IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI
JUNIORI
27. veljače 2015.

Zadatak 1. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ monotona funkcija i neka je $a_0 \in \mathbb{R}$. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran je rekurzivno formulom

$$a_n = f\left(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokažite da limesi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ postoje (konačni ili beskonačni) te da su jednaki.

Zadatak 2. Neka je $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ realna 3×3 matrica za koju vrijedi $-1 \leq a_{i,j} \leq 1$, za sve i, j. Odredite maksimalnu vrijednost od $\det A$.

Zadatak 3. Za dani pozitivan realan broj x definiramo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurzivno na sljedeći način: $a_0 = 0$ i

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ako je } \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{n} \leq x; \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredi sve pozitivne realne x za koje pripadni niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ima beskonačno mnogo članova različitih od nule.

Zadatak 4. Pretpostavimo da polinom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(a_n \neq 0)$ ima realne koeficijente i samo realne nultočke. Dokažite da vrijedi

$$\left(\frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\right)^2 \geq \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \frac{a_{k+2}}{\binom{n}{k+2}}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$.

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI

SENIORI

27. veljače 2015.

Zadatak 1. Neka su c_0, c_1, c_2, $\ldots$, c_{2015} realni brojevi, $c_{2015} \neq 0$, i neka je

$$f(x,\, y) = \sum_{k=0}^{2015} c_k \frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{k+1}.$$

Ako postoje različiti realni brojevi a, b i c takvi da je $f(a,\, b) = f(b,\, c) = 0$, dokažite da polinom $P(x) = c_{2015}x^{2015} + c_{2014}x^{2014} + \ldots + c_1 x + c_0$ ima barem 3 (brojeći kratnosti) realne nultočke.

Zadatak 2. Dokažite da je matrica

$$\mathbf{A} = \left(\frac{1}{i+j}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

pozitivno definitivna. Tj. dokažite da je $\langle \mathbf{A}x, x\rangle > 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Zadatak 3. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jedinični vektori u nekom unitarnom prostoru koji imaju svojstvo da su među svaka tri od njih neka dva ortogonalna. Dokažite da za te vektore vrijedi

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \le 2n^{3/4}.$$

Zadatak 4. Neka je K konveksan i kompaktan skup s nepraznom unutrašnjosti u euklidskom prostoru dimenzije d. Dokažite da se u njegovoj unutrašnjosti može odabrati točka T takva da za svaku tetivu $\overline{AB}$ od K kroz točku T vrijedi $\frac{1}{d} \le \frac{|AT|}{|BT|} \le d$.
*(**Tetiva** od K je dužina čiji krajevi leže na rubu od K, a sve međutočke se nalaze u unutrašnjosti od K.)*
*(Dokaz tvrdnje zadatka za euklidski prostor $\mathbb{R}^2$ vrijedi **8 bodova**!)*

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 240 minuta.