IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA

JUNIORI

23. 03. 2018.

Zadatak 1. Postoji li familija neprekidnih funkcija $\{f_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \alpha \in \mathbb{R}\}$ koja zadovoljava sljedeće uvjete:

- za sve međusobno različite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ grafovi funkcija f_α i f_β sijeku se u točno tri točke; i
- za sve međusobno različite $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ grafovi funkcija f_α, f_β i f_γ imaju točno dvije zajedničke točke?

Rješenje. Da. Neka je $\phi : \mathbb{R} \to (0,1)$ bijekcija. Tada za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ definirajmo funkciju

$$f_\alpha = \begin{cases} \frac{x}{\phi(\alpha)} & 0 \le x \le \phi(\alpha) \\ \frac{x-1}{\phi(\alpha)-1} & \phi(\alpha) \le x \le 1 \end{cases}$$

Za $\alpha \ne \beta$, $\phi(\alpha) < \phi(\beta)$ lako se vidi da su sjecišta grafova od f_α i f_β točke

$$(0,0), (1,0) \text{ i } \left(\frac{\phi(\beta)}{\phi(\beta)-\phi(\alpha)+1}, \frac{1}{\phi(\beta)-\phi(\alpha)+1}\right).$$

Jer je $\left(\frac{\phi(\gamma)}{\phi(\gamma)-\phi(\alpha)+1}, \frac{1}{\phi(\gamma)-\phi(\alpha)+1}\right)$ točka u kojoj se sijeku grafovi od f_α i f_γ, kada bi ta točka ležala i na grafu od f_β moralo bi biti $\left(\frac{\phi(\beta)}{\phi(\beta)-\phi(\alpha)+1}, \frac{1}{\phi(\beta)-\phi(\alpha)+1}\right) = \left(\frac{\phi(\gamma)}{\phi(\gamma)-\phi(\alpha)+1}, \frac{1}{\phi(\gamma)-\phi(\alpha)+1}\right)$, pa uspoređujući y koordinate imamo $\phi(\beta) = \phi(\gamma) \iff \beta = \gamma$, što je kontradikcija, pa su jedine točke na grafovima od sve tri funkcije $(0,0)$ i $(1,0)$. ✓

Zadatak 2. Neka $M_n(\mathbb{R})$ skup realnih $n \times n$ matrica. Nađite sve surjektivne funkcije

$$f \colon M_n(\mathbb{R}) \to \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

takve da vrijedi

$$f(XY) \le \min\{f(X), f(Y)\}\,,$$

za sve $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$.

Rješenje. Sa $r(X)$ označavati ćemo rang matrice X, te ćemo pokazati ćemo da je jedino rješenje $f(X) = r(X)$. Uvrstimo li $Y = I_n$ slijedi $f(X) \le f(I_n)$, $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$. Za $X \in GL_n(\mathbb{R})$ i $Y = X^{-1}$ slijedi $f(I_n) \le f(X)$ pa je $f(X) = f(I_n)$, $\forall X \in GL_n(\mathbb{R})$. Za $X \in GL_n(\mathbb{R})$ i $Y \in M_n(\mathbb{R})$ imamo $f(Y) = f(X^{-1}XY) \le f(XY) \le f(Y)$, $f(Y) = f(YXX^{-1}) \le f(YX) \le f(Y)$. Stoga vrijedi $f(XY) = f(YX) = f(Y)$, $\forall X \in GL_n(\mathbb{R})$ i $Y \in M_n(\mathbb{R})$. Za $k = 0, 1, \ldots, n$, stavimo

$$J_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vrijedi da za svaku matricu $Y \in M_n(\mathbb{R})$ postoje $X, Z \in GL_n(\mathbb{R})$ tako da je $Y = XJ_kZ$, gdje je $k = r(Y)$. Iz prethodne diskusije slijedi da je $f(Y) = f(J_k)$. Preostaje odrediti vrijednosti funkcije f na matricama $J_0, J_1, \ldots J_n$. Jer je $J_k = J_k \cdot J_{k+1}$, slijedi da je $f(J_k) \le f(J_{k+1})$ za $0 \le k \le n-1$. Iz surjektivnosti funkcije f slijedi da je $f(J_k) = k$ za $0 \le k \le n$ pa je $f(Y) = r(Y)$, $\forall Y \in M_n(\mathbb{R})$. ✓

Zadatak 3. Neka je ϕ Eulerova funkcija. Nađite sve prirodne brojeve n takve da jednadžba

$$\phi\left(\ldots\left(\phi(x)\right)\right)=n,$$

gdje se funkcija ϕ pojavljuje k puta, ima rješenja za svaki prirodni broj k.

