

7. Jednadžba gibanja

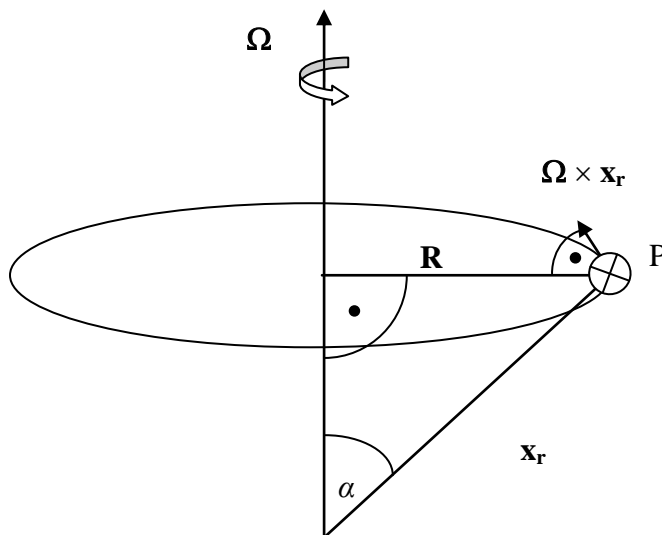
7.1 Vektorski oblik jednadžbe gibanja u koordinatnom sustavu koji rotira

U inercijalnom koordinatnom sustavu **Newtonov drugi zakon gibanja** možemo simbolički zapisati ovako

$$\frac{D_a \mathbf{v}_a}{Dt} = \sum \mathbf{F}. \quad (7.1.1)$$

Član na lijevoj strani predstavlja vremensku promjenu apsolutne brzine \mathbf{v}_a prateći gibanje, kako je vidimo iz inercijalnog sustava. Na desnoj strani zbroj svih stvarnih (fundamentalnih) sila koje djeluju po jedinici po jedinici mase česti, odnosno rezultatna akceleracija. U poglavlju 1.3 objasnili smo da, da bi Newtonov drugi zakon vrijedio u rotirajućem koordinatnom sustavu, treba stvarnim silama koje djeluju (fundamentalnim silama) dodati i prividne (pseudo) sile. Do istog rezultata doći ćemo i transformacijom koordinata u jednadžbi (7.1.1).

Da prikazemo Newtonov drugi zakon u sustavu koji rotira, moramo najprije naći vezu između apsolutne brzine (brzine u inercijalnom koordinatnom sustavu) \mathbf{v}_a i brzine u sustavu koji rotira (relativnom koordinatnom sustavu) \mathbf{v} . Pretpostavimo da relativni koordinatni sustav rotira kutnom brzinom $\boldsymbol{\Omega}$, kao što je prikazano na slici. Neka se u točki P, koja rotira, nalazi čest zrnaka. Položaj česti u inercijalnom koordinatnom sustavu definiran je vektorom položaja \mathbf{x}_a , a u rotirajućem sustavu vektorom položaja \mathbf{x}_r . Vektor \mathbf{R} je vektor udaljenosti od osi rotacije do točke P (\mathbf{R} je okomit na $\boldsymbol{\Omega}$).



Slika 7.1. Brzina koju ima čest ima u apsolutnom (inercijalnom) sustavu zbog rotacije relativnog (neinercijalnog) koordinatnog sustava. Čest miruje u točki P s obzirom na sustav koji rotira kutnom brzinom $\boldsymbol{\Omega}$.

Ako čest miruje u relativnom koordinatnom sustavu, ona se ipak giba s obzirom na inercijalni sustav, jer sam relativni sustav rotira. Zbog toga će promatrač koji miruje u inercijalnom (fiksnoj) koordinatnom sustavu vidjeti da čest ima brzinu $D_a \mathbf{x}_a / Dt = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r$.

Ako se čest giba u odnosu na relativni koordinatni sustav, promatrač u tom sustavu vidi da čest ima brzinu $D\mathbf{x}_r / Dt$. Međutim, promatrač koji promatra gibanje iz fiksnog sustava, osim gibanja česti u relativnom ($D\mathbf{x}_r / Dt$) sustavu vidi i gibanje česti zbog rotacije relativnog sustava ($\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r$), pa je pa stoga vidi brzinu česti viđena iz fiksnog sustava ($D_a \mathbf{x}_a / Dt$)

$$\frac{D_a \mathbf{x}_a}{Dt} = \frac{D\mathbf{x}_r}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r. \quad (7.1.2)$$

Da bi odredili akceleraciju u apsolutnom koordinatnom sustavu, moramo naći totalni diferencijal brzine u apsolutnom sustavu $D_a^2 \mathbf{x}_a / Dt^2$. Drugim riječima u jednadžbu (1.4.4), koja općenito vrijedi za svaki vektor, uvrstit ćemo umjesto vektora \mathbf{A} vektor brzine $D_a \mathbf{x}_a / Dt$:

$$\frac{D_a}{Dt} \left(\frac{D_a \mathbf{x}_a}{Dt} \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{D_a \mathbf{x}_a}{Dt} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{D_a \mathbf{x}_a}{Dt} \right).$$

U gornjoj jednadžbi prikažimo sada brzinu u apsolutnom sustavu pomoću brzine u relativnom sustavu kao što je prikazano jednadžbom (7.1.2). Dobije se

$$\frac{D_a^2 \mathbf{x}_a}{Dt^2} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{D\mathbf{x}_r}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{D\mathbf{x}_r}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r \right).$$

Budući je vektor kutne brzine rotacije konstantan i po smjeru i po iznosu, možemo ga staviti ispred operatora D_r / Dt pa je akceleracija prikazana u inercijalnom koordinatnom sustavu

$$\frac{D_a^2 \mathbf{x}_a}{Dt^2} = \frac{D^2 \mathbf{x}_r}{Dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{D\mathbf{x}_r}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r). \quad (7.1.3)$$

Želimo odrediti čemu je jednak član $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r)$. Najprije gledamo čemu je jednak modul vektora $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r$. Pri tom će nam pomoći slika 7.1.

$$|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r| = \Omega x_r \sin \alpha = \Omega x_r \frac{R}{x_r} = \Omega R = \Omega R \sin 90 = |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}|.$$

Nadalje, iz slike 7.1 je vidljivo da vektori $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r$ i $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$ imaju isti smjer i orijentaciju, pa je $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$. Odatle je $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r) = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R})$. Primjenom pravila koja vrijede za vektorski i skalarni produkt vektora, gdje su \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} proizvoljni vektori, a A , B i C njihovi moduli

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_r) &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \\ &= \boldsymbol{\Omega}(\Omega R \cos 90) - \mathbf{R}(\Omega^2 \cos 0) = -\Omega^2 \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Uvrstimo gornju jednakost u izraz za akceleraciju u inercijalnom koordinatnom sustavu (2.1.3). Tako dobivamo akceleraciju u inercijalnom sustavu izraženu preko akceleracije u relativnom (neinercijalnom) sustavu

$$\frac{D_a^2 \mathbf{x}_a}{Dt^2} = \frac{D^2 \mathbf{x}_r}{Dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{D\mathbf{x}_r}{Dt} - \Omega^2 \mathbf{R}. \quad (7.1.4)$$

Jednadžba (7.1.4) pokazuje da je akceleracija česti prateći gibanje u apsolutnom (inercijalnom) sustavu jednaka zbroju akceleracije česti prateći gibanje u relativnom (neinercijalnom) koordinatnom sustavu koji rotira ($D^2 \mathbf{x}_r / Dt^2$), Coriolisove akceleracije koja postoji zbog relativnog gibanja česti u odnosu na sustav koji rotira ($2\boldsymbol{\Omega} \times D\mathbf{x}_r / Dt$) i centripetalne akceleracije koja postoji zbog rotacije koordinata ($-\Omega^2 \mathbf{R}$).

