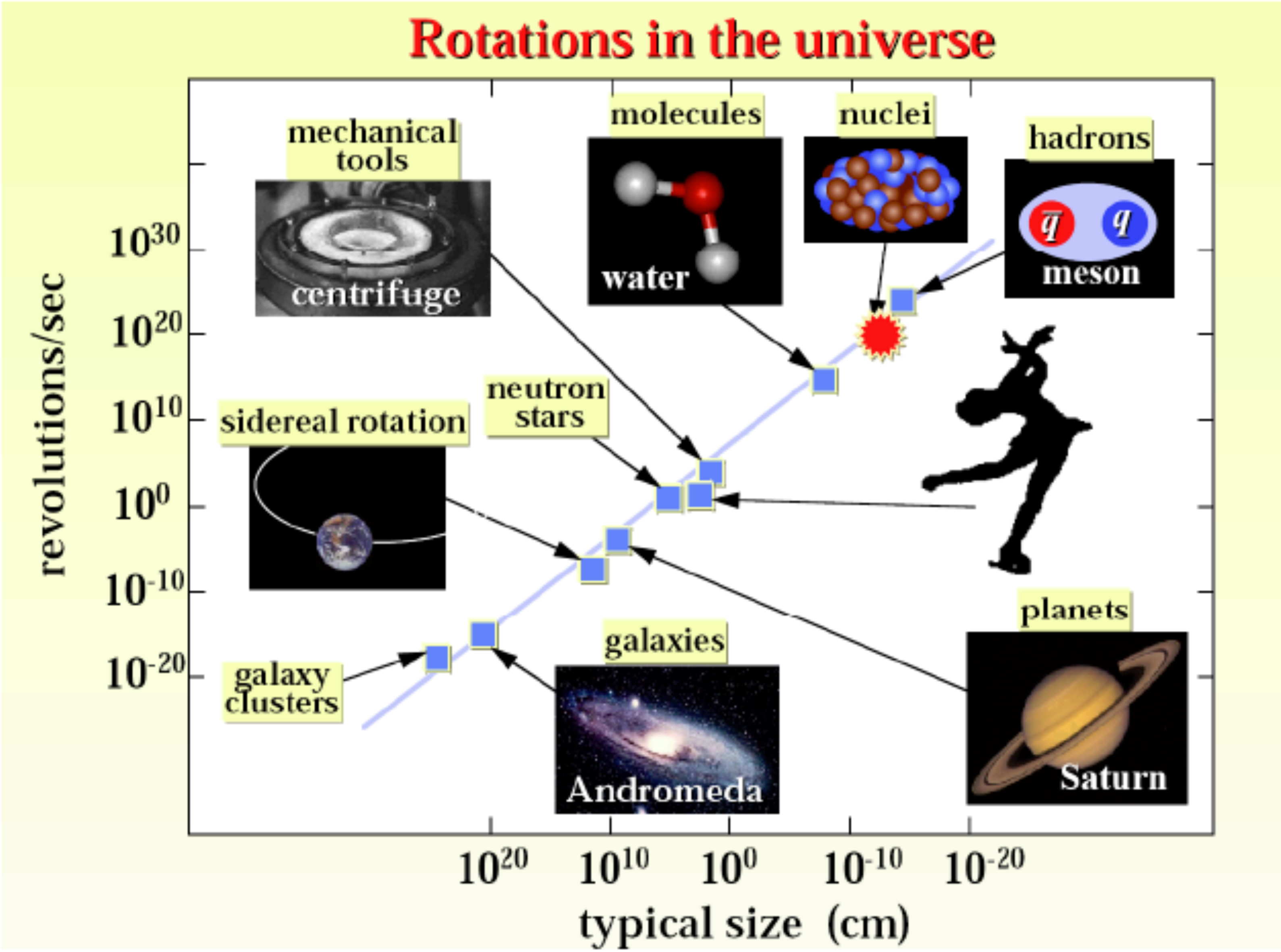
ROTACIJE


Rotations in the universe
revolutions/sec
10^30
10^20
10^10
10^0
10^-10
10^-20
typical size (cm)
10^20
10^10
10^0
10^-10
10^-20
mechanical tools
centrifuge
molecules
water
nuclei
hadrons
meson
neutron stars
sidereal rotation
galaxy clusters
galaxies
Andromeda
planets
Saturn

MODEL ROTACIJA

DEFORMACIJA

Sferične jezgre nalazimo oko punih ljusaka. U jezgrama koje imaju nepopunjene ljuske, kvadrupolna interakcija valentnih protona i neutrona uzrokuje deformaciju srednjeg polja.

