IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA
JUNIORI
7. ožujka 2014.

Zadatak 1. Neka je n prirodan broj te P i Q realne $n \times n$ matrice takve da je $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ i $Pv + Qv \neq v$, za sve $n \times 1$ realne vektor-stupce $v \neq 0$. Dokaži da je $\mathrm{r}(P) = \mathrm{r}(Q)$.

Rješenje. Iz uvjeta zadatka vidimo da je $(P + Q - I)(v) = 0$ ako i samo ako je $v = 0$ (ovdje je I jedinična $n \times n$ matrica), iz čega zaključujemo da je $P + Q - I$ regularna matrica. Dakle, matrica $P(P + Q - I)$ ima isti rang kao matrica P, dok matrica $(P + Q - I)Q$ ima isti rang kao matrica Q. No, vrijedi

$$P(P + Q - I) = P^2 + PQ - P = PQ = PQ + Q^2 - Q = (P + Q - I)Q,$$

iz čega konačno zaključujemo $\mathrm{r}(P) = \mathrm{r}(P(P + Q - I)) = \mathrm{r}((P + Q - I)Q) = \mathrm{r}(Q)$. ✓

Zadatak 2. Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija takva da je $f(0) = 0$ i $|f'(x)| \leq |f(x)|$, za svaki $x \in \langle 0, 1\rangle$. Dokaži da je f konstantna funkcija.

Rješenje. f je derivabilna, a time i neprekidna na $[0, 1]$ pa je i $|f|$ neprekidna na $[0, 1]$, odnosno, $|f|$ postiže maksimum na $[0, 1]$. Neka je $x_0 \in [0, 1]$ neka točka u kojoj $|f|$ postiže maksimum. Ako je $x_0 = 0$ gotovi smo, dakle, možemo pretpostaviti da je $x_0 > 0$. Prema teoremu srednje vrijednosti postoji $c \in \langle 0, x_0\rangle$ takav da je $|f(x_0) - f(0)| = |f'(c)| \cdot |x_0 - 0|$. Sada imamo da je

$$|f(x_0)| = x_0 |f'(c)| \leq x_0 |f(c)| \leq x_0 |f(x_0)|.$$

Vrijedi da je $0 < x_0 \leq 1$, ako je $x_0 < 1$ odmah vidimo da mora biti $f(x_0) = 0$ i gotovi smo, a ako je $x_0 = 1$, onda vidimo da je $|f(c)| = |f(x_0)|$ pa možemo staviti $x_0 = c$ i ponoviti isti postupak pa smo opet gotovi. ✓

Zadatak 3. Samodopadan broj je prirodan broj koji je palindrom i čiji kvadrat je također palindrom.

1. Dokaži da je palindrom samodopadan ako i samo ako mu je suma kvadrata znamenaka (u dekadskom zapisu) manja od 10.
2. Koliko ima samodopadnih brojeva koji imaju točno 2014 znamenki (u dekadskom zapisu)?

(Prirodan broj je palindrom ako ima simetričan dekadski zapis, tj. jednako "se čita" s obje strane. Npr. 5 *i* 727 *su palindromi, dok* 1998 *i* 2014 *nisu.)*

Rješenje.

1. Tvrdnja je očita za jednoznamenkaste brojeve. Neka je $m \in \mathbb{N}$ palindrom i neka ima $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ znamenki. Neka je $m = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 10^k$ njegov dekadski zapis. Znamo da za znamenke a_k vrijedi da je $a_{n-1-k} = a_k$. Računamo:

$$\begin{aligned} m^2 &= \sum_{k,l=0}^{n-1} a_k a_l \cdot 10^{k+l} = \sum_{j=0}^{2n-2} \left(\sum_{k+l=j} a_k a_l \right) \cdot 10^j = \\ &= \sum_{j=n}^{2n-2} \left(\sum_{k=j-n+1}^{n-1} a_k a_{j-k} \right) \cdot 10^j + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k} \right) \cdot 10^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k a_{j-k} \right) \cdot 10^j. \end{aligned}$$

Dalje sređujemo prvi sumand:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n}^{2n-2}\left(\sum_{k=j-n+1}^{n-1} a_k a_{j-k}\right)\cdot 10^j &= \sum_{j=0}^{n-2}\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_{n-1-k}a_{n-1-j-n+k}\right)\cdot 10^{n+j} = \\
&= \sum_{j=0}^{n-2}\left(\sum_{k=0}^{n-2-j} a_k a_{n-2-j-k}\right)\cdot 10^{n+j} = \\
&= \sum_{j=0}^{n-2}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k a_{j-k}\right)\cdot 10^{2n-2-j}.
\end{aligned}$$