Akceleracija koju čest ima u inercijalnom koordinatnom sustavu, posljedica je istovremenog djelovanja svih fundamentalnih sila na čest. Fundamentalne sile koje djeluju na neku čest u atmosferi jesu sila gradijenta tlaka, gravitacija i sila trenja, a pripadne akceleracije su $-(1/\rho)\nabla p$ (akceleracija sile gradijenta tlaka), \mathbf{g}^* (akceleracija gravitacije) i \mathbf{a}_{tr} (akceleracija zbog trenja, u ovom slučaju to je deceleracija jer se čest zbog trenja usporava). Stoga je akceleracija koju čest ima zbog djelovanja svih sila jednaka zbroju vektora $-(1/\rho)\nabla p + \mathbf{g}^* + \mathbf{a}_{tr}$. Dakle, akceleracija u inercijalnom sustavu, koja je prikazana jednadžbom (7.1.4), mora biti jednaka rezultatnoj akceleraciji $-(1/\rho)\nabla p + \mathbf{g}^* + \mathbf{a}_{tr}$

$$\frac{D_a^2 \mathbf{x}_a}{Dt^2} = \frac{D^2 \mathbf{x}_r}{Dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{D\mathbf{x}_r}{Dt} - \Omega^2 \mathbf{R} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}^* + \mathbf{a}_{tr}. \quad (7.1.5)$$

}	}	}	}	}	}	}
akceleracija u apsolutnom (inercijalnom) sustavu	akceleracija u relativnom (neinercijalnom) sustavu koji rotira	Coriolisova akceleracija	centripetalna akceleracija	akceleracija sile gradijenta tlaka	akceleracija gravitacije	akceleracija sile trenja

Kako se naša mjerenja, dijagnostičke analize i prognoze odnose na Zemlju koja rotira, ne zanima nas akceleracija u apsolutnom sustavu, već nas zanima akceleracija u relativnom sustavu koji rotira. Stoga ćemo jednadžbu (7.1.5) preurediti tako da izostavimo lijevu stranu jednakosti. U novoj jednadžbi kao nepoznanicu ćemo pisati akceleraciju u relativnom sustavu

$$\frac{D^2 \mathbf{x}_r}{Dt^2} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{D\mathbf{x}_r}{Dt} + \Omega^2 \mathbf{R} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}^* + \mathbf{a}_{tr}$$

Rezultanta centrifugalne akceleracije $\Omega^2 \mathbf{R}$ i akceleracije gravitacije \mathbf{g}^* jednaka je akceleraciji sile teže \mathbf{g} , a totalni diferencijal vektora položaja česti u relativnom koordinatnom sustavu prateći gibanje $D\mathbf{x}_r/Dt$ upravo je jednak brzini česti u relativnom sustavu \mathbf{v} , pa Newtonov drugi zakon gibanja (2.1.1) konačno poprima ovaj oblik

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{a}_t. \quad (7.1.6)$$

Tom jednadžbom Newtonov drugi zakon gibanja izražen je u sustavu koji rotira (relativnom, neinercijalnom sustavu). Jednadžba (7.1.6) pokazuje da je akceleracija prateći relativno gibanje u sustavu koji rotira jednaka rezultanti akceleracija koje postoje zbog djelovanja Coriolisove sile, sile gradijenta tlaka, sile teže i sile trenja. To je jedna od temeljnih jednadžbi u dinamičkoj meteorologiji, a naziva se još i **jednadžba gibanja** ili **jednadžba impulsa**. U njoj je drugi Newtonov zakon gibanja izražen preko totalne promjene impulsa po jedinici mase prateći gibanje. Isti zakon katkad se izražava i preko totalne promjene impulsa po jedinici volumena.

U velikom broju problema dinamičke meteorologije djelovanje sile trenja se zanemaruje pa jednadžba (7.1.6) poprima jednostavniji oblik

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (7.1.7)$$

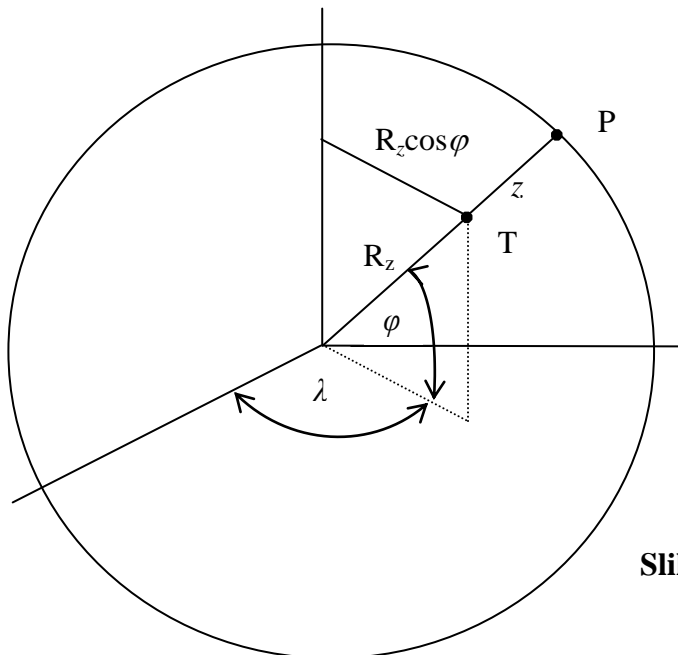
Utjecaj podloge na atmosferska gibanja opada visinom, a najviše se osjeća unutar prvih 1-3 km visine nad tlom. Taj najdonji sloj atmosfere, čija je debljina prostorno i vremenski varijabilna, naziva se **atmosferski granični sloj**. U atmosferskom graničnom sloju, koji je upravo definiran kao granični dio troposfere koji je pod direktnim utjecajem zemljine podloge, trenje se ne može zanemariti, pa tada polazimo od jednadžbe gibanja u obliku (2.1.6). Međutim, u visinama iznad atmosferskog graničnog sloja, djelovanje trenja je zanemarivo malo, pa tada koristimo jednadžbu oblika (7.1.7). Dio atmosfere koji se nalazi iznad atmosferskog graničnog sloja, pa je stoga djelovanje sile trenja u njemu zanemarivo malo, nazivamo **slobodna atmosfera** (upravo zato što je gibanje u njemu 'slobodno', odnosno nije uvjetovano trenjem). Slično, dio troposfere koji se nalazi iznad atmosferskog graničnog sloja nazivamo **slobodna troposfera**. Većina naših razmatranja u ovoj knjizi odnosit će se upravo na slobodnu atmosferu.

7.2 Skalarni oblik jednadžbe gibanja u sfernim koordinatama

Katkad je u teorijskim razmatranjima pogodno jednadžbu (7.1.6) gibanja prikazati u skalarnom obliku. Budući da Zemlja približno ima oblik kugle (za potrebe meteorologije možemo potpuno zanemariti odstupanje Zemlje od kugle), jednadžbu gibanja pišemo tada u sfernim koordinatama. Jednadžba gibanja u sfernim koordinatama pogodna je i za potrebe numeričkih prognoza na hemisferskoj ili globalnoj skali.

Označimo koordinatne osi sfernog sustava sa (λ, φ, z) , gdje je λ zemljopisna dužina, φ je širina, a z je vertikalna udaljenost od Zemljine površine pa do promatrane točke P (slika

7.2). Neka je r udaljenost od središta Zemlje (središta sfernog sustava) pa do promatrane točke P. Tada je $r = R_z + z$, gdje je R_z radijus Zemlje. Budući da pretpostavljamo da je Zemlja kugla, R_z je konstantan.



Slika 7.2. Sferni koordinatni sustav.

Ako postavimo jedinične vektore \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} tako da \mathbf{i} bude orijentiran prema istoku, \mathbf{j} prema sjeveru, a \mathbf{k} vertikalno prema gore, relativna brzina (brzina u odnosu na neku točku na Zemljinoj površini) je

$$\mathbf{v} \equiv u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k},$$

gdje su komponente brzine u , v i w definirane ovako

$$u \equiv r \cos \varphi \frac{D\lambda}{Dt}, \quad v \equiv r \frac{D\varphi}{Dt}, \quad w \equiv \frac{Dz}{Dt}. \quad (7.2.1)$$

Većina meteoroloških procesa (procesa koji upravljaju vremenom i klimom) događa se u najdonjem sloju atmosfere - troposferi. Visina troposfere raste od polova prema ekvatoru. Nad polovima taj sloj je deo oko 9 km, a nad ekvatorom oko 20 km. Srednji radijus Zemlje puno je veći od debljine troposfere ($R_z = 6371$ km), pa stoga u dinamičkoj meteorologiji često možemo pretpostaviti da je visina z puno manja od R_z . Odatle slijedi za potrebe dinamičke meteorologije vrlo dobra aproksimacija: $r = R_z + z \approx R_z$. To drugim riječima znači da varijablu r možemo zamijeniti konstantnom vrijednošću R_z .