Općenito je površina jezgre opisana funkcijom polumjera:

$$R(\theta,\phi) = R_0\left(1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right)$$

parametri deformacije u sustavu laboratorija

Za λ=2 imamo 5 parametara $\alpha_{2\mu}$ za μ=−2, −1,0,+1, +2. Odgovarajućom rotacijom možemo izvesti transformaciju iz laboratorijskog sustava u intrinsični sustav jezgre gdje osi 1,2,3 odgovaraju glavnim osima distribucije mase jezgre. Parametri deformacije se transformiraju na rotaciju koordinatnog sustava isto kao kugline funkcije:

Lab. sustav

$$a_{\lambda\mu} = \sum_{\mu'} D^{\lambda}_{\mu'\mu}(\Omega)\,\alpha_{\lambda\mu'}$$

Intrinsični sustav

Wigner funkcija
(matrica rotacije, ovisi o Eulerovim kutevima (α ,β,ϒ) – Wong - Appendix A))

Transformacijom u intrinsični sustav jezgre (1,2,3)
5 koeficijenata $\alpha_{2\mu}$ se reduciraju u dvije nezavisne varijable

$$a_{22} = a_{2-2}, \quad a_{20}, \quad a_{21} = a_{2-1} = 0$$

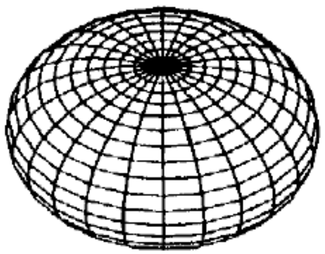
+ 3 Eulerova kuta koji opisuju orijentaciju jezgre u sustavu laboratorija.

Hill-Wheeler koordinate (β,γ) :

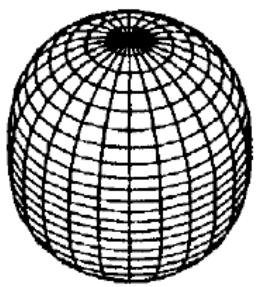
$$\boxed{\begin{aligned} a_{20} &= \beta\ cos\gamma \\ a_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\ sin\gamma \end{aligned}}$$

Parametar β određuje mjeru deformacije jezgre.
Parametar γ opisuje odstupanje od aksijalne simetrije.

$$\sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2 = a_{20}^2 + 2a_{22}^2 = \beta^2$$



β<0, γ=0



β>0, γ=0

Površina jezgre izražena preko Hill-Wheeler koordinata (β,γ) (izvedeno koristeći izraze za $a_{20}, a_{2\pm2}$ i kugline funkcije $Y_{20}, Y_{2\pm2}$) :

$$R(\theta,\phi) = R_0\{1+\beta\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(cos\gamma(3cos^2\theta-1)+\sqrt(3)\sin\gamma\sin^2\theta cos2\phi\right)\}$$

INKREMENTI POLUOSI:

$$\delta R_1 = R(\tfrac{\pi}{2},0)-R_0 = R_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\ cos(\gamma-\frac{2\pi}{3})$$