Rješenje. Reformulirajmo problem na sljedeći način: nađimo sve beskonačne nizove $a_n, n \geq 0$, koji zadovoljavaju $\phi(a_n) = a_{n-1}$. Ako x nije potencija od 2, tada je $v_2(\phi(x)) \geq v_2(x)$. $v_2(\phi(x)) > v_2(x)$ osim ako je x oblika $2^a \cdot p^b$, gdje je $p \equiv 3 \pmod 4$. Osim ako je $p = 3$ ili $b = 1$, $v_2(\phi(\phi(x))) > v_2(x)$. Ako je $\phi(x)$ djeljiv sa neparnim prostim brojem, x je također djeljiv s neparnim (moguće i različitim) prostim brojem.
Dakle, ako je $n_0 \in \mathbb{N}$ najmanji prirodan broj takav da a_{n_0} nije potencija od 2 (ako takav postoji), svi prethodni članovi niza jesu i za $i \geq n_0$ vrijedi $v_2(a_i)$ je padajuć niz, pa je od nekog člana konstantan. Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_1$ niz $v_2(a_n)$ konstantan. Slijedi da su ti članovi niza oblika $2^a \cdot 3^b$ ili $2^a \cdot p,\ \ p > 3$ i $p \equiv 3 \pmod 4$. U drugom slučaju, niz mora biti

$$2^a \cdot p,\ \ 2^a \cdot (2p+1),\ \ 2^a \cdot 2^a \cdot (4p+3),\ \ 2^a \cdot (8p+7), \ldots$$

gdje su p, $2p+1$, $4p+3$, $8p+7$, ... svi prosti. Član na $p-$tom mjestu će biti $2^{p-1}(p+1) - 1 \equiv p + 1 - 1 \equiv 0 \pmod p$, dakle nije prost. Slijedi da se taj slučaj ne može dogoditi.
Dakle, mogući nizovi su:

1. $a_n = 2^n$;
2. za svaki k, $a_n = 2^n$ ako $n < k$, a $a_n = 2^k \cdot 3^{n-k}$, ako $n \geq k$.

Posebno, rješenje zadatka u originalnom obliku je: svi brojevi oblika $2^a \cdot 3^b$, osim 3. ✓

Zadatak 4. Označimo $\mathbb{Q}^+ := \mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty\rangle$ i $S := \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$.

(a) Dokažite da jednadžba $x^y = y^x$ ima beskonačno mnogo rješenja $(x, y) \in S$ takvih da je $x \neq y$.

(b) Dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ jednadžba $x^y = y^x$ ima konačno mnogo rješenja $(x, y) \in S$ takvih da je $|x - y| \geq \varepsilon$.

Rješenje. Naći ćemo sva racionalna rješenja jednadžbe $x^y = y^x$ takva da je $x \neq y$; radi simetrije je dovoljno promatrati slučaj $x < y$. U jednadžbu uvrstimo $y = kx$, $k > 1$ te je tako transformiramo u

$$(x^k)^x = (kx)^x \quad \text{tj. } x^k = kx, \quad \text{tj. } x^{k-1} = k,$$

odakle zaključujemo da je općenito rješenje jednadžbe $x^y = y^x$ u pozitivnim brojevima $x < y$ dano sa

$$(x, y) = \left(k^{\frac{1}{k-1}}, k^{\frac{k}{k-1}}\right) \quad \text{za } k > 1.$$