Definirajmo sad koordinatni sustav s ortogonalnim osima (x, y, z) takav da je x os usmjerena prema istoku, y os prema sjeveru, a z os vertikalno prema gore. Taj koordinatni sustav nije Kartezijev, budući da smjerovi jediničnih vektora \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} nisu konstantni, već su funkcije položaja na Zemljinoj kugli. U tom koordinatnom sustavu udaljenosti u x i y smjeru su takve da je $Dx = R_z \cos \varphi D\lambda$ i $Dy = R_z D\varphi$. Odatle su horizontalne komponente brzine $u \equiv Dx/Dt$ (komponenta prema istoku) i $v \equiv Dy/Dt$ (komponenta prema sjeveru), a vertikalna komponenta brzine je $w \equiv Dz/Dt$. Da odredimo akceleraciju, moramo naći totalni diferencijal

brzine u vremenu prateći gibanje $D\mathbf{v}/Dt$, gdje je vektor brzine $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$. Budući da su \mathbf{i} i smjerovi jediničnih vektora promjenjivi, vektor akceleracije je

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{Du}{Dt}\mathbf{i} + \frac{Dv}{Dt}\mathbf{j} + \frac{Dw}{Dt}\mathbf{k} + u\frac{D\mathbf{i}}{Dt} + v\frac{D\mathbf{j}}{Dt} + w\frac{D\mathbf{k}}{Dt}. \quad (7.2.2)$$

Odrediti ćemo najprije promjene jediničnih vektora prateći gibanje. Nađimo prvo $D\mathbf{i}/Dt$. Upotrebom izraza (1.4.3) vidimo da je totalni diferencijal $D\mathbf{i}/Dt$ jednak

$$\frac{D\mathbf{i}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{i}}{\partial t} + \left(u\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x} + v\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial y} + w\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial z} \right).$$

Jedinični vektor \mathbf{i} nije funkcija vremena, pa je stoga $\partial\mathbf{i}/\partial t = 0$. Također, \mathbf{i} se ne mijenja ni s promjenom zemljopisne širine ($\partial\mathbf{i}/\partial y = 0$), niti s promjenom položaja duž vertikale ($\partial\mathbf{i}/\partial z = 0$), pa tako dobivamo

$$\frac{D\mathbf{i}}{Dt} = u\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x}.$$

Slika 7.3. prikazuje kako se smjer jediničnog vektora \mathbf{i} mijenja u ovisnosti o promjeni zemljopisne dužine $\delta\lambda$. Pretpostavimo da je pomak duž paralele δx infinitezimalno malen. Tada možemo pretpostaviti da je δx baza jednakokravnog trokuta čiji su krakovi $R_z \cos \varphi$. Taj je trokut sličan jednakokravnom trokutu baze $\delta\mathbf{i}$, pa stoga vrijedi

$$\frac{|\delta\mathbf{i}|}{\delta x} = \frac{|\mathbf{i}|}{R_z \cos \varphi}.$$

Potražimo limes gornjeg izraza za $\delta x \rightarrow 0$. U limesu operator δ prelazi u parcijalni diferencijal ∂

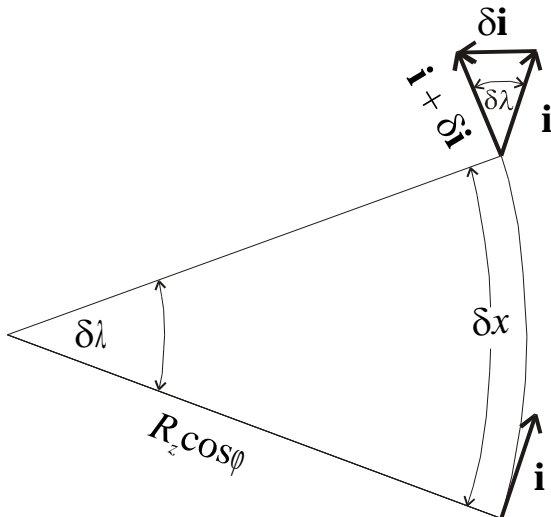
$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|\delta\mathbf{i}|}{\delta x} = \frac{|\partial\mathbf{i}|}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{i}|}{R_z \cos \varphi} = \frac{1}{R_z \cos \varphi}. \quad (7.2.3)$$

Jednadžbom (7.2.3) odredili smo modul vektora $\partial\mathbf{i}/\partial x$. Da odredimo sam vektor trebamo znati smjer i orijentaciju vektora. Iz slike 7.3. vidimo da je $\delta\mathbf{i}$ u smjeru radijusa paralele, a orijentiran je prema osi rotacije. Dakle i $\partial\mathbf{i}/\partial x$ je istog smjera i orijentacije, pa ga, kao što je prikazano na slici 7.4., možemo rastaviti na komponentu u smjeru y osi i komponentu u smjeru z osi. Tako na kraju dobivamo promjenu jediničnog vektora \mathbf{i} u x smjeru

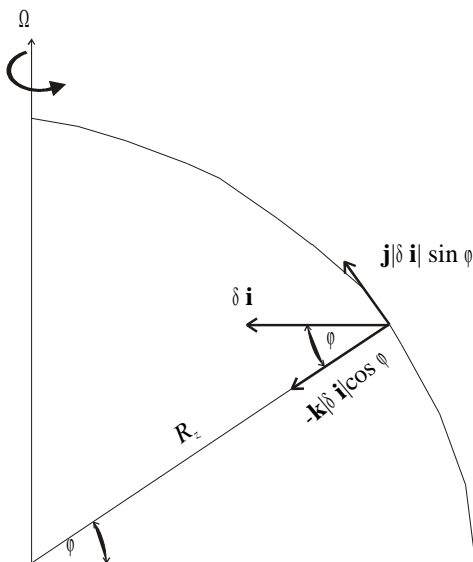
$$\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x} = \frac{1}{R_z \cos \varphi} (\sin \varphi \mathbf{j} - \cos \varphi \mathbf{k}),$$

odnosno totalni diferencijal jediničnog vektora \mathbf{i}

$$\frac{D\mathbf{i}}{Dt} = u\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial x} = \frac{u}{R_z \cos \varphi} (\sin \varphi \mathbf{j} - \cos \varphi \mathbf{k}). \quad (7.2.4)$$



Slika 7.3. Promjena jediničnog vektora \mathbf{i} u ovisnosti o promjeni geografske dužine $\delta\lambda$. Luk δx je proteže se duž paralele. Mijenja se samo smjer jediničnog vektora a modul je konstantan: $|\mathbf{i} + \delta\mathbf{i}| = |\mathbf{i}|$. Vektor $\delta\mathbf{i}$ je u smjeru osi rotacije.



Slika 7.4. Komponente vektora $\delta\mathbf{i}$: komponenta prema sjeveru i vertikalna komponenta.

Sada ćemo odrediti promjenu jediničnog vektora \mathbf{j} ($D\mathbf{j}/Dt$). Vektor \mathbf{j} ne ovisi ni o vremenu niti o vertikalnoj koordinati, pa je

$$\frac{D\mathbf{j}}{Dt} = u \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y}. \quad (7.2.5)$$

Da nađemo promjenu \mathbf{j} duž osi x , poslužiti će nam slika 7.5. Sa slike vidimo da je $\delta\mathbf{j}$ orijentiran u negativnom smjeru osi x , pa je i $\partial\mathbf{j}/\partial x$ jednakog smjera i orijentacije. Nadalje, uočavamo dva slična jednakokrana trokuta. Veći ima bazu δx i krakove $R_z \text{ctg}$, a baza manjeg je $|\delta\mathbf{j}|$, dok su krakovi jednaki $|\mathbf{j}|$. Iz sličnosti tih dvaju trokuta dobivamo

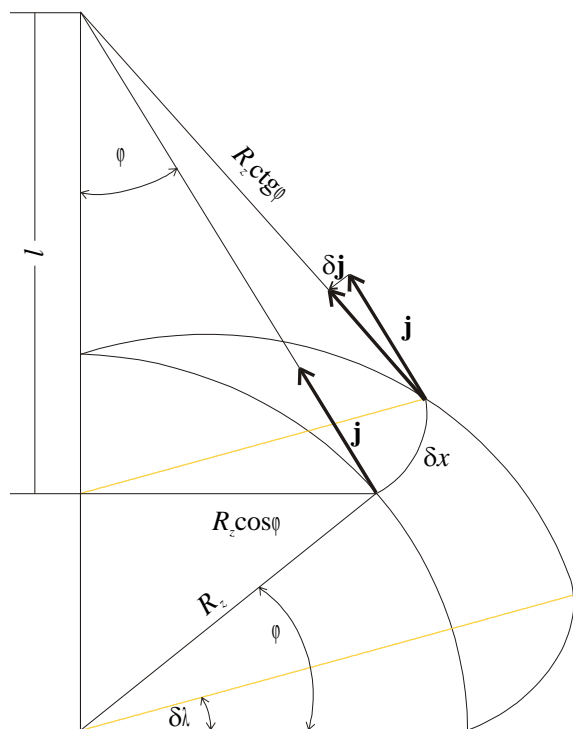
$$\frac{|\delta \mathbf{j}|}{|\mathbf{j}|} = \frac{\delta x}{R_z \operatorname{ctg} \varphi},$$

odnosno

$$\frac{|\delta \mathbf{j}|}{\delta x} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{R_z}.$$

Kad uvažimo smjer i orijentaciju vektora, u limesu $\delta x \rightarrow 0$ dobivamo

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{j}}{\delta x} = \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} = -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{R_z} \mathbf{i}. \quad (7.2.6)$$



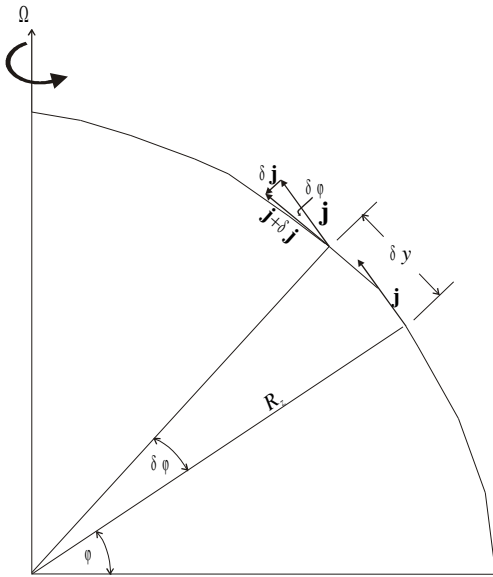
Slika 7.5. Ovisnost jediničnog vektora \mathbf{j} o zemljopisnoj dužini. S promjenom dužine mijenja se samo smjer a ne i modul vektora \mathbf{j} . Vektor $\delta \mathbf{j}$ je usmjeren prema zapadu.

