Izborno natjecanje za Vojtěch Jarník 2006

I. KATEGORIJA

17. 3. 2006.

Zadatak 1.
Koliko ima prirodnih brojeva koji su djelitelji barem jednog od brojeva: 10^{10}, 12^{10}, 15^{10} ?

Zadatak 2.

(a) Pretpostavimo da je 6×6 ploča nekako popločena dominama 1×2. Dokažite da je moguće razrezati tu ploču na dvije manje pravokutne ploče tako da ne prerežemo niti jednu dominu.

(b) Nađite popločavanje 8×8 ploče dominama 1×2 takvo da nije moguće razrezati ploču na dvije manje pravokutne ploče bez da prerežemo neku dominu.

Zadatak 3.
Neka je $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$, gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ te $n \in \mathbb{N}$. Ako pretpostavimo da je $|f(x)| \leq |\sin x|$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, dokažite da vrijedi

$$|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| \leq 1.$$

Zadatak 4.
Neka je n prirodan broj. Promotrimo sve $n \times n$ matrice čiji su dijagonalni elementi parni cijeli brojevi, a preostali elementi neparni cijeli brojevi. Koje su moguće vrijednosti rangova takvih matrica?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 4 puna sata.

M. Kazalicki, V. Kovač, M. Praljak

Izborno natjecanje za Vojtěch Jarník 2006

II. kategorija

17. 3. 2006.

Zadatak 1.

Neka je p prost broj, $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{Z}$ te $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \mathbb{Z}$ takvi da a_k nije djeljiv s p za barem jedan indeks $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Ako vrijedi sustav kongruencija

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1 & + & a_2 & + & \ldots & + & a_p & \equiv & 0 \pmod{p} \\
a_1 x_1 & + & a_2 x_2 & + & \ldots & + & a_p x_p & \equiv & 0 \pmod{p} \\
a_1 x_1^2 & + & a_2 x_2^2 & + & \ldots & + & a_p x_p^2 & \equiv & 0 \pmod{p} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
a_1 x_1^{p-1} & + & a_2 x_2^{p-1} & + & \ldots & + & a_p x_p^{p-1} & \equiv & 0 \pmod{p}
\end{array}$$

dokažite da postoje indeksi $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $i \neq j$ takvi da je broj $x_i - x_j$ djeljiv s p.

Zadatak 2.

Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih brojeva. Pokažite da su sljedeća dva uvjeta ekvivalentna:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty$

(2) Za svaki niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nenegativnih brojeva imamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty.$$

Zadatak 3.

Neka je R prsten sa svojstvom $(\forall x, y \in R)(xy = yx \text{ ili } xy = -yx)$. Dokažite da je R komutativan, tj. $(\forall x, y \in R)(xy = yx)$, ili antikomutativan, tj. $(\forall x, y \in R)(xy = -yx)$.

Zadatak 4.

Neka je $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva većih od 2. U kružnicu polumjera r_1 upisan je pravilni N_1-terokut, zatim je u njega upisana kružnica polumjera r_2 pa je u nju upisan pravilni N_2-terokut, itd. Na taj način je dobiven niz kružnica i poligona. Dokažite da vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 \qquad \text{ako i samo ako je} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n^2} = \infty.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 4 puna sata.

M. Kazalicki, V. Kovač, M. Praljak