IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNÍK

25. veljače 2012.

I. KATEGORIJA

Zadatak 1.

Izračunajte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) .$$

Zadatak 2.

Pretpostavimo da je $A \subset \mathbb{R}$ neprazan konačan skup, da je $(c_a : a \in A)$ kolekcija realnih brojeva različitih od 0 i da je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava

$$|f(x)| \le e^{-x^2} \quad \text{i} \quad \sum_{a\in A} c_a\, f(x+a) = 0 \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Dokažite da je $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak 3.

Neka je $n \ge 3$ cijeli broj. Definirajmo

$$S = \Big\{ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \; : \; \mathrm{M}(k, n) = \mathrm{M}(k+1, n) \Big\} ,$$

pri čemu $\mathrm{M}(a, b)$ označava najveći zajednički djelitelj brojeva a i b.
Izračunajte ostatak koji $\prod_{k\in S} k$ daje pri dijeljenju s n.
(*Napomena*: $\prod_{k\in\emptyset} k := 1$.)

Zadatak 4.

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi čiji zbroj je jednak 1. Za svaki prirodni broj k označimo

$$N_k = \mathrm{card} \left\{ \, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \; : \; 2^{-k} < a_i \le 2^{-k+1} \right\} .$$

Dokažite da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{N_k}{2^k}} \;\le\; \sqrt{\log_2 n} + \sqrt{2} \, .$$

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNÍK

25. veljače 2012.

Rješenja

I. KATEGORIJA

Zadatak 1.

Izračunajte:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left\lfloor\frac{2n}{k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)$$

Rješenje zadatka 1.

Uočimo da je riječ o gornjoj Darbouxovoj sumi funkcije $f(x)=\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ na segmentu $[0,1]$, pa će limes biti jednak integralu $\int_0^1 f(x)dx$. Pogledajmo kako se ponaša funkcija f. Neka je $x\in\left\langle\frac{2}{2k+1},\frac{1}{k}\right]$ za $k\in\mathbb{N}$. Tada imamo:

$$k\le\frac{1}{x}<k+\frac{1}{2}\Rightarrow 2k\le\frac{2}{x}<2k+1\ ,$$

pa zaključujemo da je $\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor=2k=2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$, tj. $f(x)=0$. Analogno se dobije $f(x)=1$ za $x\in\left\langle\frac{1}{k+1},\frac{1}{2k+1}\right]$ pa je integral jednak redu

$$\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{6}\right)+\cdots=-1+2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots\right)\ .$$

Budući da je

$$\ln(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\ ,$$

uočavamo da je izraz u zagradi jednak $\ln 2$ pa je konačni rezultat jednak $\ln 4-1$.

Zadatak 2.

Pretpostavimo da je $A\subset\mathbb{R}$ neprazan konačan skup, da je $(c_a : a\in A)$ kolekcija realnih brojeva različitih od 0 i da je $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava

$$|f(x)|\le e^{-x^2}\quad\text{ i }\quad\sum_{a\in A}c_a\,f(x+a)=0\qquad\text{za svaki } x\in\mathbb{R}.$$

Dokažite da je $f(x)=0$ za svaki $x\in\mathbb{R}$.

Rješenje zadatka 2.

Neka je $A=\{a_0,a_1,a_2,\dots,a_m\}$, $a_0<a_1<a_2<\dots<a_m$. Uvjet $\sum_{a\in A}c_a\,f(x+a)\equiv 0$ je invarijantan na translaciju za fiksni broj i na množenje ne-nul skalarom pa možemo pretpostaviti da je 0 najmanji element skupa A i da je $c_0=-1$, tako da se taj uvjet može zapisati

$$f(x)=\sum_{j=1}^{m}c_{a_j}f(x+a_j)\quad\text{za svaki } x\in\mathbb{R}.$$

Primijenimo sada istu funkcijsku jednadžbu na svaki od brojeva $x + a_j$ umjesto x:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{j'=1}^{m} c_{a_j} c_{a_{j'}} f(x + a_j + a_{j'}) \,.$$

Ponavljanje tog postupka k puta daje

$$f(x) = \sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} \ldots \sum_{j_k=1}^{m} c_{a_{j_1}} c_{a_{j_2}} \ldots c_{a_{j_k}} f(x + a_{j_1} + a_{j_2} + \ldots + a_{j_k}) \,.$$

Ako označimo $c := \max\{|c_1|, \ldots, |c_m|\}$ i $a := \min\{a_1, \ldots, a_m\} > 0$, onda ocjena na $|f|$ daje

$$|f(x)| \leq m^k c^k e^{-(x+ka)^2}$$

čim je k dovoljno velik da bude $x + ka > 0$. Puštanjem $k \to \infty$ slijedi $f(x) = 0$.

