IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI

JUNIORI

15. 3. 2019.

Zadatak 1. Neka je A_n $n \times n$ matrica takva da na polju u i-tom retku i j-tom stupcu stoji broj $\binom{i+j-2}{j-1}$. Odredi $det(A_n)$.

Zadatak 2. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz nenegativnih brojeva takav da vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i postoji $M > 0$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(a_1 - a_n) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \leq M$. Dokažite da red $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergira.

Zadatak 3. Neka su $1 = d_1 < d_2 < \ldots d_{\sigma(n)}$ svi djelitelji od n. Odredite n ako znamo da je

1. $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$
2. $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$.

Zadatak 4. U svakom polju $m \times n$ tablice stoji broj 1 ili -1. Tablicu zovemo *nerješivom* ako je nemoguće nizom dozvoljenih koraka dobiti tablicu u kojoj na svim poljima stoji broj 1.

a) Neka su dozvoljeni koraci pomnožiti cijeli redak ili stupac s -1. Ako je tablica nerješiva, dokaži da ona tada ima nerješivu 2×2 podtablicu.

b) Neka su dozvoljeni koraci pomnožiti cijeli redak, stupac ili dijagonalu (bilo koje duljine) s -1. Ako je tablica nerješiva, dokaži da ona tada ima nerješivu 4×4 podtablicu.

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI

SENIORI

15. 3. 2019.

Zadatak 1. Neka je G grupa. Dokažite da je ekvivalentno:

1. Svaka podrupa od G je normalna.
2. Za sve $a, b \in G$ postoji $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $(ab)^n = ba$

Zadatak 2. Neka je $f : [1, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, takva da $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ postoji i konačan je. Za proizvoljan realan broj $a > 1$ dokažite da oba limesa:

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} n \int_1^a f(x^n) dx$$

postoje i da su jednaki.

Zadatak 3. Dana je fiksna realna kvadratna matrica A reda n. Pretpostavimo da ortogonalna matrica Q reda n maksimizira $\mathrm{tr}(QA)$. Dokažite da je tada matrica QA simetrična.

Zadatak 4. U svakom polju $m \times n$ tablice stoji broj 1 ili -1. Tablicu zovemo *nerješivom* ako je nemoguće nizom dozvoljenih koraka dobiti tablicu u kojoj na svim poljima stoji broj 1.

a) Neka su dozvoljeni koraci pomnožiti cijeli redak ili stupac s -1. Ako je tablica nerješiva, dokaži da ona tada ima nerješivu 2×2 podtablicu.

b) Neka su dozvoljeni koraci pomnožiti cijeli redak, stupac ili dijagonalu (bilo koje duljine) s -1. Ako je tablica nerješiva, dokaži da ona tada ima nerješivu 4×4 podtablicu.

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*