Da bi odredili $D\mathbf{j}/Dt$ još trebamo naći $\partial \mathbf{j} / \partial y$. Sa slike 7.6. vidimo da se pri promjeni zemljopisne širine za $\delta \varphi$, jedinični vektor \mathbf{j} promijeni za $\delta \mathbf{j}$, gdje je $\delta \mathbf{j}$ u smjeru $-z$ osi. Iz jednakokračnog trokuta s krakovima $|\mathbf{j}|$ i $|\mathbf{j} + \delta \mathbf{j}|$, te bazom $|\delta \mathbf{j}|$ vidimo da je $|\delta \mathbf{j}| = |\mathbf{j}| \delta \varphi = \delta \varphi$. Ako uvažimo smjer i orijentaciju vidimo da je vektor $\delta \mathbf{j} = |\delta \mathbf{j}| (-\mathbf{k}) = -\delta \varphi \mathbf{k}$. Nadalje, ako se zemljopisna širina promijeni za $\delta \varphi$, tada je pripadna meridionalna promjena promjena δy , gdje je $\delta y = R_z \delta \varphi$. Odatle je

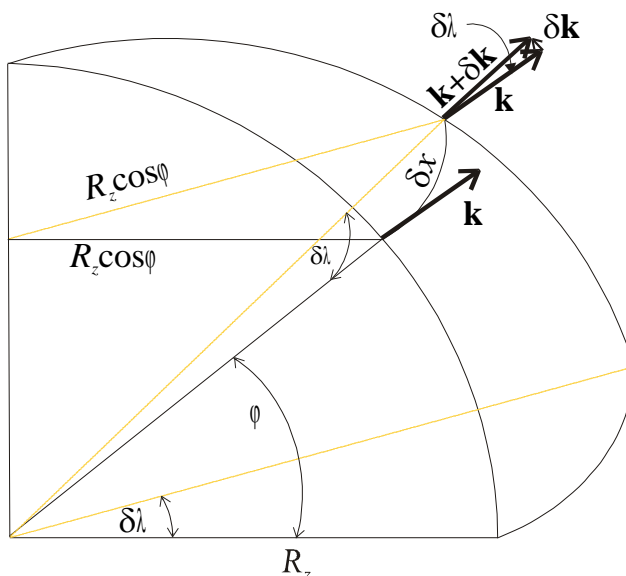
$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{j}}{\delta y} = \frac{-\delta \varphi}{R_z \delta \varphi} \mathbf{k} = -\frac{1}{R_z} \mathbf{k}. \quad (7.2.7)$$

Konačno na temelju jednadžbi (7.2.5) - (7.2.7) dobivamo

$$\frac{D\mathbf{j}}{Dt} = u \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} = -u \frac{\tan \varphi}{R_z} \mathbf{i} - v \frac{1}{R_z} \mathbf{k}. \quad (7.2.8)$$



Slika 7.6. Ovisnost jediničnog vektora \mathbf{j} o zemljopisnoj širini. S promjenom zemljopisne širine mijenja se samo smjer, a ne i modul jediničnog vektora \mathbf{j} . Vektor $\delta \mathbf{j}$ je usmjeren vertikalno prema dolje.



Slika 7.7. Ovisnost jediničnog vektora \mathbf{k} o zemljopisnoj dužini. Vektor $\delta \mathbf{k}$ je usmjeren prema istoku.

Slično, smjer jediničnog vektora \mathbf{k} ovisi samo o zemljopisnoj širini i dužini pa je totalni diferencijal $D\mathbf{k}/Dt$ jednak

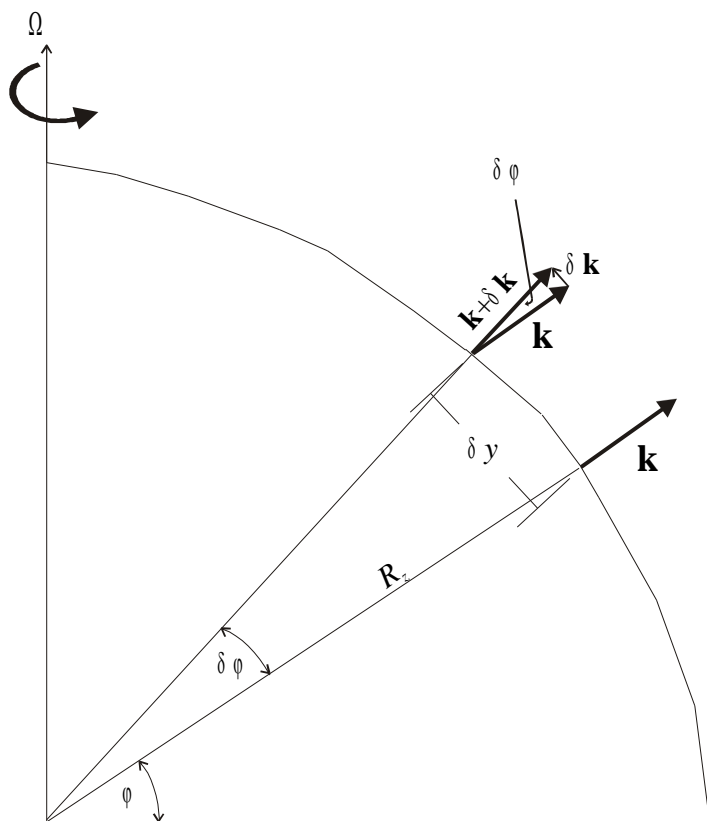
$$\frac{D\mathbf{k}}{Dt} = u \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y}. \quad (7.2.9)$$

Slika 7.7. pokazuje da pomaku δx odgovara promjena $\delta \mathbf{k}$, koja je u smjeru pozitivne x osi, pa je i $\partial \mathbf{k} / \partial x$ u istom smjeru. Nadalje, iz sličnosti dva jednakokračna trokuta slijedi

$$\frac{|\delta \mathbf{k}|}{\delta x} = \frac{|\mathbf{k}|}{R_z} = \frac{1}{R_z},$$

te na kraju dobivamo

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{k}}{\delta x} = \frac{1}{R_z} \mathbf{i}. \quad (7.2.10)$$



Slika 7.8. Ovisnost jediničnog vektora \mathbf{k} . Vektor $\delta \mathbf{k}$ je u smjeru sjevera.

Tražimo sada $\partial \mathbf{k} / \partial y$. Sa slike 7.8. je vidljivo da je $\delta \mathbf{k}$ u pozitivnom smjeru y osi. Iz sličnosti dvaju jednakokračnih trokuta slijedi

$$\frac{|\delta \mathbf{k}|}{\delta y} = \frac{|\mathbf{k}|}{R_z} = \frac{1}{R_z}.$$

Uvažimo li smjer i orijentaciju vektora, dobivamo

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{k}}{\delta y} = \frac{1}{R_z} \mathbf{j}. \quad (7.2.11)$$

Konačno upotrebom jednadžbi (7.2.9) – (7.2.11) dobivamo totalni diferencijal jediničnog vektora \mathbf{k}

$$\frac{D\mathbf{k}}{Dt} = u \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y} = \frac{u}{R_z} \mathbf{i} + \frac{v}{R_z} \mathbf{j}. \quad (7.2.12)$$

Uvrstimo sada jednadžbe (7.2.4), (7.2.8) i (7.2.12) u izraz za akceleraciju prateći gibanje u relativnom koordinatnom sustavu (7.2.2) i preuredimo tako da izdvojimo članove po smjerovima x , y i z

