IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - ZADACI

03. 06. 2016.

Zadatak 1. Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 takva da je $f(0) = 0$. Dokažite da je

$$\int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 f'(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Zadatak 2. Neka je A $n \times n$ simetrična matrica s cjelobrojnim koeficijentima te neka je p polinom čije su sve nultočke cijeli brojevi takav da je $p(A) = J$, gdje je J $n \times n$ matrica čiji su svi koeficijenti jednaki 1. Ako je $(1, 1, \dots, 1)$ svojstveni vektor matrice A, dokažite da su sve svojstvene vrijednosti matrice A cijeli brojevi.

Zadatak 3. Odredite sve prirodne brojeve n takve da za svaku permutaciju skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, σ, postoji polinom f s cjelobrojnim koeficijentima, takav da je

$$\sigma(x) \equiv f(x) \pmod{n}, \quad \forall x \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Zadatak 4.

(a) Ako je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ niz nenegativnih brojeva takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{4/3}$ konvergira, dokažite da red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m+n} a_m \right)^2$ također konvergira.

(b) Pokažite da postoji niz nenegativnih brojeva $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ takav da za svaki $p > 4/3$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ konvergira, ali red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m+n} a_m \right)^2$ divergira.

Zadatak 5. Dana je $10 \times 10 \times 10$ kocka sastavljena od 1000 jediničnih bijelih kockica. Bobi i Rudi igraju sljedeću igru. Bobi izabere nekoliko kvadara veličine $1 \times 1 \times 10$ tako da nikoja dva nemaju zajedničke točke i promjeni boju svih kockica u njima u crnu. Tada Rudi izabere neke od jediničnih kockica i pita Bobija koje su boje. Koliko najmanje kockica Rudi mora izabrati da bi na temelju Bobijevog odgovora odredio sve crne kockice?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 300 minuta.