Za $j = 0, 1, \ldots, n-1$ označimo $B_j = \sum\limits_{k=0}^{j} a_k a_{j-k}$, sada je

$$m^2 = \sum_{j=0}^{n-2} B_j \cdot 10^{2n-2-j} + B_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} B_j \cdot 10^j. \tag{$*$}$$

Iz $(*)$ odmah vidimo da ako je $B_j < 10$ za $j = 0, 1, \ldots, n-1$ da je m samodopadan. Primijetimo da je $B_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^2$ (pošto je $a_{n-1-k} = a_k$). Sada za $j = 0, 1, \ldots, n-1$ vidimo da je

$$B_j = \sum_{k=0}^{j} a_k a_{j-k} \leq \sum_{k=0}^{j} \frac{a_k^2 + a_{j-k}^2}{2} = \sum_{k=0}^{j} a_k^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = B_{n-1}.$$

Odnosno, palindrom m je samodopadan ako mu je suma kvadrata manja od 10. Pokažimo da vrijedi i obratno. Najprije tvrdimo da ako je m samodopadan da onda m^2 mora imati $2n-1$ znamenki (m ih ima n). Ukoliko je $10^{n-1} \leq m < 3\cdot 10^{n-1}$, jasno je da m^2 ima $2n-1$ znamenki. Sada promatramo slučajeve kada je $k\cdot 10^{n-1} \leq m < (k+1)\cdot 10^{n-1}$, gdje je $k = 3, 4, \ldots, 9$. Za slučaj $k = 3$, m^2 može imati i $2n-1$ i $2n$ znamenki, mi ćemo gledati samo slučaj u kojem ih ima $2n$, s ciljem dolaska do kontradikcije. Ukoliko je $k \geq 4$ jasno je da m^2 ima $2n$ znamenki. Želimo da je m^2 palindrom, što specijalno znači da mora imati jednake prvu i zadnju znamenku. Zadnja znamenka će mu u odgovarajućem slučaju biti jednaka onoj kojom završava broj k^2 (Zato jer m počinje, a time i završava, znamenkom k.), dok ćemo mogućnosti za prvu znamenku odrediti iz nejednakosti $k^2\cdot 10^{2n-2} \leq m^2 < (k+1)^2\cdot 10^{2n-2}$. U sljedećoj tablici ćemo vidjeti da je nemoguće da se prva i zadnja znamenka podudaraju ukoliko m^2 ima $2n$ znamenki. Dakle, ako

k	3	4	5	6	7	8	9
zadnja znamenka	9	6	5	6	9	4	1
mogućnosti za prvu znamenku	1	1, 2	2, 3	3, 4	4, 5, 6	6, 7, 8	8, 9

je m samodopadan onda m^2 ima $2n-1$ znamenki, to znači da vrijedi da je $m^2 = \sum\limits_{j=0}^{2n-2} b_j\cdot 10^j$, pri čemu za znamenke b_j vrijedi $b_{2n-2-j} = b_j$. Zato možemo pisati:

$$m^2 = \sum_{j=0}^{n-2} b_j \cdot 10^{2n-2-j} + b_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} b_j \cdot 10^j. \tag{$**$}$$

Znamo da m^2 ima $2n-1$ znamenki, zato mora biti $B_0 < 10$, što vidimo iz prve sume u $(*)$. Uspoređujući $(*)$ i $(**)$ (zadnju znamenku broja m^2) vidimo da onda mora biti $B_0 = b_0$. No, to onda znači da mora biti $B_1 < 10$, što vidimo uspoređujući $(*)$ i $(**)$ (prvu znamenku broja m^2). Dakle, zaključujemo da je $B_1 = b_1$. Nastavljamo dalje istim postupkom te na kraju zaključimo i da je $B_{n-1} = b_{n-1}$. Dakle, palindrom m je samodopadan ako i samo ako mu je suma kvadrata znamenki manja od 10.

