Izborno natjecanje za Vojtěch Jarník 2005

I. kategorija

11. 3. 2005.

Zadatak 1.

Nađite sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ za koje postoji $n \times n$ matrica M sa sljedećim svojstvima:

(1) M je simetrična.

(2) U svakom retku (i u svakom stupcu) od M se nalaze brojevi $0, 1, \ldots, n-1$.

(3) Na glavnoj dijagonali od M su samo nule.

Zadatak 2.

Dokažite da za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{\pi}{4}.$$

Zadatak 3.

Dane su matrice $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, pri čemu su A i C regularne. Ako pretpostavimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $A^k B = C^k D$, dokažite da mora biti $B = D$.

Zadatak 4.

Označimo sa $f(k)$ najveći neparni djelitelj prirodnog broja k. Izračunajte:

(a) $L := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f(k)}{k}$,

(b) $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{f(k)}{k} - nL \right)$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Vrijeme pisanja je 4 puna sata.

M. Kazalicki, V. Kovač, M. Praljak

Izborno natjecanje za Vojtěch Jarník 2005

II. kategorija

11. 3. 2005.

Zadatak 1.

Označimo sa a_n broj simetričnih $\{0,1\}$-matrica reda n koje u svakom retku (i svakom stupcu) imaju točno po jednu jedinicu. Uzmimo još da je $a_0 = 1$. Izračunajte eksponencijalnu funkciju izvodnicu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ niza $(a_n)_{n \geq 0}$.

Zadatak 2.

Ako je $p \geq 5$ prost broj, dokažite da je broj $\binom{2p}{p} - 2$ djeljiv sa p^3.

Zadatak 3.

Neka su $p, q > 1$ relativno prosti prirodni brojevi.

(a) Ako je funkcija $f\colon \{1, 2, \ldots, p+q-1\} \to \{0, 1\}$ periodična s periodima p i q, dokažite da je f konstanta.

(b) Pokažite da postoje točno 4 funkcije $f\colon \{1, 2, \ldots, p+q-2\} \to \{0, 1\}$ koje su periodične s periodima p i q.

Zadatak 4.

Svi koeficijenti polinoma $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ su 0 ili 1 i još je $P(0) = 1$. Dokažite da za svaki korijen $w \in \mathbb{C}$ tog polinoma vrijedi $|w| \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.
Vrijeme pisanja je 4 puna sata.

M. Kazalicki, V. Kovač, M. Praljak