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \frac{Du}{Dt} \mathbf{i} + \frac{Dv}{Dt} \mathbf{j} + \frac{Dw}{Dt} \mathbf{k} + u \frac{D\mathbf{i}}{Dt} + v \frac{D\mathbf{j}}{Dt} + w \frac{D\mathbf{k}}{Dt} = \frac{Du}{Dt} \mathbf{i} + \frac{Dv}{Dt} \mathbf{j} + \frac{Dw}{Dt} \mathbf{k} + \\ &+ \frac{u^2}{R_z \cos \varphi} (\sin \varphi \mathbf{j} - \cos \varphi \mathbf{k}) + v \left(-u \frac{tg \varphi}{R_z} \mathbf{i} - v \frac{1}{R_z} \mathbf{k} \right) + w \left(\frac{u}{R_z} \mathbf{i} + \frac{v}{R_z} \mathbf{j} \right) = \quad (7.2.13) \\ &= \left(\frac{Du}{Dt} - \frac{uvtg \varphi}{R_z} + \frac{uw}{R_z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 tg \varphi}{R_z} + \frac{vw}{R_z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{R_z} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Akceleracija, koja je prikazana jednadžbom (7.2.13), postoji zbog sila koje stvarno djeluju u inercijalnom sustavu, te zbog pseudosila (koje su posljedica rotacije relativnog sustava u odnosu na inercijalni sustav). Stoga akceleracija (7.2.13) mora zadovoljavati Newtonov drugi zakon gibanja u relativnom (neinercijalnom) sustavu, a koji je prikazan jednadžbom (7.1.6). Jednadžbu (7.1.6) također ćemo preurediti tako da izdvojimo članove po smjerovima koordinatnih osi

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \mathbf{a}_{tr} = -2\boldsymbol{\Omega} (\cos \varphi \mathbf{j} + \sin \varphi \mathbf{k}) \times (u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) + \\ &- \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) - g\mathbf{k} + (a_{tr})_x \mathbf{i} + (a_{tr})_y \mathbf{j} + (a_{tr})_z \mathbf{k} = \quad (7.2.14) \\ &= \left(-2\Omega w \cos \varphi + 2\Omega v \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + (a_{tr})_x \right) \mathbf{i} + \\ &= \left(-2\Omega u \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + (a_{tr})_y \right) \mathbf{j} + \left(2\Omega u \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + (a_{tr})_z \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

gdje su $(a_{tr})_x$, $(a_{tr})_y$ i $(a_{tr})_z$ komponente akceleracije zbog trenja u x , y i z smjeru, a g je akceleracija sile teže (na Zemljinoj površini $g \approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$). Izjednačimo x , y i z komponente akceleracije prikazane jednadžbama (7.2.13) i (7.2.14). Tako dobivamo tri jednadžbe skalarnog oblika. Jednadžba u smjeru istoka (x komponenta vektorske jednadžbe gibanja) je

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uvtg \varphi}{R_z} + \frac{uw}{R_z} = -2\Omega w \cos \varphi + 2\Omega v \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + (a_{tr})_x, \quad (7.2.15)$$

u smjeru sjevera (y komponenta)

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{R_z} + \frac{vw}{R_z} = -2\Omega u \sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + (a_r)_y, \quad (7.2.16)$$

a vertikalna (z) komponenta jednadžbe gibanja je

$$\frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{R_z} = 2\Omega u \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + (a_r)_z. \quad (7.2.17)$$

Članovi koji su proporcionalni s $1/R_z$ zovu se **članovi zakrivljenosti**, a postoje zbog zakrivljenosti Zemlje. Budući da u sebi sadrže umnoške zavisnih varijabli (komponente vektora brzine međusobno su zavisne varijable), nelinearni su, te stoga otežavaju teorijske analize jednadžbi (7.2.15) – (7.2.17). U idućem poglavlju pokazat ćemo da su za gibanja u umjerenim širinama na sinoptičkoj skali članovi zakrivljenosti zanemarivo mali u odnosu na ostale članove u jednadžbama gibanja. Ipak, i nakon zanemarivanja članova zakrivljenosti, jednadžbe (7.2.15) – (7.2.17) i dalje ostaju nelinearne, jer se nelinearni članovi nalaze u advektivnim članovima totalnih diferencijala komponenti brzine. Tako je npr.

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z},$$

a slične nelinearne izraze imamo i u advektivnim članovima totalnih diferencijala Du/Dt i Dw/Dt . Te nelinearne članove ne možemo zanemariti, budući da su im magnitude usporedive s magnitudama komponenti lokalne promjene brzine $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ i $\partial w/\partial t$. Stoga nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe (7.2.15) – (7.2.17) nemaju analitičkih rješenja, već se moraju rješavati numerički.

7.3 Analiza skala u jednadžbi gibanja (sinoptička skala)

Jednadžbe gibanja (7.2.15) – (7.2.17) opisuju sve tipove i sve skale atmosferskih gibanja. Rješenja tih jednadžbi u sebi između ostalog sadrže i zvučne valove, koji su nebitni za meteorologiju, te ih stoga želimo eliminirati. (Kad zvučne valove ne bi eliminirali iz rješenja, oni bi u rješenjima 'zamaglili' stvarnu sliku strujanja, odnosno predstavljali bi smetnju [šum].) U poglavlju 1.1.2 rekli smo da analizom skala jednadžbe možemo na temelju fizikalnih argumenata matematički pojednostavniti, tako da zanemarimo članove čije su magnitude malene. Na taj način istovremeno iz jednadžbi eliminiramo (filtriramo) gibanja koja nas ne interesiraju.

Velik dio atmosferskih gibanja koja su relevantna za meteorologiju umjerenih širina događa se na sinoptičkoj skali. Opažanjem su u umjerenim širinama uočene ove tipične skale varijabli na sinoptičkoj skali:

$U \sim 10 \text{ m s}^{-1}$	skala horizontalne brzine
$W \sim 1 \text{ cm s}^{-1}$	skala vertikalne brzine
$L \sim 10^6 \text{ m}$	skala duljine
$H \sim 10^4 \text{ m}$	skala visine
$\delta P/\rho \sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$	skala horizontalnih fluktuacija tlaka
$L/U \sim 10^5 \text{ s}$	horizontalna skala vremena

Horizontalna skala vremena je ovdje advektivna skala vremena. To je skala koja odgovara baričkim sustavima (ciklonama, anticiklonama, dolinama, grebenima), budući da je uočeno da se oni na sinoptičkoj skali približno gibaju brzinom horizontalnog vjetera. Dakle, za gibanja na sinoptičkoj skali L/U je vrijeme potrebno da zrak prijeđe horizontalnu udaljenost L brzinom U . Nadalje, za takva gibanja operator totalnog diferencijala D/Dt je proporcionalan U/L . Treba naglasiti da vertikalna brzina na sinoptičkoj skali nije mjerljiva već je izvedena.

Nadalje, uobičajeno je definirati veličinu f_0 , koja odgovara Coriolisovom parametru na zemljopisnoj širini $\varphi_0 = 45^\circ$, takvu da je $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0 = 2\Omega \cos \varphi_0 \cong 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

7.3.1. Horizontalne jednadžbe, geostrofički vjetar, približne prognostičke jednadžbe, Rossbyjev broj

Analiza skala u horizontalnim jednadžbama gibanja (7.2.15) i (7.2.16) prikazana je u tablici 7.1. Veličina ν je **kinematička viskoznost** koja je za suhi zraka reda veličine $\nu \sim 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (za standardnu atmosferu na razini mora $\nu = 1.46 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$). Red veličine člana VII u horizontalnim jednadžbama impulsa ukazuje na to da je molekularno trenje toliko maleno ($\sim 10^{-12} \text{ m s}^{-1}$) da se na sinoptičkoj skali može zanemariti. Molekularno trenje općenito je važno samo u ova dva slučaja: 1) u visinama većim od 100 km nad tlom (dinamička meteorologija ne bavi se gibanjima u dijelu atmosfere); i 2) kod **turbulentnih**¹ gibanja najmanjih razmjera, koja postoje uz samo tlo u plitkom sloju od nekoliko centimetara. U tom sloju **vertikalno smicanje** vjetera² može biti jako veliko. Turbulentna gibanja spadaju u probleme **atmosferskog graničnog sloja**³, kojima se ovaj udžbenik ne bavi. Kako ovdje proučavamo **slobodnu troposferu**⁴, u daljnjim razmatranjima molekularno trenje ćemo zanemarivati.