2. Primijetimo da ako samodopadan broj m ima više od jedne znamenke da onda ima barem dvije znamenke različite od 0, što znači da može sadržavati samo znamenke 0, 1 i 2. Moramo prebrojati koliko ima samodopadnih brojeva s točno 2014 znamenki. Jasno je da je svaki takav broj jedinstveno određen sa svojih prvih 1007 znamenaka, također, suma kvadrata tih prvih 1007 znamenaka mora biti manja od 5. Dakle, na prvih 1007 mjesta mogu biti jedna, dvije, tri, četiri jedinice ili samo jedna dvojka te sve ostalo 0. Ako je samo jedna jedinica to nam daje samo jednu mogućnost (mora biti na prvom mjestu), ako su dvije to nam daje $\binom{1006}{1}$ mogućnosti, jedna mora biti na prvom mjestu, a druga na nekom od preostalih 1006 mjesta. Slično za tri i četiri jedinice dobivamo $\binom{1006}{2}$, odnosno $\binom{1006}{3}$ mogućnosti. Ukoliko je samo jedna dvojka, ona mora biti na prvom mjestu pa je to još jedna mogućnost. Konačno, samodopadnih brojeva koji imaju točno 2014 znamenki ima $1008 + \dbinom{1006}{2} + \dbinom{1006}{3}$. ✓

Zadatak 4. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nenegativnih realnih brojeva i za $N \in \mathbb{N}$ označimo

$$A(N) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Pretpostavimo da postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da za svaki realni $\gamma > 1$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} A\left(\lfloor \gamma^N \rfloor\right) = L.$$

Dokaži da je

$$\lim_{N\to\infty} A(N) = L.$$

Rješenje. Za $\gamma > 1$ i $N \in \mathbb{N}$ neka je M jedinstveni nenegativni cijeli broj (koji ovisi o γ i N) takav da je

$$\gamma^M \leq N < \gamma^{M+1}.$$

Zbog nenegativnosti niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ imamo

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \gamma^M \rfloor} a_n \;\leq\; \sum_{n=1}^{N} a_n \;\leq\; \sum_{n=1}^{\lfloor \gamma^{M+1} \rfloor} a_n.$$

Znamo da je $\dfrac{1}{\gamma^{M+1}} < \dfrac{1}{N} \leq \dfrac{1}{\gamma^M}$, također je $0 \leq \dfrac{\gamma^M - 1}{\lfloor \gamma^M \rfloor} < 1$ i $\dfrac{\gamma^{M+1}}{\lfloor \gamma^{M+1} \rfloor} \geq 1$ pa dobivamo:

$$\frac{\gamma^M - 1}{\lfloor \gamma^M \rfloor} \cdot \frac{1}{\gamma^{M+1}} \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor \gamma^M \rfloor} a_n \;<\; \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\lfloor \gamma^M \rfloor} a_n \;\leq\; \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n \;\leq\; \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\lfloor \gamma^{M+1} \rfloor} a_n \;\leq\; \frac{1}{\gamma^M} \cdot \frac{\gamma^{M+1}}{\lfloor \gamma^{M+1} \rfloor} \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor \gamma^{M+1} \rfloor} a_n,$$

odnosno

$$\frac{\gamma^M - 1}{\gamma^{M+1}} A(\lfloor \gamma^M \rfloor) \;<\; A(N) \;\leq\; \gamma A(\lfloor \gamma^{M+1} \rfloor).$$

Fiksirajmo γ te pustimo $N \to \infty$, primijetimo da tada ide i $M \to \infty$ pa dobivamo

$$\gamma^{-1} L \leq \liminf_{N\to\infty} A(N) \leq \limsup_{N\to\infty} A(N) \leq \gamma L.$$

Prelaskom na limes kada $\gamma \to 1$ konačno imamo:

$$\liminf_{N\to\infty} A(N) = \limsup_{N\to\infty} A(N) = L.$$

✓

Napomena. Aleksandar Bulj i Borna Vukorepa su pokazali da tvrdnja vrijedi čak za sasvim proizvoljan niz $(A(N))_{N=1}^{\infty}$, tj. nije potrebno koristiti pretpostavku o njegovom posebnom obliku. Detaljno rješenje se može naći u npr. u knjizi *Gelca, Andreescu - Putnam and Beyond*, zadatak 350. ✓

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA
SENIORI
7. ožujka 2014.