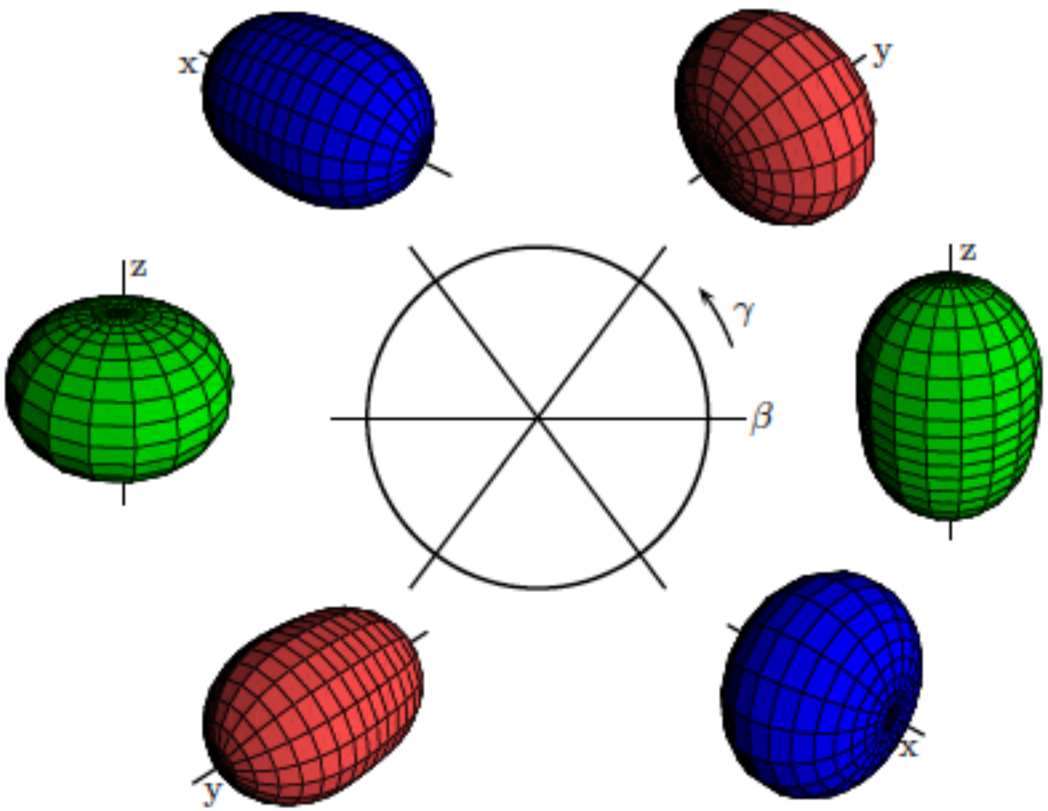
$$\delta R_2 = R(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})-R_0 = R_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\ cos(\gamma+\frac{2\pi}{3})$$

$$\delta R_3 = R(0,0)-R_0 = R_0\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\ cos\gamma$$