Tablica 7.1. Analiza skala u horizontalnim jednadžbama impulsa za gibanja na sinoptičkoj skali. I – horizontalna akceleracija, II – član zakrivljenosti zbog horizontalnog strujanja, III – član zakrivljenosti koji ovisi i o horizontalnom i o vertikalnom strujanju, IV – Coriolisova akceleracija zbog vertikalne brzine, V – Coriolisova akceleracija zbog horizontalne brzine, VI – akceleracija zbog sile gradijenta tlaka, VII – član molekularnog trenja.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
x komponenta	$\frac{Du}{Dt}$	$-\frac{uvtg\varphi}{R_z}$	$+\frac{uw}{R_z} =$	$-2\Omega w \cos \varphi$	$+2\Omega v \sin \varphi$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$(a_{tr})_x$
y komponenta	$\frac{Dv}{Dt}$	$+\frac{u^2tg\varphi}{R_z}$	$+\frac{vw}{R_z} =$		$-2\Omega u \sin \varphi$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$(a_{tr})_y$
skale	U^2/L	U^2/R_z	UW/R_z	$f_0 W$	$f_0 U$	$\delta P/\rho L$	$\nu U/H^2$

¹ Turbulentna gibanja - izrazito nepravilna gibanja. Karakteristična su za najdonji dio atmosfere (atmosferski granični sloj).

² promjena vjetera visinom

³ Atmosferski granični sloj je najdonji sloj troposfere (~ 1 do 2 km nad tlom) koji je pod direktnim utjecajem podloge, a karakteriziran je izrazitom nepravilnošću i turbulencijom.

⁴ Dio troposfere koji se nalazi iznad atmosferskog graničnog sloja. Utjecaj trenja u njemu je zanemariv.

red veličine (m s ⁻²)	10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁸	10 ⁻⁶	10 ⁻³	10 ⁻³	10 ⁻¹²
--------------------------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	-------------------

Iz tablice 7.1. očito je da kod horizontalnih gibanja na sinoptičkoj skali dominiraju dvije sile: Coriolisova sila (čiju akceleraciju opisuje član V) i sila gradijenta tlaka (član VI). Ta su dva člana približno uravnotežena i bitno su veća od preostalih članova. Stoga zanemarivanjem preostalih članova i uvođenjem Coriolisovog parametra $f \equiv 2\Omega \sin\varphi$ dobivamo u prvoj aproksimaciji jednadžbe

$$0 \approx fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{x komponenta}), \quad (7.2.18)$$

$$0 \approx -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{y komponenta}).$$

(7.2.19)

koje opisuju **geostrofičku** ravnotežu. Jednadžbe geostrofičke ravnoteže su dijagnostički izrazi koji prikazuju približnu vezu između polja tlaka i polja strujanja na sinoptičkoj skali umjerenih širina. Ne možemo ih koristiti za prognozu jer ne pokazuju kako se polje brzine mijenja u vremenu. Stoga ih i zovemo dijagnostičke jednadžbe.

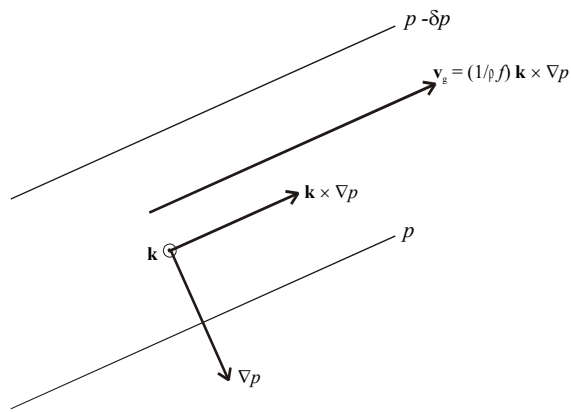
Uobičajeno je horizontalni vektor vjetra koji zadovoljava geostrofičku ravnotežu označiti indeksom 'g'. Taj vjetar nazivamo **geostrofički vjetar**, a komponente mu možemo odrediti iz izraza (7.2.18)-(7.2.19), ali tada umjesto znaka približno jednako imamo znak jednakosti. Tako dobivamo

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y},$$

ili u vektorskom obliku

$$\mathbf{v}_g \equiv \mathbf{k} \times \frac{1}{\rho f} \nabla p, \quad (7.2.20)$$

gdje je $\mathbf{v}_g \equiv u_g \mathbf{i} + v_g \mathbf{j}$. Iz definicije geostrofičkog vjetra (2.2.20) vidimo da je polje strujanja umjerenih širina na sinoptičkoj skali u svakom trenutku definirano poljem tlaka. Odnos između polja tlaka i polja geostrofičkog vjetra ilustriran je na slici 7.9.



Slika 7.9. Odnos između polja tlaka i geostrofičkog vjetra. Vektor geostrofičkog vjetra paralelan je s izobarama, tako da je niži tlak s njegove lijeve strane.

Treba imati na umu da geostrofički vjetar možemo koristiti kao aproksimaciju stvarnog horizontalnog strujanja samo za gibanja u slobodnoj atmosferi na velikoj skali umjerenih širina (daleko od ekvatora). U umjerenim širinama stvarni vjetar odstupa od geostrofičkog oko 10-15%. U atmosferskom graničnom sloju, koji je pod velikim utjecajem podloge (pa je tu trenje jače trenje i ne smijemo ga zanemariti), horizontalno strujanje na sinoptičkoj skali još više odstupa od geostrofičkog, pa ne možemo koristiti geostrofičku aproksimaciju. Kao što je ilustrirano na analitičkoj karti⁵ (slika 7.10.), stvarni vjetar pri tlu na sinoptičkoj skali odstupa od geostrofičkog. Ipak, na velikom broju stanica uočava se da je strujanje približno paralelno s izobarama i to tako da je niži tlak s lijeve strane vektora vjetra.

Iz izraza za geostrofički vjetar ne možemo odrediti kako se vjetar mijenja u vremenu, pa prema tome ne možemo ni prognozirati strujanje u nekom budućem trenutku. Da bi jednadžbe bile prognostičke, moraju u sebi sadržavati komponente akceleracije. Iz tablice 2.1 vidimo da su članovi koji prikazuju akceleraciju u horizontalnim jednadžbama gibanja (I) za red veličine manji od doprinosa Coriolisove sile (V) i sile gradijenta tlaka (VI), ali su od 10^8 pa do 10^8 puta veći od preostalih članova II, III, IV i VII. Uvažavanjem članova akceleracije dobivamo **približne prognostičke jednadžbe** koje su bolja aproksimacija stvarnog horizontalnog strujanja od geostrofičke aproksimacije

$$\frac{Du}{Dt} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(v - v_g), \quad (7.2.21)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -f(u - u_g). \quad (7.2.22)$$

Jednadžbe (7.2.21)-(7.2.22) ne možemo koristiti u praksi za prognoziranje brzina, budući da su članovi akceleracije za red veličine manji od članova Coriolisove sile i sile gradijenta tlaka. Stoga bi sasvim male pogreške u mjerenjima tlaka ili mjerenjima brzine uzrokovale velike pogreške u proračunu akceleracije.

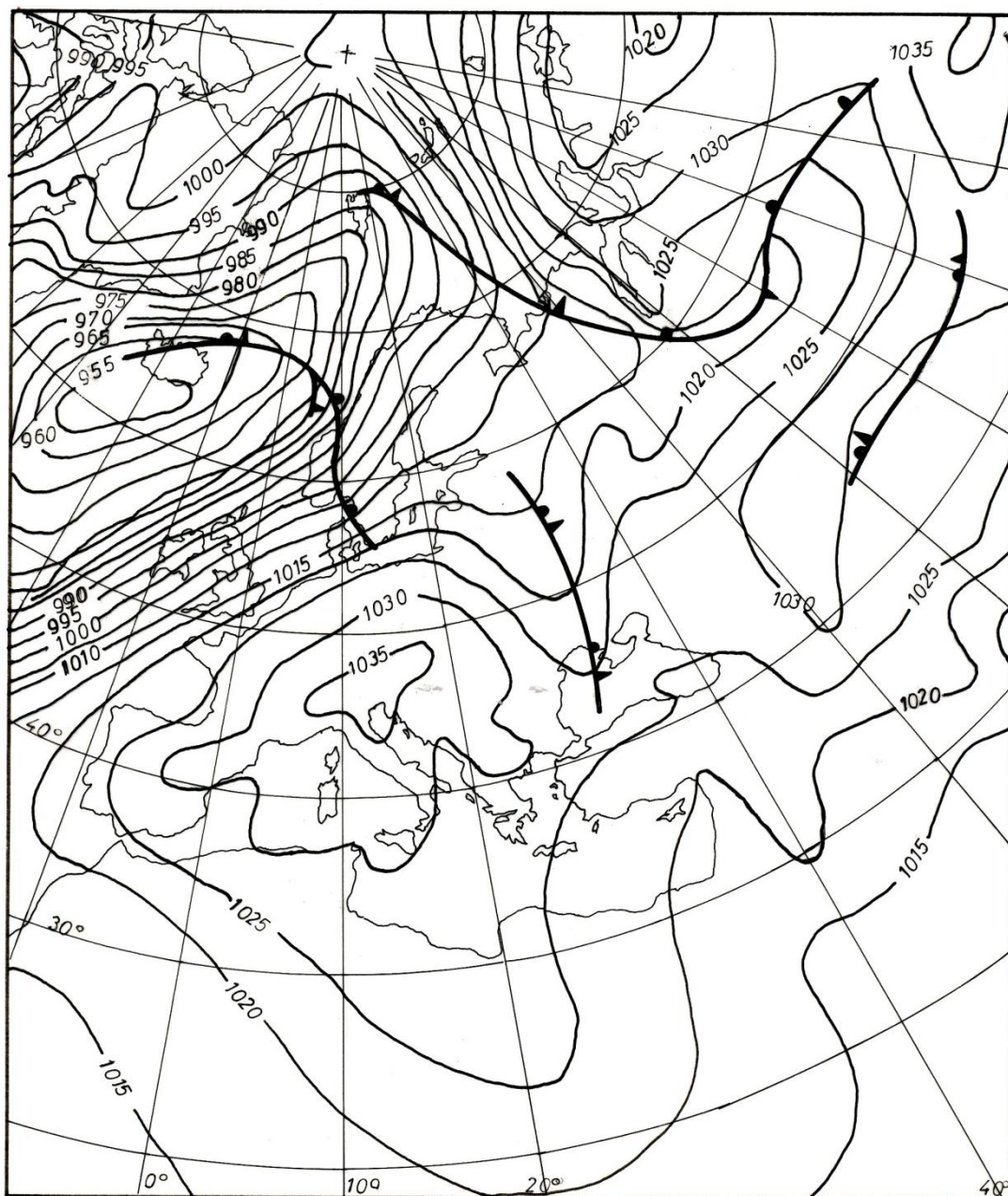
Valjanost geostrofičke aproksimacije možemo provjeriti pomoću **Rossbyjevog⁶ broja** Ro koji je definiran kao omjer magnituda akceleracije (U^2 / L) i Coriolisove sile ($f_0 U$)

