Zadatak 3.4.4. Izračunajte sljedeće integrale.

(a) $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

(b) $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx, \quad a, b > 0$

Rješenje. (a) Kako je funkcija pod integralom parna funkcija, imamo

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx.$$

Stavimo $f(z) = 1/z$ i vidimo

$$\max_{|z|=R} |f(z)| = 1/R \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

pa po Jordanovoj lemi slijedi

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$$

Funkcija

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

ima na realnoj osi pol prvog reda u točki 0. Budući da su svi njeni singulariteti na realnoj osi polovi prvog reda, po metodi opisanoj prije ovog zadatka, koja zaobilazi singularitete na realnoj osi, imamo

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i \operatorname{res}(F, 0) = \pi i \frac{e^{iz}}{1}\bigg|_{z=0} = \pi i.$$

Sada slijedi $I = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\pi i) = \frac{\pi}{2}$.

(b) Stavimo

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+b^2)}, \; F(z) = f(z)e^{iaz}.$$

Singulariteti su $z_1 = 0, \; z_{2,3} = \pm bi$, a to su polovi prvog reda. Vrijedi

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \le \frac{1}{R(R^2-b^2)} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

pa po Jordanovoj lemi vrijedi $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F = 0$. Sada je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = 2\pi i \operatorname{res}(F, bi) + \pi i \operatorname{res}(F, 0).$$

Računamo:

$$\operatorname{res}(F, bi) = \lim_{z\to bi}(z-bi)\frac{e^{iaz}}{z(z-bi)(z+bi)} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2}$$

$$\operatorname{res}(F, 0) = \lim_{z\to 0} z\frac{ze^{iaz}}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2}$$

Budući da je funkcija pod integralom parna funkcija, imamo

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^\infty F(x)\,dx = \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab}).$$

□

Zadatak 3.4.5. Izračunajte integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2(x^2+b^2)}\,dx, \quad a, b > 0.$$

Rješenje. Stavimo

$$f(z) = \frac{\sin az}{z^2(z^2+b^2)}, \ F(z) = e^{iaz} f(z).$$

Vrijedi

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2(x^2+b^2)}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^\infty F(x)dx\right).$$

Ne možemo se tek tako pozvati na Jordanovu lemu jer ne vrijedi

$$\lim_{R\to\infty} \max_{z\in C_R} |f(z)| = 0.$$

Da biste to vidjeli, promotrite na primjer taj limes za $z = iR$ kad $R \to \infty$. Napišimo sad

$$F(z) = \frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{2i} \cdot \frac{e^{iaz}}{z^2(z^2+b^2)} = \frac{e^{2iaz}}{2iz^2(z^2+b^2)} - \frac{1}{2iz^2(z^2+b^2)}.$$

Budući da je

$$\max_{z\in\mathbb{C}_R} \left|\frac{1}{z^2(z^2+b^2)}\right| \le \frac{1}{2R^2(R^2-b^2)} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

po Jordanovoj lemi slijedi da $\displaystyle\int_{C_R} \frac{e^{2iaz}}{2iz^2(z^2+b^2)}dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$. Budući da je

$$R\cdot\max_{z\in\mathbb{C}_R} \left|\frac{1}{z^2(z^2+b^2)}\right| \le \frac{R}{2R^2(R^2-b^2)} \xrightarrow{R\to\infty}, 0$$

po Jordanovoj lemi slijedi da $\displaystyle\int_{C_R} \frac{1}{2iz^2(z^2+b^2)}dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$.

Dakle, imamo

$$\int_{C_R} F(z)dz \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Funkcija F ima singularitete $0, \pm bi$. Za singularitete $\pm bi$ je očito da su polovi prvog reda. Za singularitet 0 možemo napisati:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{e^{2iaz} - 1}{2iz^2(z^2+b^2)} \\ &= \frac{1}{2iz^2(z^2+b^2)} \sum_{n=1}^\infty \frac{(2iaz)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{z^2+b^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{(2i)^{n-1}a^n}{n!} z^{n-2} \end{aligned}$$

iz čega vidimo da je 0 također pol prvog reda. Sada možemo iskoristiti formulu:

$$I = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(2\pi i\,\mathrm{res}(F, bi) + \pi i\,\mathrm{res}(F, 0)\right).$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(F, bi) &= \lim_{z\to bi}(z-bi)F(z) \\
&= \lim_{z\to bi}(z-bi)\frac{\sin az}{z^2}\cdot\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} \\
&= \lim_{z\to bi}\frac{\sin az}{z^2}\cdot\frac{e^{iaz}}{z+bi} \\
&= \frac{\sin(abi)}{(bi)^2}\cdot\frac{e^{-ab}}{2bi} = \frac{i\operatorname{sh}(ab)}{-b^2}\cdot\frac{e^{-ab}}{2bi} \\
&= \frac{e^{-2ab}-1}{4b^3} \\
\operatorname{res}(F, 0) &= \lim_{z\to 0} zF(z) \\
&= \lim_{z\to 0} z\frac{\sin az}{z^2}\cdot\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\sin az}{z}\cdot\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2} \\
&= a\cdot\frac{1}{b^2}.
\end{aligned}$$

Konačno,

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(2\pi i\frac{e^{-2ab}-1}{4b^3} + \pi i\frac{a}{b^2}\right) = \frac{\pi}{4b^3}\left(e^{-2ab-1} + 2ab\right).$$

□

Zadatak 3.4.6. Izračunajte integral

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

Rješenje. Stavimo

$$f(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Vidimo da je f racionalna funkcija, s jedinim singularitetom u točki -1, koja nije u $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Za $|x| \geq 2$ vrijedi

$$|f(x)| = \frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{|x|-1} \leq \frac{1}{\frac{|x|}{2}} = \frac{2}{|x|}.$$

Označimo

$$F(z) = \frac{f(z)}{|z|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\arg z}{2}}},$$

za $\arg z \in \langle 0, 2\pi\rangle$, kako je objašnjeno u metodi ispred ovog zadatka. Sada možemo primijeniti formulu za $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\cdot\frac{1}{2}}}\operatorname{res}\left(\frac{1}{\sqrt{z}(z+1)}, -1\right) \\
&= \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}}\lim_{z\to -1}\left((z+1)\frac{1}{\sqrt{z}(z+1)}\right) \\
&= \frac{2\pi i}{1-(-1)}\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{2\pi i}{2}\cdot\frac{1}{i} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Ovdje je $\sqrt{-1} = i$, jer je ta grana drugog korijena odabrana kad smo definirali funkciju F. □