Ako su $x, y \in \mathbb{Q}^+$, tada je i $k \in \mathbb{Q}^+$ pa zapišimo $\frac{1}{k-1} = \frac{p}{q}$ za neke relativno proste $p, q \in \mathbb{N}$. Općenito rješenje je sada oblika

$$(x, y) = \left(\left(\frac{p+q}{p}\right)^{p/q}, \left(\frac{p+q}{p}\right)^{(p+q)/q}\right).$$

Kako su $p + q$ i p također relativno prosti, iz $\left(\frac{p+q}{p}\right)^p = x^q$ slijedi da su $p + q$ i p oba potpune q-te potencije. Ako je $q > 1$ i ako stavimo $p = n^q$ za neki $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$n^q < p + q < (n+1)^q = n^q + qn^{q-1} + \cdots + 1,$$

što vodi na kontradikciju s činjenicom da je $p+q$ potpuna q-ta potencija. Slijedi da mora biti $q = 1$, tj. sva pozitivna racionalna rješenja jednadžbe $x^y = y^x$ takva da je $x < y$ moraju biti oblika

$$(x_p, y_p) = \left(\left(1+\frac{1}{p}\right)^p, \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}\right) \quad \text{za } p \in \mathbb{N}.$$

Ovom formulom dano je beskonačno mnogo rješenja (x_p, y_p) jednadžbe $x^y = y^x$, jer su brojevi $x_p = \left(1+\frac{1}{p}\right)^p$, $p \in \mathbb{N}$ međusobno različiti. Naime, to je strogo rastući niz koji konvergira prema broju e. Nadalje, fiksirajmo $\varepsilon > 0$ te primijetimo

$$|y_p - x_p| = \frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p \leq \frac{e}{p}.$$

Nejednakost $|y_p - x_p| \geq \varepsilon$ može biti ispunjena samo za $p \leq e/\varepsilon$, što je samo konačno mnogo vrijednosti. ✓

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA
SENIORI
23. 03. 2018.

Zadatak 1. Postoji li neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja poprima svaku vrijednost točno dvaput?

Rješenje. Pretpostavimo da takva funkcija postoji. Neka su $a, a' \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < a'$. Jer f poprima svaku vrijednost točno dvaput i jer f ima svojstvo međuvrijednosti, slijedi da je $f(x) < f(a)$ ili $f(x) > f(a)$, $\forall x \in (a, a')$. Pretpostavimo da je $f(x) < f(a), \forall x \in (a, a')$ i neka je $b \in [a, a']$ takav da je $f(b) = \min_{x\in[a,a']} f(x)$. Pretpostavimo da f postiže minimum na segmentu $[a, a']$ samo u točki b. Jer je $f(b) < f(a)$ slijedi $b \in (a, a')$. Iz pretpostavke zadatka slijedi da postoji b' takav da je $f(b) = f(b')$ i $b \notin [a, a']$. Neka je BSO $b' > a'$. Fiksirajmo $y \in (f(b), f(a)$. Jer je $f(a) = f(a') > f(b) = f(b')$, postoje $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (b, a')$ i $x_3 \in (a', b')$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y$, što je kontradikcija. Pretpostavimo sada da postoje $b_1 < b_2 \in [a, a']$ takvi da je $f(b_1) = f(b_2) = \min_{x\in[a,a']} f(x)$. Jer je $f(x) < f(a)\forall x \in (a, a')$, slijedi $b_1, b_2 \in (a, a')$. Fiksirajmo $b \in (b_1, b_2)$ i stavimo $y = f(b)$. Imamo $f(b_1) < y < f(a)$ i $f(b_2) < y < f(a')$, pa postoje $x_1 \in (a, b_1)$ i $x_2 \in (b_2, a')$ takvi da je $f(x_1) = f(x_2) = y = f(b)$, što je kontradikcija. ✓

Zadatak 2. Neka $M_n(\mathbb{R})$ skup realnih $n \times n$ matrica. Nađite sve surjektivne funkcije

$$f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

takve da vrijedi

$$f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\},$$

za sve $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$.