⁵ onoj koja se temelji na analizi izmjerenih podataka

⁶ Carl-Gustaf Rossby (1898-1957), Švedski meteorolog rođen u Stocholmu. Najprije je pod mentorstvom Vilhelma Bjerknesa djelovao u Bergenu u Norveškoj, a kasnije u Sjedinjenim Američkim Državama. Njegov

$$Ro \equiv U / (f_0 L). \quad (7.2.23)$$

Iz definicije Rossbyjevog broja slijedi da je geostrofička aproksimacija to bolja što je Ro manji. U slučaju geostrofičke ravnoteže Coriolisova sila je uravnotežena sa silom što je gradijenta tlaka, pa tada nema akceleracije, odnosno $Ro = 0$. Stanje je to bliže ravnotežnom akceleracija manja.



znanstveni doprinos meteorologiji je izniman, a bavio se i fizikom oceana. Po njemu je nazvano više pojmova u meteorologiji poput ovdje navedenog *Rossbyjevog broja*, *Rossbyjevih valova* (koji će biti opisani kasnije) i *Rossbyjeve jednadžbe* (koja opisuje brzinu tih valova).

Slika 7.10. Prizemna analitička karta za Europu, te dio sjeverne Afrike i Azije za 5. veljače 1990. u 00 UTC.

7.3.2. Vertikalna jednadžba, hidrostatička aproksimacija

Analizom skala procijeniti ćemo sada doprinos pojedinih članova u vertikalnoj jednadžbi impulsa (7.2.17) na sinoptičkoj skali, kao što je prikazano u tablici 2.2. Budući da tlak opada približno za jedan red veličine od tla pa do tropopauze, skala vertikalnog gradijenta tlaka je P_0 / H , gdje je P_0 skala tlaka pri tlu (10^5 Pa), ρ_0 skala gustoće zraka pri tlu (1 kg m^{-3}), a H je skala visine troposfere. I ovdje pretpostavljamo gibanja na zemljopisnoj širini $\varphi = 45^\circ$.

Tablica 7.2. Analiza skala u vertikalnoj jednadžbi impulsa za gibanja na sinoptičkoj skali. I – vertikalna akceleracija, II – član zakrivljenosti zbog horizontalnog strujanja, III – Coriolisova akceleracija zbog horizontalnog strujanja, IV – akceleracija zbog sile gradijenta tlaka, V – akceleracija sile teže, VI – član molekularnog trenja.

	I	II	III	IV	V	VI
z komponenta	$\frac{Dw}{Dt}$	$-\frac{u^2 + v^2}{R_z} =$	$2\Omega u \cos \varphi$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$-g$	$(a_{tr})_z$
skale	$U W / L$	U^2 / R_z	$f_0 U$	$P_0 / (\rho_0 H)$	g	$\nu W / H^2$
red veličine (m s^{-2})	10^{-7}	10^{-5}	10^{-3}	10	10	10^{-15}

Analiza skala pokazuje da je na sinoptičkoj skali vertikalna komponenta sile gradijenta tlaka u ravnoteži sa silom težom. Budući da je doprinos ostalih članova je za četiri reda veličine manji, ova aproksimacija, koja se naziva **hidrostatička ravnoteža**, vrijedi na sinoptičkoj skali s velikom točnošću. I ovdje, kao i u slučaju horizontalnih jednadžbi, trenje (VI) možemo zanemariti. Uočavamo još da su vertikalni gradijenti tlaka vrlo veliki ($\partial p / \partial z \sim 10 \text{ m s}^{-2}$) u odnosu na horizontalne gradijente tlaka ($\partial p / \partial x, \partial p / \partial y \sim 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$). Ipak, za gibanja na sinoptičkoj skali važni su upravo horizontalni gradijenti tlaka, budući da su vertikalni uravnoteženi s vertikalnom komponentom sile gradijenta tlaka.

Nadalje, također vidimo da nam vertikalna jednadžba ne može poslužiti za prognozu vertikalnih brzina, jer je magnituda akceleracije jako mala u odnosu na ostale članove, pa bi sasvim male pogreške mjerenja tlaka i brzine dovele do enormnih pogrešaka u računu vertikalne akceleracije.

Premda iz analize vertikalne jednadžbe vidimo da je na sinoptičkoj skali vertikalna akceleracija za osam redova veličine manja od akceleracije sile teže, ta analiza nije dovoljna za zaključivanje o strujanju na sinoptičkoj skali. Strujanje na sinoptičkoj skali dominantno je horizontalno upravo zbog činjenice da su vertikalne komponente sila koje djeluju na česti zraka, premda su velikih magnituda, međusobno uravnotežene. Stoga strujanje, koje je horizontalno, mora biti posljedica horizontalnih varijacija tlaka. Zato trebamo pokazati da i same horizontalne varijacije tlaka zadovoljavaju uvjet hidrostatičke ravnoteže. Najprije definirajmo standardni tlak $p_0(z)$ kao horizontalno osrednjen tlak na visini z . Standardnom tlaku odgovara standardna gustoća $\rho_0(z)$, definirana tako da su $p_0(z)$ i $\rho_0(z)$ točno u hidrostatičkoj ravnoteži

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} \equiv -g. \quad (7.2.24)$$

Budući da $p_0(z)$ ovisi samo o z , ovdje umjesto $\partial p_0 / \partial z$ možemo pisati $d p_0 / dz$. Ukupna polja tlaka i gustoće možemo dalje prikazati ovako

$$p(x, y, z, t) = p_0(z) + p'(x, y, z, t), \quad (7.2.25)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t),$$

gdje su p' i ρ' odstupanja od standardnih vrijednosti tlaka i gustoće. Za mirnu atmosferu p' i ρ' moraju biti jednaki nuli. Pretpostavimo da su odstupanja tlaka i gustoće puno manja od njihovih standardnih vrijednosti. Tada je $|p'| / \rho_0 \ll 1$ i $|\rho'| / \rho_0 \ll 1$. Nadalje $(\rho_0 + \rho')^{-1}$ možemo pisati ovako

$$(\rho_0 + \rho')^{-1} = \rho_0^{-1} (1 + \rho' / \rho_0)^{-1}.$$

Razvijemo $(1 + \rho' / \rho_0)^{-1}$ u red. Budući je magnituda ρ' / ρ_0 mala, više potencije od ρ' / ρ_0 možemo zanemariti, pa dobivamo

$$(1 + \rho' / \rho_0)^{-1} \cong (1 - \rho' / \rho_0),$$

odnosno

$$(\rho_0 + \rho')^{-1} \cong \rho_0^{-1} (1 - \rho' / \rho_0). \quad (7.2.26)$$

Sada pomoću jednadžbi (7.2.24) - (7.2.26) želimo odrediti $(-1 / \rho) \partial p / \partial z$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') - g = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \left(\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} \right) - g = \\ &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \left(-g\rho_0 + \frac{\partial p'}{\partial z} \right) - g = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \left(-g\rho_0 + \frac{\partial p'}{\partial z} + g\rho_0 + g\rho' \right) = \\ &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} + g\rho' \right) \cong -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} \right) \left(\frac{\partial p'}{\partial z} + g\rho' \right) \end{aligned}$$