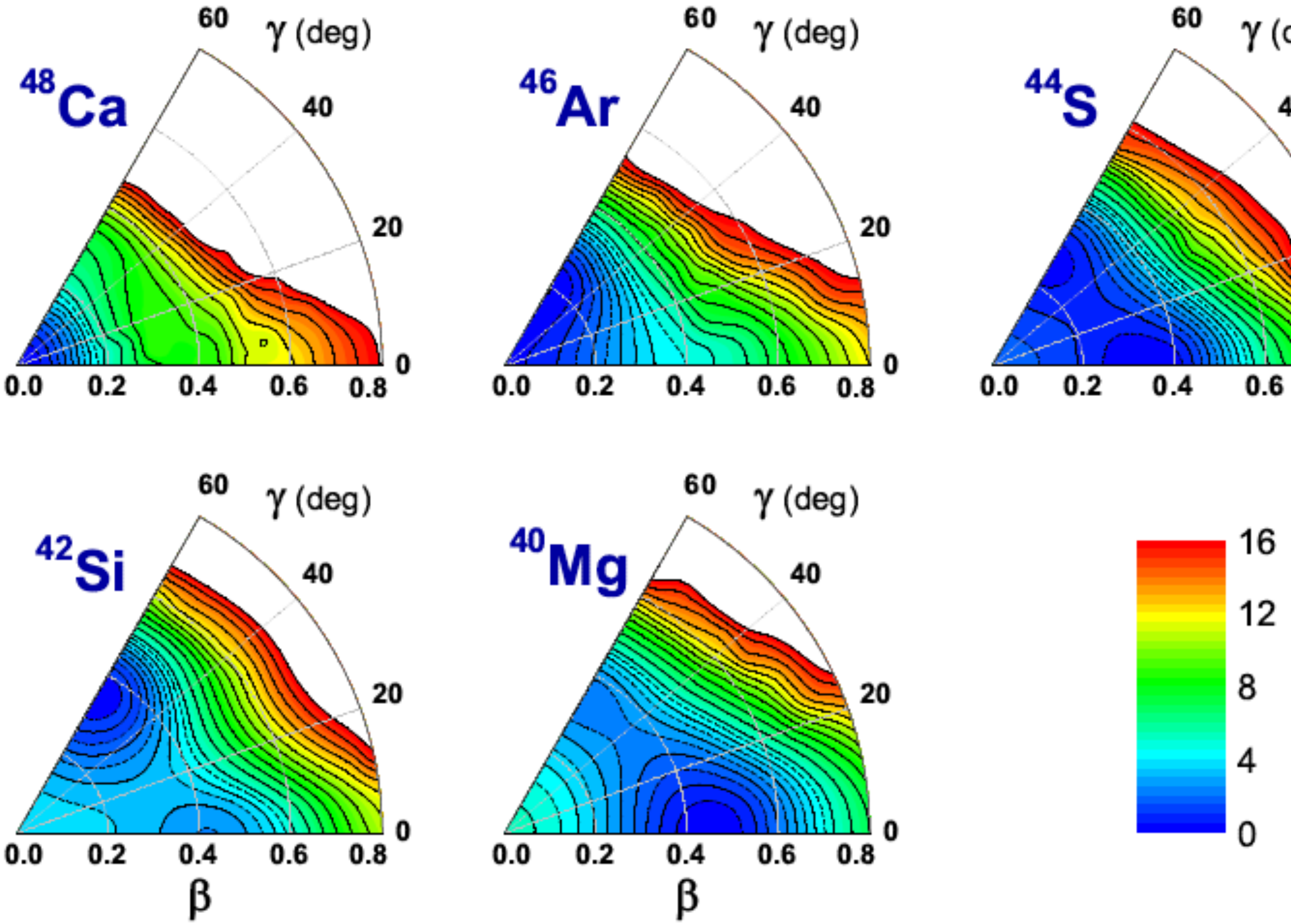
AKSIJALNA SIMETRIJA: $\gamma = n\pi/3$

TRIAKSIJALNI OBLICI: $\gamma \neq n\pi/3$

Hill-Wheeler koordinate (β,γ)
Oblici za kvadrupolnu deformaciju prikazani za β=0.4 i $\gamma = n\pi/3$ (n=0,1,2,3,4,5)



Evolucija oblika jezgara u lancu N=28 izotona (energije normirane prema globalnom minimumu):



^{44}S: koegzistencija dva minimuma $(\beta, \gamma) = (0.34, 0^\circ)$ i $(0.27, 60^\circ)$
^{42}Si: duboki minimum $(\beta, \gamma) = (0.35, 60^\circ)$

Z. P. Li et al., Phys. Rev. C 84, 054304 (2011)

Francais English

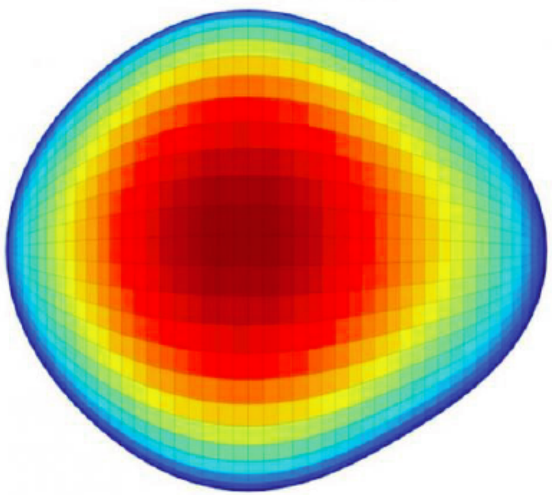
CERN press office

Navigation

First observations of short-lived pear-shaped atomic nuclei

L. P. Gaffney et al., *Nature* **497**, 199–204 (2013).

08 May 2013



(http://press.web.cern.ch/sites/press.web.cern.ch/files/pear-shape.jpg)

The shape of ^{224}Ra deduced from the CERN measurements

Geneva, 8 May 2013. An international team at the ISOLDE radioactive-beam facility at CERN[1] has shown that some atomic nuclei can assume asymmetric, "pear" shapes. The observations contradict some existing nuclear theories and will require others to be amended. The results are published in the journal *Nature* on 8 May 2013.