Rješenje. Sa $r(X)$ označavati ćemo rang matrice X, te ćemo pokazati ćemo da je jedino rješenje $f(X) = r(X)$. Uvrstimo li $Y = I_n$ slijedi $f(X) \leq f(I_n)$, $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$. Za $X \in GL_n(\mathbb{R})$ i $Y = X^{-1}$ slijedi $f(I_n) \leq f(X)$ pa je $f(X) = f(I_n)$, $\forall X \in GL_n(\mathbb{R})$. Za $X \in GL_n(\mathbb{R})$ i $Y \in M_n(\mathbb{R})$ imamo $f(Y) = f(X^{-1}XY) \leq f(XY) \leq f(Y)$, $f(Y) = f(YXX^{-1}) \leq f(YX) \leq f(Y)$. Stoga vrijedi $f(XY) = f(YX) = f(Y)$, $\forall X \in GL_n(\mathbb{R})$ i $Y \in M_n(\mathbb{R})$. Za $k = 0, 1, \dots, n$, stavimo

$$J_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vrijedi da za svaku matricu $Y \in M_n(\mathbb{R})$ postoje $X, Z \in GL_n(\mathbb{R})$ tako da je $Y = XJ_kZ$, gdje je $k = r(Y)$. Iz prethodne diskusije slijedi da je $f(Y) = f(J_k)$. Preostaje odrediti vrijednosti funkcije f na matricama $J_0, J_1, \dots J_n$. Jer je $J_k = J_k \cdot J_{k+1}$, slijedi da je $f(J_k) \leq f(J_{k+1})$ za $0 \leq k \leq n-1$. Iz surjektivnosti funkcije f slijedi da je $f(J_k) = k$ za $0 \leq k \leq n$ pa je $f(Y) = r(Y)$, $\forall Y \in M_n(\mathbb{R})$. ✓

Zadatak 3. Za konačan podskup skupa prirodnih brojeva $A \subseteq N$ definiramo $\rho(A)$ kao broj različitih prostih faktora umnoška elemenata skupa A:

$$\rho(A) = card\{p \text{ prost}\colon p \mid \prod_{a\in A} a\}.$$

Nadalje, definiramo A^+:
$$A^+ = \{a + b \colon a, b \in A, a \neq b\}.$$
Primjerice, za $A = \{5, 6, 9, 10\}$ imamo $\rho(A) = card\{2, 3, 5\} = 3$, $A^+ = \{11, 14, 15, 16, 19\}$.
U ovisnosti o $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ odredite, ako postoje, najmanji M_n i najveći m_n takve da je nejednakost

$$m_n \leq \rho(A) - \rho(A^+) \leq M_n$$

zadovoljena za sve n-člane skupove A.

Rješenje. Dokažimo da takve konstante ne postoje, tj. da razlika $\rho(A) - \rho(A^+)$ može biti proizvoljno velika ili proizvoljno mala.
Neka je $\pi(A)$ skup svih prostih brojeva koji dijele neki element iz skupa A (tako da je $\rho(A) = card(\pi(A)))$.
Ideja rješenja je sljedeća: za fiksne skupove B, C razliku $\rho(B) - \rho(C)$ možemo povećati za jedan tako da skupove B, C zamijenimo skupovima qB i qC, gdje je q prost broj iz skupa $\pi(C) \setminus \pi(B)$ (koristimo oznaku $\lambda A := \{\lambda a \ : \ a \in A\}$). Ovaj postupak možemo ponavljati sve dok ne iscrpimo sve proste faktore iz $\pi(C) \setminus \pi(B)$. Stoga, neka je $Q_{B,C}$ umnožak svih takvih prostih brojeva. Tada je izraz
$$f(B, C) := \rho(Q_{B,C}B) - \rho(Q_{B,C}C)$$
jednak $card(\pi(B) \setminus \pi(C))$.
Uvrštavajući u nejednakost iz zadatka umjesto skupa A skup $Q_{A,A^+}A$, odnosno $Q_{A^+,A}A$, slijedi da je za dokazati tvrdnju zadatka dovoljno dokazati da za svaki $n \geq 2$ brojevi

$$f(A, A^+) = card(\pi(A) \setminus \pi(A^+) \text{ i } f(A^+, A) = card(\pi(A^+) \setminus \pi(A))$$