Budući da je $1 - \rho' / \rho_0 \approx 1$, dalje dobivamo

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \approx -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial z} + g\rho' \right). \quad (7.2.27)$$

Na sinoptičkoj skali članovi u jednadžbi (7.2.27) imaju ove magnitude

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} \sim \frac{\delta P}{\rho_0 H} \sim \frac{10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}}{10^4 \text{ m}} = 10^{-1} \text{ m s}^{-2},$$

$$\frac{\rho' g}{\rho_0} \sim 10^{-1} \text{ m s}^{-2},$$

gdje je $\delta P / \rho_0$ skala horizontalne fluktuacije tlaka, a ρ' / ρ_0 skala horizontalne fluktuacije gustoće koja je na sinoptičkoj reda veličine 10^{-2} . Kao i u slučaju horizontalnih fluktuacija tlaka δP i horizontalne fluktuacije gustoće ρ' podijeljene su s gustoćom ρ_0 kako bi dobili procjenu skale koja vrijedi na svim visinama u troposferi. (Razlog tome je što i tlak i gustoća eksponencijalno opadaju visinom, pa su stoga u manjim visinama horizontalne fluktuacije δP i ρ' po magnitudama bitno veće nego u većim visinama nad tlom). Usporedba magnituda članova $\rho_0^{-1} \partial p' / \partial z$ i $\rho' g \rho_0^{-1}$ pokazuje da su horizontalne perturbacije tlaka u hidrostatičkoj ravnoteži s horizontalnim perturbacijama gustoće. To je ujedino i razlog činjenici da su vertikalne akceleracije na sinoptičkoj skali zanemarivo male, te stoga vertikalne brzine ne možemo odrediti direktno iz vertikalne jednadžbe gibanja. Ipak, polje vertikalnih brzina može se odrediti na indirektan način, kao što će biti pokazano u jednom od kasnijih poglavlja.

Zadaci

7.3.1. Procijeni magnitude članova u jednadžbama gibanja za tipični tornado. Da li tada vrijedi hidrostatička aproksimacija? Tipične skale varijabli za tornado navedene su u tablici. Kinematička viskoznost za suhi zrak je reda veličine $\nu \sim 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

$U \sim 10^2 \text{ m s}^{-1}$	skala horizontalne brzine
$W \sim 10 \text{ m s}^{-1}$	skala vertikalne brzine
$L \sim 10^2 \text{ m}$	skala duljine
$H \sim 10^4 \text{ m}$	skala visine
$\delta P \sim 40 \text{ hPa}$	skala horizontalnih fluktuacija tlaka

(Rješenje: Znamo tipične vrijednosti gustoće i tlaka pri tlu $\rho_0 = 1 \text{ kg m}^{-3}$, $p_0 = 1000 \text{ hPa}$, te Coriolisov parametar za umjerene širine $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, a srednji radijus Zemlje je $R_z = 6371 \text{ km}$. Skala horizontalnih fluktuacija tlaka pogodna za procjenu magnituda na svim visinama u troposferi je $\delta P / \rho_0 = 4 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, a vremenska skala je $L/U \sim 1 \text{ s}$. Analizom horizontalnih jednadžbi impulsa dobivamo ove vrijednosti članova:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
x komponenta	$\frac{Du}{Dt}$	$-\frac{uvtg\varphi}{R_z}$	$+\frac{uw}{R_z}$	$= -2\Omega w \cos \varphi$	$+2\Omega v \sin \varphi$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$(a_r)_x$
y komponenta	$\frac{Dv}{Dt}$	$+\frac{u^2tg\varphi}{R_z}$	$+\frac{vw}{R_z}$	$=$	$-2\Omega u \sin \varphi$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$(a_r)_y$
skala	U^2/L	U^2/R_z	UW/R_z	f_0W	f_0U	$\delta P/\rho L$	$\nu U/H^2$
red veličine (m s^{-2})	10²	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10	10^{-11}

Vidimo da za tornado ne vrijedi geostrofička aproksimacija, jer je Coriolisova sila, zbog malih horizontalnih dimenzija tornada (za tornado je $L \sim 10^2 \text{ m}$, dok je za sinoptičku skalu $L \sim 10^6 \text{ m}$), zanemarivo mala mala u odnosu na silu gradijenta tlaka. Nadalje, članovi zakrivljenosti (II i III) također su zanemarivo mali u odnosu na akceleraciju i član sile gradijenta tlaka. Molekularno trenje (VII) i ovdje je zanemarivo, kao i u većini budućih razmatranja. (Molekularno trenje u dinamičkoj meteorologiji važno je samo kod proučavanja turbulentnih gibanja i to u prvih nekoliko cm nad tlom.)

Analizom vertikalne jednadžbe dobivamo ove vrijednosti:

	I	II	III	IV	V	VI
z komponenta	$\frac{Dw}{Dt}$	$-\frac{u^2 + v^2}{R_z} =$	$2\Omega u \cos \varphi$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$-g$	$(a_w)_z$
skala red veličine (m s^{-2})	UW/L 10	U^2/R_z 10^{-3}	$f_0 U$ 10^{-2}	$P_0 / (\rho_0 H)$ 10	10	vW/H^2 10^{-12}

U slučajevima u kojima vrijedi hidrostatička aproksimacija, vertikalna akceleracija mora biti ~ 0 , a vertikalna komponenta sile gradijenta tlaka, unatoč svojoj velikoj magnitudi mora biti uravnotežena sa silom težom, dok su magnitude preostalih članova u vertikalnoj jednadžbi zanemarivo male. Vidimo da u slučaju tornada hidrostatička aproksimacija ne vrijedi, jer je vertikalna akceleracija Dw / Dt po magnitudi usporediva s akceleracijom sile teže i vertikalnom komponentom akceleracije sile gradijenta tlaka.)

7.3.2. Analizom skala odredi moguća pojednostavljenja u uraganu. Da li za uragan vrijedi hidrostatička aproksimacija? Tipične skale varijabli za nalaze se u tablici.

$U \sim 50 \text{ m s}^{-1}$	skala horizontalne brzine
$W \sim 1 \text{ m s}^{-1}$	skala vertikalne brzine
$L \sim 100 \text{ km}$	skala duljine
$H \sim 10 \text{ km}$	skala visine
$\delta P \sim 40 \text{ hPa}$	skala horizontalnih fluktuacija tlaka

(Rješenje: Analizom horizontalnih jednadžbi impulsa dobivamo ove vrijednosti članova:

	I	II	III	IV	V	VI	VII
x komponenta	$\frac{Du}{Dt}$	$-\frac{uvtg\varphi}{R_z} + \frac{uw}{R_z} =$	$-2\Omega w \cos \varphi$	$+2\Omega v \sin \varphi$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$		$(a_w)_x$
y komponenta	$\frac{Dv}{Dt}$	$+\frac{u^2tg\varphi}{R_z} + \frac{vw}{R_z} =$		$-2\Omega u \sin \varphi$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$		$(a_w)_y$
skala red veličine (m s^{-2})	U^2/L 10⁻²	U^2/R_z 10^{-4}	UW/R_z 10^{-6}	$f_0 W$ 10^{-4}	$f_0 U$ 10^{-3}	$\delta P / (\rho_0 L)$ 10⁻²	vU/H^2 10^{-12}

gdje je $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, kinematička viskoznost za suhi zrak je $\nu \sim 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, tlak i gustoća zraka pri tlu su $p_0 = 1000 \text{ hPa}$ i $\rho_0 = 1 \text{ kg m}^{-3}$, a srednji radijus Zemlje je $R_z = 6371 \text{ km}$. Odatle vidimo da za uragan ne vrijedi geostrofička ravnoteža, već je horizontalna akceleracija približno jednaka akceleraciji horizontalne komponente sile gradijenta. Zbog male horizontalne skale L Coriolisova sila je za red veličine manja od horizontalne komponente sile gradijenta tlaka, a članovi zakrivljenosti (II i III) su još manji.

Iz vertikalne jednadžbe dobivamo:

	I	II	III	IV	V	VI
z komponenta	$\frac{Dw}{Dt}$	$-\frac{u^2 + v^2}{R_z} =$	$2\Omega u \cos \varphi$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$-g$	$(a_w)_z$
skala	UW/L	U^2/R_z	$f_0 U$	$P_0 / (\rho_0 H)$	g	$\nu W / H^2$
red veličine ($m s^{-2}$)	10^{-4}	10^{-4}	10^{-3}	10	10	10^{-13}

Dakle, za uragan vrijedi hidrostatička aproksimacija.)