Zadatak 3.

Neka je $n \geq 3$ cijeli broj. Definirajmo

$$S = \Big\{ k \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \,:\, \mathrm{M}(k, n) = \mathrm{M}(k+1, n) \Big\} \,,$$

pri čemu $\mathrm{M}(a, b)$ označava najveći zajednički djelitelj brojeva a i b.
Izračunajte ostatak koji $\prod_{k \in S} k$ daje pri dijeljenju s n.
(*Napomena*: $\prod_{k \in \emptyset} k := 1$.)

Rješenje zadatka 3.

Primijetimo da za svaki $k \in S$ vrijedi $\mathrm{M}(k, n) = \mathrm{M}(k+1, n) = 1$.

Za svaki $k \in S$ zbog $\mathrm{M}(k, n) = 1$ postoji jedinstveni $k' \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ takav da je $\mathrm{M}(k', n) = 1$ i $kk' \equiv 1 \pmod{n}$. Naime, relativno prosti ostaci modulo n čine multiplikativnu grupu. Kako je

$$k' + 1 \equiv k' + kk' \equiv k'(1 + k) \pmod{n} \,,$$

zaključujemo $\mathrm{M}(k' + 1, n) = 1$ pa je $k' \in S$. Nadalje,

$$(k - 1)(k' + 1) = kk' + k - k' - 1 \equiv k - k' \pmod{n}$$

pa ako je $k \neq 1$, onda je $k' \neq k$. Zbog $kk' \equiv 1 \pmod{n}$ je onda očigledno i $k' \neq 1$.

Dakle, brojevi iz $S \setminus \{1\}$ se mogu podijeliti u parove $\{k, k'\}$ takve da je $kk' \equiv 1 \pmod{n}$ pa zaključujemo

$$\prod_{k \in S} k \equiv 1 \pmod{n} \,.$$

Zadatak 4.

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni brojevi čiji zbroj je jednak 1. Za svaki prirodni broj k označimo

$$N_k = \mathrm{card} \left\{ \, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, 2^{-k} < a_i \leq 2^{-k+1} \right\} .$$

Dokažite da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{N_k}{2^k}} \;\leq\; \sqrt{\log_2 n} + \sqrt{2}\,.$$

Rješenje zadatka 4.

Najprije primijetimo da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k = n \qquad \text{i} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{2^k} < \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\,.$$

Fiksirajmo neki $m \in \mathbb{N}$ i primijenimo aritmetičko kvadratnu nejednakost na prvih m članova zbroja:

$$\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{N_k}{2^k}} \leq \sqrt{m}\sqrt{\sum_{k=1}^{m} \frac{N_k}{2^k}} \leq \sqrt{m}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{2^k}} < \sqrt{m}\,.$$

Zatim primijenimo Cauchy-Schwarz nejednakost na ostale članove zbroja:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \sqrt{\frac{N_k}{2^k}} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \sqrt{N_k}\sqrt{\frac{1}{2^k}} \leq \sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} N_k}\sqrt{\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} N_k}\sqrt{\frac{1}{2^m}} = \sqrt{\frac{n}{2^m}}\,.$$

Time smo dobili

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{N_k}{2^k}} < \sqrt{m} + \sqrt{\frac{n}{2^m}}$$

i preostaje uzeti $m = \lfloor \log_2 n \rfloor$ tako da desna ograda postane

$$\sqrt{\lfloor \log_2 n \rfloor} + \sqrt{\frac{n}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}} < \sqrt{\log_2 n} + \sqrt{\frac{n}{2^{\log_2 n - 1}}} = \sqrt{\log_2 n} + \sqrt{2}\,.$$

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNÍK

25. veljače 2012.