mogu biti proizvoljno veliki (veći od svakog broja M_n, odnosno $-m_n$). Za to sada treba konstruirati takve skupove A.
Za proizvoljan prirodan N, definiramo skup $A_N := \{1, 2, 3, \ldots, n-1, X\}$, gdje je X jednak umnošku N različitih prostih brojeva koji su svi veći od $2n$. Dokažimo $f(A_N, A_N^+) \geq N$. U skupu $\pi(A_N)$ nalazi se svih N prostih faktora broja X. S druge strane, oni se ne nalaze u skupu $\pi(A_N^+)$, jer je zbroj bilo koja dva broja manji od X iz tog skupa manji od takvih prostih faktora, dok je zbroj jednog takvog broja s X relativno prost s X. Dakle, uistinu je $f(A_N, A_N^+) \geq N$.
S druge strane, za prizvoljan prirodan N sada definiramo skup $B_N := \{1, 2, 3, \ldots, , n-2, n-1, X-1\}$, gdje je X, isto kao prije, umnožak N različitih prostih faktora većih od $2n$. Sada se svi dijelitelji od X nalaze u skupu $\pi(B_N^+)$, a ne nalaze se u skupu $\pi(B_N)$ (prvih $n-1$ brojeva je manje od tih prostih faktora, zadnji broj je relativno prost s X). Dakle, $f(B_N^+, B_N) \geq N$. ✓

Zadatak 4. Nađite sve prirodne brojeve n za koje postoji familija F tročlanih podskupova skupa $S = \Big\{1, 2, ..., n\Big\}$ takva da vrijedi:

1. za svaka dva različita elementa $a, b \in S$ postoji točno jedan $A \in F$ koji sadrži a i b
2. ako su $a, b, c, x, y, z \in S$ takvi da su $\Big\{a, b, x\Big\}$, $\Big\{a, c, y\Big\}$, $\Big\{b, c, z\Big\} \in F$, tada je $\Big\{x, y, z\Big\} \in F$.

Rješenje. Iz uvjeta 1. definirajmo operaciju $*$ na skupu S sa $a * b = c$ ako i samo ako je $\Big\{a, b, c\Big\} \in F$, te $a \neq b$. Jos uvijek nismo definirali $a * a$ no promotrimo prvo neka svojstva definirane operacije za $a \neq b$. Imamo

a) $a \neq a * b \neq b$

b) $a * b = b * a$

c) $a * (a * b) = b$.

Iz uvjeta 2 imamo da vrijedi

e') $x * (a * c) = x * y = z = b * c = (x * a) * c$,

za bilo koja tri različita x, a, c. Stoga slijedi da je operacija asocijativna ako su argumenti različiti. Dodajmo u S element 0 i definirajmo

d) $a * a = 0$ i $a * 0 = 0 * a = a$.

Sad je lako provjeriti da za $a, b, c \in S \cup \left\{0\right\}$ vrijede uvjeti a), b), c), d) i

e) $a * b * c := (a * b) * c = a * (b * c)$.

Stoga skup $(S \cup \left\{0\right\}, *)$ ima strukturu Abelove grupe te su svi elementi reda 2. Takva grupa ima red 2^m po Cauchyjevom teoremu, pa je $|S| = 2^m - 1$, za neki $m \in \mathbb{N}$. Za dani $n = 2^m - 1$ konstruirati ćemo familiju F podskupova od S na sljedeći način: ako je $a = a_0 + 2a_1 + ... + 2^{m-1}a_{m-1}$ i $b = b_0 + 2b_1 + ... + 2^{m-1}b_{m-1}$, gdje su $a_i, b_i \in \left\{0, 1\right\}$, definiramo $a * b = |a_0 - b_0| + 2|a_1 - b_1| + ... + 2^{m-1}|a_{m-1} - b_{m-1}|$. Stoga u F stavimo sve moguće trojke a, b i $a * b$, pa uvjet 1 slijedi iz $a), b), c)$ a 2 slijedi iz $e')$. ✓

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*