Izborno natjecanje za Vojtěch Jarník

29.02.2008.

I. kategorija

1. Na vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ realnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3 zadana je funkcija $F : \mathcal{P} \to [0, +\infty\rangle$ formulom
$$F(p) := \sup\{|\cos(4\pi x) - p(x)| : x \in [0,1]\}.$$
Odredite polinom $p \in \mathcal{P}_3$ takav da je vrijednost $F(p)$ minimalna.

2. Postoji li particija skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u beskonačno mnogo skupova $T_1, T_2, \ldots$ tako da je T_1 beskonačan i svaki T_k $(k > 1)$ je dobiven pribrajanjem istog broja svim elementima od T_1?

3. Neka su $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dvije različite neuređene n-torke racionalnih brojeva tako da se nizovi
$$a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} + a_n \text{ (sve sume } a_i + a_j,\ 1 \le i < j \le n) \text{ i}$$
$$b_1 + b_2,\ b_1 + b_3,\ \ldots, b_{n-1} + b_n \text{ (sve sume } b_i + b_j,\ 1 \le i < j \le n)$$
podudaraju do na permutaciju. Dokažite da je n potencija od 2.

4. Pretpostavimo da su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ dvije realne matrice reda n takve da je $AB = BA$ i $\det(A + B) \ge 0$. Dokažite da je tada
$$\det(A^k + B^k) \ge 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 4 puna sata.

Izborno natjecanje za Vojtěch Jarník

29.02.2008.

II. kategorija

1. Dokažite da postoji konstanta $C > 0$ takva da za svaki realni polinom $P \in \mathcal{P}_{2008}$ stupnja manjeg ili jednakog 2008 vrijedi
$$|P(1)P'(1) - P(-1)P'(-1)| \leq C \int_{-1}^{1} P(x)^2 \, dx.$$

2. Postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi
$$(\forall q \in \mathbb{Q})(\lim_{x\to q} |f(x)| = +\infty)?$$

3. Pretpostavimo da je R netrivijalni komutativni prsten s jedinicom u kojem vrijedi
$$(\forall x \in R\backslash\{0\})(\exists m, n \in \mathbb{N})\big((x^m + 1)^n = x\big).$$
Dokažite da je tada $\mathrm{End}(R)\backslash\{0\} = \mathrm{Aut}(R)$, tj. svaki ne-nul endomorfizam od R je automorfizam.

4. U vrhove pravilnog n-terokuta upisani su redom realni brojevi x_1, x_2, $\ldots$, x_n, pri čemu je
$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0.$$
Ako za neki $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ imamo $x_k < 0$, onda možemo provesti sljedeću transformaciju:
$$\begin{array}{rl} \text{brojeve} & x_{k-1},\ x_k,\ x_{k+1} \\ \text{promijenimo u} & x_{k-1} + x_k,\ -x_k,\ x_{k+1} + x_k \ \ \text{tim redom.} \end{array}$$
Ovdje smo stavili da je $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$. Ovu transformaciju možemo ponoviti s novom n-torkom, i.t.d. Dokažite da za $n \geq 6$ možemo izvršiti samo konačan broj transformacija, tj. nakon konačno mnogo koraka dobit ćemo n-torku nenegativnih brojeva.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 4 puna sata.