i dovoljno pokazati ireducibilnost u prstenu $K[X]$. Uočimo da je zbog Eisensteinovog kriterija i činjenice da je Y prost u $\mathbb{C}[Y]$, promatrani polinom ireducibilan u slučaju $n = 1$. Pretpostavimo da za neki $n \geq 2$ to nije slučaj. U tom slučaju mora postojati njegova nultočka w i odgovarajuće proširenje L/K stupnja manjeg od m. Kako su m i n relativno prosti, postoje $a, b \in \mathbb{Z}$ takvi da je $am + bn = 1$. Uočimo da je tada $w^b Y^a \in L$ nultočka polinoma $X^m - Y$. Kako smo pokazali da je ovaj polinom ireducibilan u $K[X]$, slijedi da je stupanj ove nultočke nad K jednak m. Budući da je $w^b Y^a \in L$, slijedi da je i stupanj proširenja L/K barem m, što je kontradikcija. ✓

Drugo rješenje. Slučaj kada m i n nisu relativno prosti analiziramo kao u prethodnom rješenju. Pretpostavimo sada da su m i n relativno prosti.

Graduirajmo[3] prsten $\mathbb{C}[X,Y]$ na način da elementu X damo težinu n, a elementu Y težinu m. S obzirom na ovakvu graduiranost, polinom $X^m - Y^n$ je homogen (ima težinu mn). Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji netrivijalna faktorizacija danog polinoma[4]

$$X^m - Y^n = (X^a + \cdots + Y^p)(X^b + \cdots - Y^r),$$

pri čemu su $a, b < m$ i $p, r < n$.

Međutim, zbog homogenosti polinoma s lijeve strane i faktori s desne strane moraju biti homogeni[5], odakle zaključujemo da je $an = pm$, pa zbog činjenice da su relativno prosti slijedi da je $n \mid p$, a onda posebno $p \geq n$, što je kontradikcija. ✓

[2] $\mathbb{C}(Y)$ je oznaka za transcedentalno proširenje polja $\mathbb{C}$, na koje možemo gledati kao na formalne racionalne funkcije u varijabli Y sa kompleksnim koeficijentima.

[3] Za prsten R kažemo da je graduirani ako je $R \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ (s obzirom na zbrajanje u R), te za $x \in A_p$, $y \in A_r$ vrijedi $xy \in A_{p+r}$. Za $x \in A_p$ kažemo da je homogeni element težine p.

[4] Trotočke se odnose na preostale (pa tako i moguće) mješovite članove.

[5] U suprotnom bi odabirom homogenih dijelova najveće težine iz svakog faktora te množenjem istih dobili homogeni član veće težine od onog kojeg bi dobili istim postupkom, ali odabirom najmanjih težina po faktorima. Dakle, polinom s lijeve strane ne bi bio homogen.