II. KATEGORIJA

Zadatak 1.

Neka su A i B realne matrice dimenzija 2012×2012 koje međusobno komutiraju takve da je $A^{2012} = B^{2012} = I$ (I je jedinična matrica). Dokaži da ako je $\operatorname{tr}(AB) = 2012$ tada je $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Zadatak 2.

Neka je G graf sa n vrhova i m bridova. Dokažite da G ima bipartitan podgraf sa barem $m/2$ bridova.

Zadatak 3.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, te $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq H(\Omega)$ niz holomorfnih funkcija na Ω koje konvergiraju lokalno uniformno prema funkciji f koja nije konstanta. Dokaži da za svaki $c \in \Omega$ postoji $N \in \mathbb{N}$ i niz $(c_n)_{n\geq N} \subseteq \Omega$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \quad \text{i} \quad f_n(c_n) = f(c), \text{ za sve } n \geq N.$$

Zadatak 4.

Za prsten R kažemo da je *poluprost* ukoliko za sve $a \in R \setminus \{0\}$ postoji $x \in R$ takav da je $axa \neq 0$. Neka je R poluprost prsten bez 2-torzije (tj. iz $2a = a + a = 0$ slijedi $a = 0$). Pretpostavimo da element $a \in R$ komutira sa svim svojim komutatorima $ax - xa$ ($x \in R$). Dokažite da tada a komutira sa svim elementima iz R.

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNÍK

25. veljače 2012.

Rješenja

II. KATEGORIJA

Zadatak 1.

Neka su A i B realne matrice dimenzija 2012×2012 koje međusobno komutiraju takve da je $A^{2012} = B^{2012} = I$ (I je jedinična matrica). Dokaži da ako je $\operatorname{tr}(AB) = 2012$ tada je $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Rješenje zadatka 1.

Iz uvjeta zadatka zaključujemo da je $(AB)^{2012} = I$, pa je $\sigma(AB) \subset \{z : |z| = 1\}$. Vrijedi

$$|\operatorname{tr}(AB)| = |\sum_{\lambda \in \sigma(AB)} \lambda| \leqslant \sum_{\lambda \in \sigma(AB)} |\lambda| = 2012,$$

a jednakost se postiže ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti od AB jednake nekoj vrijednost λ_0. Sada iz $2012 = \operatorname{tr}(AB) = 2012\lambda_0$ zaključujemo da je $\lambda_0 = 1$, tj. $\sigma(AB) = \{1\}$.

Budući da minimalni polinom $M(x)$ matrice AB mora dijeliti polinom $P(x) = x^{2012} - 1$, a jedina mu je nultočka 1 (jer je $\sigma(AB) = \{1\}$), zaključujemo da je $M(x) = x - 1$ iz čega slijedi $AB = I$, tj. $B = A^{-1}$.

Iz $A^{2012} = I$ je $\sigma(A) \subset \{z : |z| = 1\}$, tj. $\sigma(A) = \{1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, \lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}\}$ gdje su λ_i i $\overline{\lambda_i}$ kompleksno konjugirane vrijednosti i $|\lambda_i| = 1$.

Budući da je $\overline{\lambda_i} = \frac{1}{\lambda_i}$, slijedi da je $\sigma(A) = \sigma(A^{-1})$ iz čega slijedi da je $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^{-1}) = \operatorname{tr}(B)$.

Zadatak 2.

Neka je G graf sa n vrhova i m bridova. Dokažite da G ima bipartitan podgraf sa barem $m/2$ bridova.

Rješenje zadatka 2.

Označimo sa V skup vrhova, a sa E skup bridova. Odaberimo slučajan podskup $A \subseteq V$ na način da se u njemu svaki vrh nalazi sa vjerojatnošću $\frac{1}{2}$, neovisno od ostalih vrhova.