Zadatak 1. Neka je $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, pri čemu je D neka okolina zatvorenog diska $\bar{B}(0, 3)$. Pretpostavimo da je $f(\pm 1) = f(\pm i) = 0$. Dokaži da je

$$|f(0)| \leq \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)|.$$

Rješenje. ± 1 i $\pm i$ su jednostruke nultočke funkcije $z \mapsto z^4 - 1$, zbog toga je sa $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^4 - 1}$ definirana holomorfna funkcija na D. Iz Cauchyjeve integralne formule zaključujemo da je

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=3} \frac{g(z)}{z} dz.$$

Uzimanjem apsolutne vrijednosti, korištenjem standardne ocjene za apsolutnu vrijednost integrala te nejednakosti trokuta ($|z^4 - 1| \geq |z^4| - 1$), dobivamo

$$|f(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|z|=3} \frac{f(z)}{z(z^4 - 1)} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 6\pi \cdot \frac{\max_{|z|=3} |f(z)|}{3 \cdot (3^4 - 1)} = \frac{1}{80} \max_{|z|=3} |f(z)|.$$

✓

Zadatak 2. Neka je n prirodan i p prost broj te $V = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. Za svaki $v \in V$, odredi kardinalitet skupa $\{A \in \mathrm{GL}(V) \,:\, Av = v\}$.
($\mathrm{GL}(V)$ je skup svih regularnih operatora $A : V \to V$.)

Rješenje. Vektorski prostor V promatramo kao prostor $n \times 1$ vektor-stupaca, a $G = \mathrm{GL}(V)$ kao grupu regularnih $n \times n$ matrica s elementima iz polja $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Grupa G tada djeluje na skup V na prirodan način. Za svaki $v \in V$ neka je $G_v = \{A \in G \,:\, Av = v\}$, to je zapravo stabilizator od v pri promatranom djelovanju. Naš je zadatak odrediti $|G_v|$. Najprije, očito je da je $G_0 = G$ pa prvo moramo odrediti $|G|$. Neka je $A \in G$. Prvi redak matrice A možemo odabrati na $p^n - 1$ načina (sve osim 0-retka dolazi u obzir). Drugi redak matrice A možemo izabrati na $p^n - p$ načina (sve osim redaka kolinearnih s prvim retkom). Treći redak biramo na $p^n - p^2$ načina, sve kombinacije bez linearnih kombinacija prethodnih redaka. Isto nastavljamo sve do n–tog retka koji možemo izabrati na $p^n - p^{n-1}$ načina. Dakle,

$$|G_0| = |G| = \prod_{k=0}^{n-1} \left(p^n - p^k\right).$$

Neka je $v \in V$, $v \neq 0$, tvrdimo da je orbita od v jednaka $V \setminus \{0\}$. Jasno je da je $Av \neq 0$, za svaki $A \in G$, pošto su sve takve matrice regularne. Nadalje, za $w \in V$, $w \neq 0$, nadopunimo $\{v\}$ i $\{w\}$ do dvije baze za V, B_v i B_w, redom. Tada postoji matrica $A \in G$ prijelaza između baza B_v i B_w takva da je $Av = w$. Dakle, V se raspada na dvije orbite pri promatranom djelovanju, $V = \{0\} \cup (V \setminus \{0\})$. Sada za bilo koji $v \in V$, $v \neq 0$ znamo da vrijedi $|V| = (G : G_0) + (G : G_v)$. Znamo da je $|V| = p^n$ i $(G : G_0) = 1$ pa zaključujemo da je $(G : G_v) = p^n - 1$. Konačno, vidimo da je $|G_v| = \prod_{k=1}^{n-1} \left(p^n - p^k\right)$.

✓

Zadatak 3. Nađi sve trojke $(p,\, q,\, r)$ prirodnih brojeva takvih da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \left(\sum_{k=1}^{n} k^q\right)^r.$$

Rješenje. Prije svega, uočimo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{(q+1)r}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^q\right)^r = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^q\right)^r = \left(\int_0^1 x^q\, dx\right)^r = \frac{1}{(q+1)^r}.$$

Uz pretpostavku da jednakost iz teksta zadatka vrijedi, sada imamo

$$\frac{1}{p+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{(p+1)-(q+1)r}} \cdot \frac{1}{n^{(q+1)r}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^q\right)^r = \frac{1}{(q+1)^r} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{(p+1)-(q+1)r}},$$

odakle slijedi da je nužno $p + 1 = (q + 1)r$ i $p + 1 = (q + 1)^r$. Trivijalno rješenje ovog sustava je $p = q = m, r = 1$ za prirodan broj m i ovo rješenje očito zadovoljava jednakost iz teksta zadatka. Jedino preostalo rješenje sustava je $p = 3, q = 1, r = 2$, a da ono također zadovoljava jednakost iz teksta zadatka trivijalno se provjeri npr. matematičkom indukcijom. ✓

Zadatak 4. Neka su k i d prirodni brojevi te $S \subset \mathbb{R}^d$ konačan skup. U prvoj minuti za točku kažemo da je zaražena ako i samo ako se nalazi u skupu S. Svake sljedeće minute, zarazit će se sve one točke koje leže na nekom pravcu paralelnom nekoj od osi na kojem je minutu prije postojalo barem k zaraženih točaka. Nađi najmanji mogući skup S za koji vrijedi da će se svaka točka u $\mathbb{R}^d$ prije ili kasnije zaraziti.