BOHROV HAMILTONIJAN

Klasična rotacija => angularni moment proporcionalan je angularnoj brzini

$$\boxed{\vec{J} = \mathcal{I}\vec{\omega}}$$

Energija rotacije:

$$\boxed{E_J = \frac{1}{2}\mathcal{I}\omega^2 = \frac{1}{2\mathcal{I}}J^2}$$

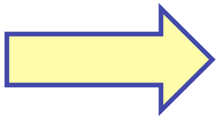
Model kapljice ima stabilno ravnotežno stanje samo za sferični oblik. Kvadrupolna deformacija osnovnog stanja => jezgra može rotirati.

Kvantno-mehanički sistem koji ima os simetrije (npr. z-os) opisan je valnom funkcijom koja je svojstveni vektor operatora J_Z. Svaka rotacija oko osi simetrije daje samo fazu valnoj funkciji. Sistem koji rotira oko osi simetrije ima jednaki modul valne funkcije i jednaku energiju.

Fizikalno opservabilne su rotacije oko osi okomite na os simetrije. Dinamička varijabla je orijentacija osi simetrije u prostoru.

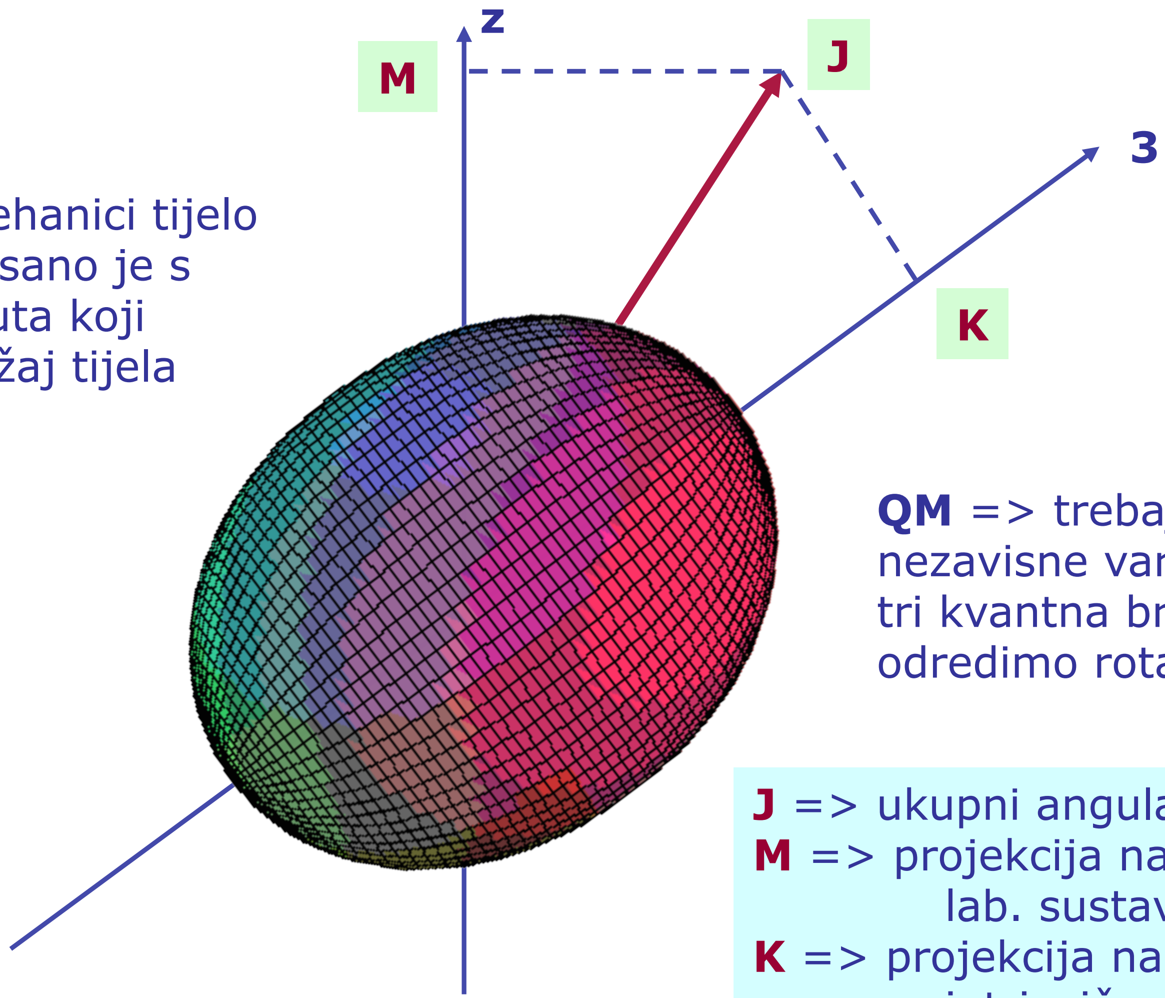
(1,2,3): OSI INTRINSIČNOG SUSTAVA
(x,y,z): OSI LABORATORIJSKOG SUSTAVA

