IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI
JUNIORI
7. ožujka 2014.

Zadatak 1. Neka je n prirodan broj te P i Q realne $n \times n$ matrice takve da je $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ i $Pv + Qv \neq v$, za sve $n \times 1$ realne vektor-stupce $v \neq 0$. Dokaži da je $\mathrm{r}(P) = \mathrm{r}(Q)$.

Zadatak 2. Neka je $f : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija takva da je $f(0) = 0$ i $|f'(x)| \leq |f(x)|$, za svaki $x \in \langle 0,\, 1\rangle$. Dokaži da je f konstantna funkcija.

Zadatak 3. Samodopadan broj je prirodan broj koji je palindrom i čiji kvadrat je također palindrom.

1. Dokaži da je palindrom samodopadan ako i samo ako mu je suma kvadrata znamenaka (u dekadskom zapisu) manja od 10.
2. Koliko ima samodopadnih brojeva koji imaju točno 2014 znamenki (u dekadskom zapisu)?

(Prirodan broj je palindrom ako ima simetričan dekadski zapis, tj. jednako "se čita" s obje strane. Npr. 5 *i* 727 *su palindromi, dok* 1998 *i* 2014 *nisu.)*

Zadatak 4. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih realnih brojeva i za $N \in \mathbb{N}$ označimo

$$A(N) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Pretpostavimo da postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da za svaki realni $\gamma > 1$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} A\left(\lfloor \gamma^N \rfloor\right) = L.$$

Dokaži da je

$$\lim_{N\to\infty} A(N) = L.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI

SENIORI

7. ožujka 2014.

Zadatak 1. Neka je $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, pri čemu je D neka okolina zatvorenog diska $\bar{B}(0, 3)$. Pretpostavimo da je $f(\pm 1) = f(\pm i) = 0$. Dokaži da je

$$|f(0)| \leq \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)|.$$

Zadatak 2. Neka je n prirodan i p prost broj te $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. Za svaki $v \in V$, odredi kardinalitet skupa $\{A \in \mathrm{GL}(V) \ : \ Av = v\}$.
($GL(V)$ je skup svih regularnih operatora $A : V \to V$.)

Zadatak 3. Nađi sve trojke (p, q, r) prirodnih brojeva takvih da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \left(\sum_{k=1}^{n} k^q \right)^r.$$

Zadatak 4. Neka su k i d prirodni brojevi te $S \subset \mathbb{R}^d$ konačan skup. U prvoj minuti za točku kažemo da je zaražena ako i samo ako se nalazi u skupu S. Svake sljedeće minute, zarazit će se sve one točke koje leže na nekom pravcu paralelnom nekoj od osi na kojem je minutu prije postojalo barem k zaraženih točaka. Nađi najmanji mogući skup S za koji vrijedi da će se svaka točka u $\mathbb{R}^d$ prije ili kasnije zaraziti.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 240 minuta.