Nazovimo brid $\{x, y\}$ *presijecajućim* ako se točno jedan od njegovih vrhova nalazi u skupu A, te neka je X broj presijecajućih bridova. Tada je

$$X = \sum_{\{x,y\} \in E} X_{xy},$$

pri čemu je

$$X_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \{x, y\} \text{ presijecajući}, \\ 0, & \text{ako } \{x, y\} \text{ nije presijecajući}. \end{cases}$$

Očito je $\mathbb{E}[X_{xy}] = \frac{1}{2}$, pa je

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\{x,y\}\in E} \mathbb{E}[X_{xy}] = \frac{m}{2}.$$

Zbog očite nejednakosti $\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X]) > 0$, zaključujemo da postoji realizacija skupa A za koju postoji barem $m/2$ presijecajućih bridova, pa slijedi da podgraf sa traženim svojstvom postoji.

Zadatak 3.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup, te $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq H(\Omega)$ niz holomorfnih funkcija na Ω koje konvergiraju lokalno uniformno prema funkciji f koja nije konstanta. Dokaži da za svaki $c \in \Omega$ postoji $N \in \mathbb{N}$ i niz $(c_n)_{n\geq N} \subseteq \Omega$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \quad \text{i} \quad f_n(c_n) = f(c), \text{ za sve } n \geq N.$$

Rješenje zadatka 3.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $f(c) = 0$. Po pretpostavci je $f \not\equiv 0$, pa zbog izoliranosti nultočaka postoji otvoren disk D sa središtem u c takav da je $\overline{D} \subset \Omega$ i da f nema nultočaka na $\overline{D} \setminus \{c\}$.

Budući da niz $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergira uniformno na $\partial D \cup \{c\}$, postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_n(c)| < \min\{|f_n(z)| \colon z \in \partial D\}, \quad \text{za sve } n \geq N.$$

Zbog principa minimuma slijedi da za svaki $n \geq N$, funkcija f_n ima nultočku c_n u D.

Pretpostavimo da niz $(c_n)_{n\geq N}$ ne konvergira prema c. Tada postoji podniz $(c_{p_n})_{n\geq 1}$ koji konvergira prema nekoj točci $c' \in \overline{D} \setminus \{c\}$. Očito je $K = \{c'\} \cup \{c_{p_n} \colon n \geq 1\}$ kompaktan skup. Zbog neprekidnosti funkcije f, lokalno uniformne konvergencije niza $(f_{p_n})_{n\geq 1}$ i nejednakosti

$$|f_{p_n}(c_{p_n}) - f(c')| \leq |f(c') - f(c_{p_n})| + |f(c_{p_n}) - f_{p_n}(c_{p_n})| \leq |f(c') - f(c_{p_n})| + \sup_{z\in K} |f(z) - f_{p_n}(z)|,$$

zaključujemo da je

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_{p_n}(c_{p_n}) = f(c'),$$

što je u kontradikciji sa odabirom.

Zadatak 4.

Za prsten R kažemo da je *poluprost* ukoliko za sve $a \in R \setminus \{0\}$ postoji $x \in R$ takav da je $axa \neq 0$. Neka je R poluprost prsten bez 2-torzije (tj. iz $2a = a + a = 0$ slijedi $a = 0$). Pretpostavimo da element $a \in R$ komutira sa svim svojim komutatorima $ax - xa$ $(x \in R)$. Dokažite da tada a komutira sa svim elementima iz R.

Rješenje zadatka 4.

Definirajmo preslikavanje $d : R \to R$ s

$$d(x) := ax - xa.$$

Primijetimo da je d derivacija na R, tj. d zadovoljava Leibnizovo pravilo

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) \quad \text{za sve } x, y \in R.$$

Iz pretpostavke zadatka slijedi $d^2(x) = (d \circ d)(x) = 0$ za sve $x \in R$. S druge strane, budući da je d derivacija, za $x, y \in R$ imamo

$$d^2(xy) = d^2(x)y + 2d(x)d(y) + xd^2(y).$$

Budući da je $d^2 = 0$ i budući da R nema 2-torzije, dobivamo

$$d(x)d(y) = 0 \quad \text{za sve } x, y \in R. \tag{1}$$

Ukoliko u (1) uvrstimo $y := rx$ ($r \in R$), dobivamo

$$0 = d(x)d(rx) = d(x)(d(r)x + rd(x)) = d(x)rd(x),$$

odnosno $d(x)Rd(x) = \{0\}$. Napokon, kako je R poluprost, slijedi $d(x) = 0$, odnosno $ax = xa$ za sve $x \in R$.