AKSIJALNA SIMETRIJA: $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}$



$$T_{\mathrm{ROT}} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}}(\vec{J}^{\,2} - J_3^2) + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}_3} J_3^2$$

U klasičnoj mehanici tijelo koje rotira opisano je s tri Eulerova kuta koji određuju položaj tijela u prostoru.



QM => trebaju nam tri nezavisne varijable, odnosno tri kvantna broja da potpuno odredimo rotaciono stanje.

J => ukupni angularni moment
M => projekcija na os kvantizacije lab. sustava
K => projekcija na os simetrije intrinsičnog sustava

POTENCIJALNA ENERGIJA:

$$V(\beta,\gamma) = \tfrac{1}{2}C_{20}(a_{20}(\beta,\gamma) - a_{20}^{0})^2 + C_{22}(a_{22}(\beta,\gamma) - a_{22}^{0})^2$$

Minimum pot. energije za deformaciju: (β_0, γ_0)

Pobuđenja su **rotacije i vibracije** oko ove ravnotežne deformacije.

Transformacija kinetičke energije:
u intrinsični sustav

$$T = \frac{1}{2} D_2 \sum_{\mu} \left| \frac{d\alpha_{2\mu}}{dt} \right|^2$$

BOHROV HAMILTONIJAN

β-vibracije

$$T = T_{\mathrm{ROT}} + \frac{1}{2} D_2 (\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2)$$

γ-vibracije

Rotacije oko
osi intr. sustava

$$T_{\mathrm{ROT}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \mathcal{I}_k \omega_k^2$$

Momenti inercije:

$$\mathcal{I}_k = 4 D_2 \beta^2 \; sin^2 \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} k \right) \qquad k = 1, 2, 3$$

Stupnjevi slobode vibracija i rotacija vezani su ovisnošću momenata inercije o deformaciji (β,γ).

ROTACIONA VALNA FUNKCIJA

intrinsična funkcija

Svojstvena funkcija kolektivnog Hamiltonijana:

$$|\psi_{JM}> = \sum_K g_K(\beta,\gamma)|JMK>$$

$g_K(\beta,\gamma)$ Intrinsična valna funkcija opisuje strukturu (deformacije, vibracije) objekta koji rotira.

rotaciona funkcija: $|JMK> \quad \sim \quad D^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma)$

matrica transformacija sferičnih tenzora pri rotaciji za Eulerove kuteve

DEF.

$$\boxed{Y_{JK}(\theta',\phi') = \sum_M D^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma)Y_{JM}(\theta,\phi)}$$

Inverzija koordinatnog sustava:

$$D^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma) \ \xrightarrow[\mathbf{P}]{} \ (-1)^{J+K}D^J_{M-K}(\alpha,\beta,\gamma)$$

D-funkcija nema dobro definiran paritet jer K mijenja predznak inverzijom koordinatnih.

