IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI

JUNIORI

04. 03. 2016.

Zadatak 1. Označimo sa $[[x]]$ udaljenost realnog broja x od najbližeg cijelog broja. Izračunajte:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\!\left[(1+\sqrt{2})^n\right]\!\right]$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\!\left[n!e\right]\!\right]}{n!}$.

Zadatak 2. Za svaki prirodni broj n dani su realni brojevi, $0 \leq a_n < b_n \leq 1$, takvi da je $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) > 2016$. Odredite najveći prirodan broj M takav da među skupovima $[a_n, b_n]$ sigurno postoji njih M čiji je presjek neprazan.

Zadatak 3. Neka je n prirodan broj i A antisimetrična $n \times n$ matrica s cjelobrojnim koeficijentima. Dokažite da je $\det A$ potpun kvadrat.

Zadatak 4. Aco se sprema na posjet Apsurdistanu i primijetio je sljedeće:

1. Apsurdistan se sastoji od 1024 grada, čija su imena brojevi od 0 do 1023,
2. Gradovi m i n su povezani cestom ako i samo ako se binarni zapisi brojeva m i n razlikuju u točno jednoj znamenci,
3. U vremenu kada Aco planira svoj posjet u Apsurdistanu će biti zatvoreno 8 cesta radi održavanja.

Dokažite da Aco može isplanirati put Apsurdistanom takav da putuje cestama koje rade, svaki grad posjeti točno jednom i da se na kraju vrati u grad iz kojega je krenuo.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 240 minuta.

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI

SENIORI

04. 03. 2016.

Zadatak 1. Izračunajte:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$ (b) $\displaystyle I(a) = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x,$ za $a \in \langle 0, \infty\rangle$.

Zadatak 2.

(a) Neka je V konačno dimenzionalan vektorski prostor i neka su V_1 i V_2 njegovi potprostori. Neka je $A \in L(V)$ takav da je $A(V_1) \subseteq V_2$ i $A(V_2) \subseteq V_1$. Dokažite da je $Tr(A|_{V_1 \cap V_2}) = Tr(A|_{V_1+V_2})$.

(b) Neka je V konačno dimenzionalan vektorski prostor i neka su V_1, V_2 i V_3 njegovi potprostori. Neka je $A \in L(V)$ takav da je $A(V_1) \subseteq V_2$, $A(V_2) \subseteq V_3$ i $A(V_3) \subseteq V_1$. Pokažite da ne mora nužno biti $Tr(A|_{V_1 \cap V_2 \cap V_3}) = Tr(A|_{V_1+V_2+V_3})$.

Zadatak 3. Ako su $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ i $m \in \mathbb{N}_0$, dokažite da se funkcija g definirana formulom

$$g(x) := \frac{f(x) - \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0)x^j/j!}{x^{m+1}} \quad \text{za } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

može proširiti do funkcije iz $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Zadatak 4. Neka je dan jednostavni neusmjereni graf s $n \in \mathbb{N}$ vrhova i $m \in \mathbb{N}_0$ bridova te označimo $d = 2m/n$. (Dakle, d je prosječni stupanj vrha u grafu.) Pokažite da se za svaki $s \in \mathbb{N}_0$ na tom grafu može izvesti barem nd^s različitih šetnji duljine s.
Dokaz tvrdnje u slučaju $s \leq 2$ vrijedi 2 boda.
(Šetnja duljine s je uređena $(s+1)$-torka (ne nužno različitih) vrhova grafa $(v_0, v_1, \ldots, v_s)$ takva da su vrhovi v_{j-1} i v_j spojeni bridom za $j = 1, 2, \ldots, s$. U slučaju $d = 0 = s$ izraz d^s interpretiramo kao 1.)

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 240 minuta.