Rješenje. Očito je da će se za $S = \{1, 2, \ldots, k\}^d$ svaka točka prije ili kasnije zaraziti. Dokažimo da za svaki $S \subset \mathbb{R}^d$ takav da je $|S| < k^d$ postoji točka koja će ostati nezaražena.

Ključno je uočiti iz pravila o zaraživanju da bi polinomi mogli biti od koristi. Strategija je sljedeća. Ako je skup S malen, tada je moguće odabrati nenul-polinom malog stupnja koji na njemu iščezava. Takav polinom nije identički jednak 0 na $\mathbb{R}^d$. Štoviše, ako taj polinom odaberemo na način da restringirano na svaku varijablu dobivamo polinom stupnja manjeg od k, slijedit će da je skup točaka koje se će se prije ili kasnije zaraziti sadržan u skupu nultočaka polinoma, odakle će slijediti kontradikcija.

Provedimo sada detaljno ovu strategiju. Pretpostavimo da je $|S| < k^d$ i neka je $V \leq \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d]$ vektorski prostor polinoma u d varijabli sa realnim koeficijentima koji su restringirani na svaku varijablu polinomi stupnja manjeg od k (dakle, linearne kombinacije monoma $X_1^{i_1} \ldots X_d^{i_d}$ za $0 \leq i_1, \ldots, i_d \leq k-1$). Očito je $\dim V = k^d$, pa linearno preslikavanje $L\colon V \to \mathbb{R}^{|S|}$ definirano sa

$$L(p(X_1, \ldots, X_d)) = (p(s))_{s\in S}$$

ima netrivijalnu jezgru, pa neka je $f(X_1, \ldots, X_d)$ njen element različit od nul-polinoma. Dokažimo da pripadna polinomijalna funkcija $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nije identički jednaka 0.[1]

Lema. Neka je $p(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ nenul-polinom. Tada pripadna polinomijalna funkcija $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nije identički jednaka 0.

Dokaz leme. Ako je $n = 1$, radi se poznatoj tvrdnji (broj nultočaka nenul-polinoma manji je ili jednak stupnju polinoma). Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve polinome u $n-1$ varijabli,

[1] Prisjetite se da ova *očita* tvrdnja nije istinita u slučaju konačnih polja, npr. polinomijalna funkcija $x \mapsto x^p - x$ je u polju $\mathbb{F}_p$ zbog malog Fermatovog teorema identički jednaka 0.

te neka je $p(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ ne-nul polinom. Promatrimo p kao polinom u varijabli X_1 sa koeficijentima u prstenu $\mathbb{R}[X_2, \ldots, X_n]$. Kako smo pretpostavili da p nije trivijalan, barem jedan od ovih koeficijenata nije nul-polinom, pa po pretpostavci postoje $x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ takvi da $p(X_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[X_1]$ nije nul-polinom. No sada imamo polinom u jednoj varijabli, pa je moguće odabrati i $x_1 \in \mathbb{R}$ takav da je $p(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. $\square$

Preostaje jednostavnom indukcijom dokazati da je svaka točka koja će se u nekom trenutku zaraziti nužno nultočka funkcije f. Za točke koje su zaražene u prvoj minuti tvrdnja vrijedi iz same konstrukcije funkcije f. Neka je x točka koja se zarazi u minuti $n \geq 2$, te pretpostavimo da su sve točke koje se zaraze u minuti $n-1$ nužno nultočke funkcije f. Tada postoji pravac paralelan nekoj od osi na kojem se nalazi k već zaraženih točaka, pa po pretpostavci indukcije, funkcija f restringirana na ovaj pravac je polinom stupnja manjeg od k sa k nultočaka. Slijedi da mora biti identički jednaka nuli, pa onda posebno i u točki x. Odavde slijedi da mora postojati točka koja će ostati nezaražena. ✓