Da bi ukupna valna funkcija imala dobro definiran paritet => superpozicija D-funkcija s pozitivnim i negativnim K vrijednostima.

$$|JMK> = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2(1+\delta_{K0})}}\left[D^J_{MK}(\alpha,\beta,\gamma) \pm (-1)^{J+K} D^J_{M-K}(\alpha,\beta,\gamma)\right]$$

$$\boxed{K \geq 0}$$

pozitivni (negativni) paritet

ROTACIONA VRPCA

Grupa stanja koja pripadaju nekom intrinsičnom stanju (deformacija, β i/ili γ-vibracije), a razlikuju se po ukupnom angularnom momentu J. Rotacionu vrpcu određuju energije pobuđenja, statički momenti i vjerojatnosti pobuđenja.

Dozvoljene vrijednosti angularnih momenata (mogu se vidjeti iz valne funkcije):

$$\begin{cases} J = & 0, 2, 4, \ldots & \text{za } K^\pi = 0^+ \\ J = & 1, 3, 5, \ldots & \text{za } K^\pi = 0^- \\ J = & K, K+1, K+2, \ldots & \text{za } K > 0 \end{cases}$$

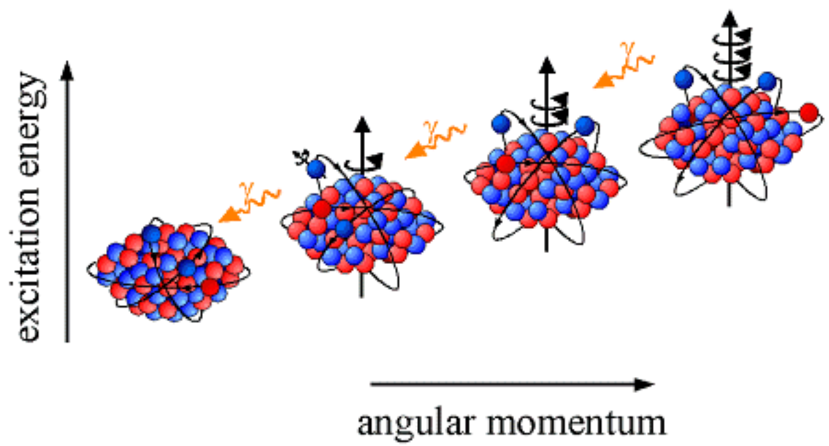
Energija stanja |JMK> u rotacionoj vrpci:

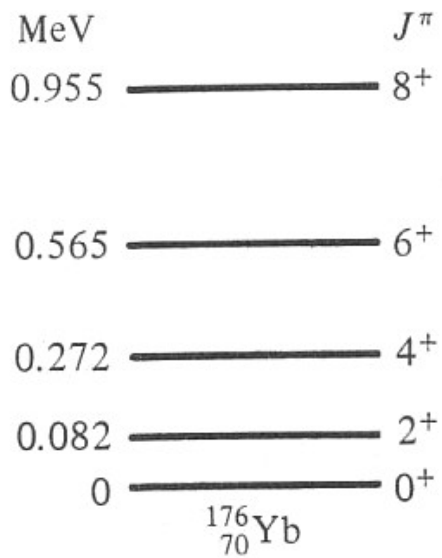
$$E_J = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} J(J+1)} + E_K$$

Određuje relativni položaj stanja unutar vrpce.

Doprinos intrinsičnog dijela valne funkcije. Određuje položaj glave vrpce.

Rotacione vrpce razlikuju se po momentima inercije i položaju glave vrpce. Obje ove veličine ovise o intrinsičnom stanju jezgre koja rotira.

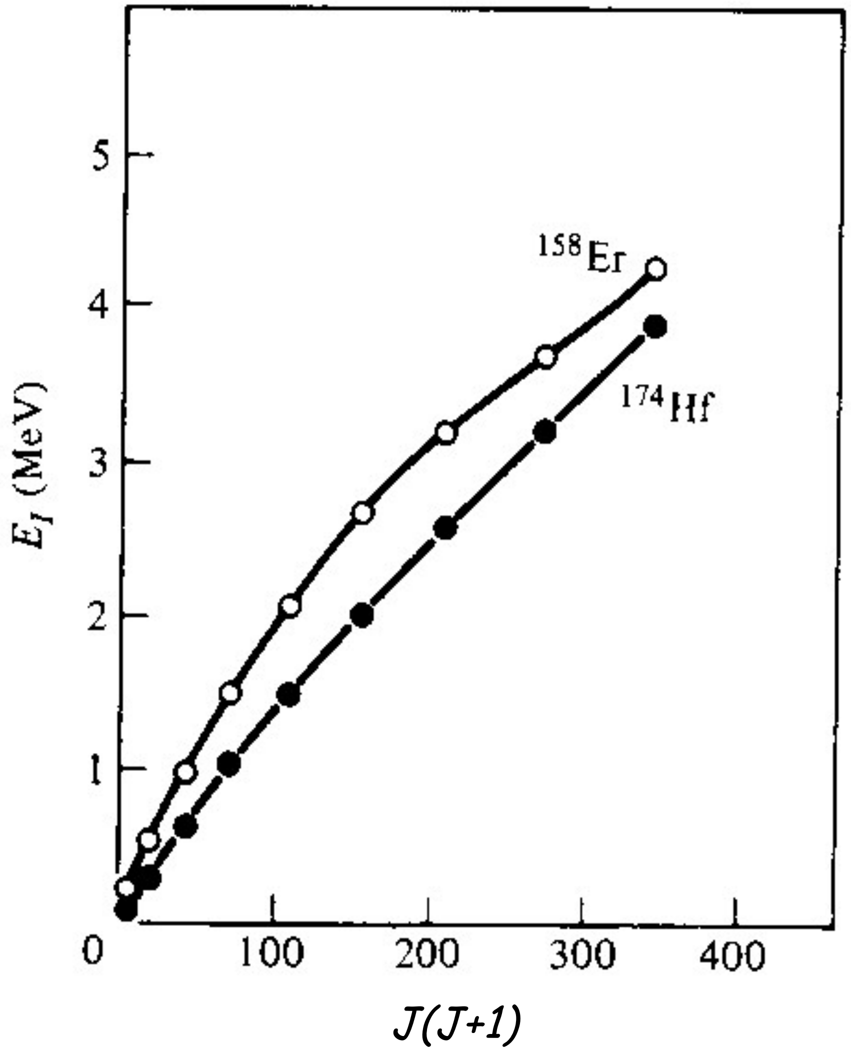




U slučaju krutog rotora $E(4^+)/E(2^+) \approx 4(4+1)/(2(2+1)) = 3.33$
(za razliku od harmoničkih oscilacija gdje bi omjer bio 2)

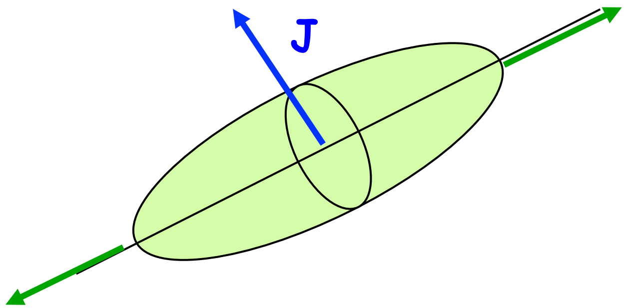
$(E(4^+)/E(2^+) = 3.31)$

Energija rotacione vrpce kao funkcija J(J+1):



$$E_J \sim \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} J(J+1)$$

≈ pravac za ^{174}Hf, ali nagib se smanjuje za ^{158}Er => moment inercije se povećava s porastom angularnog momenta.



Fluid koji rotira => povećanjem angularnog momenta dolazi do centrifugalnog rastezanja duž osi simetrije.

STANJA YRASTA

Stanja yrasta => najniže stanje za dani angularni moment (ili stanja najvišeg angularnog momenta na danoj energiji)

Duž rotacione vrpce yrasta jezgra je hladna, nema intrinsičnih pobuđenja, već je sva energija pobuđenja utrošena na generiranje angularnog momenta.