Metoda konačnih razlika

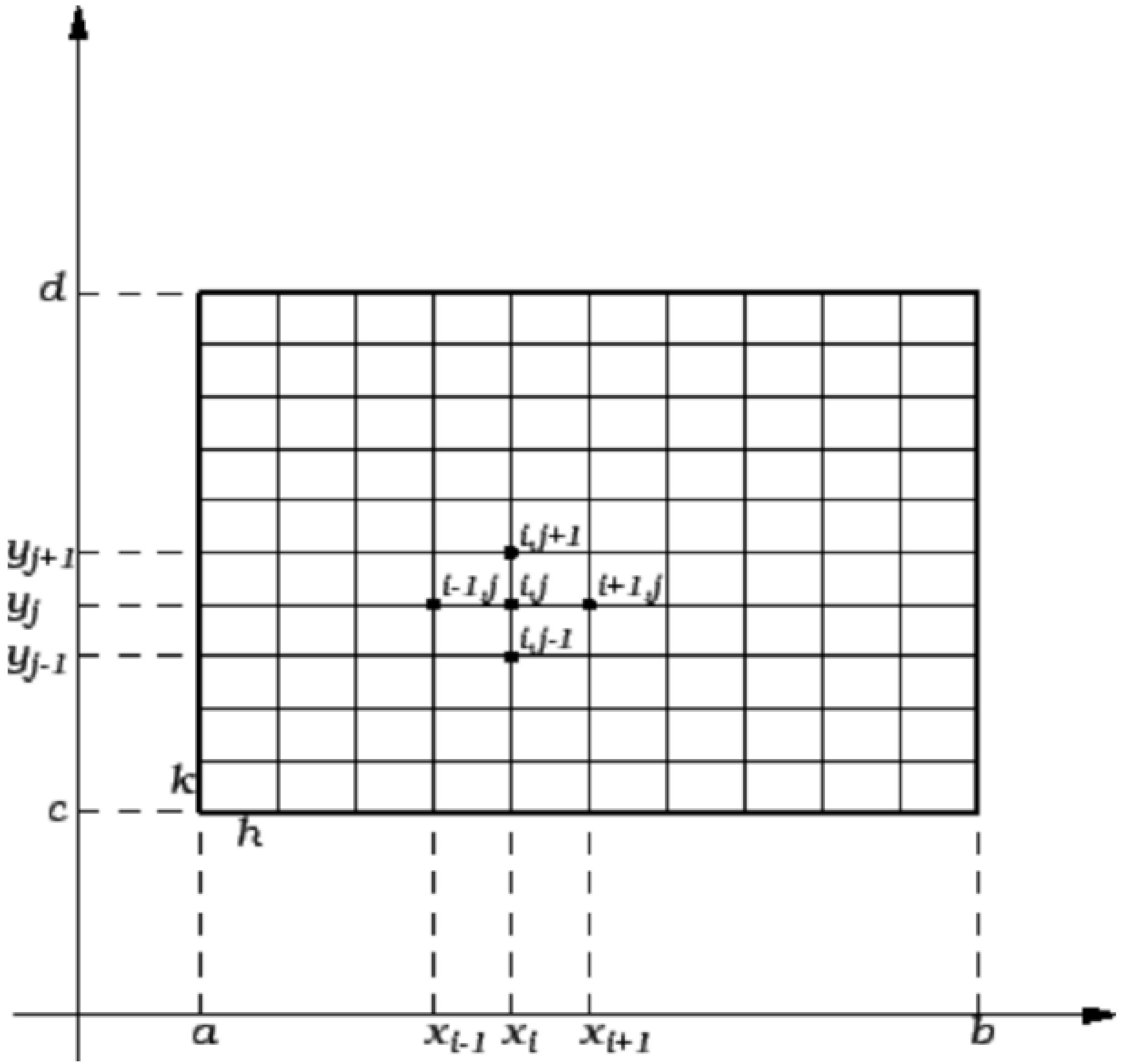
Vježbe iz Dinamičke meteorologije II

Metoda konačnih razlika

- numeričko rješavanje jednadžbi gibanja
- skup točaka u prostoru u kojima se računaju vrijednosti zavisno promjenjivih varijabli
- promatramo vrijednosti funkcije $u(x)$ u diskretnim točkama $x = i\Delta x$ mreže

→ $u_i = u_i(i\Delta x)$

- Δx udaljenost između dvije susjedne točke mreže
- za konstrukciju približnih jednadžbi koristi se metoda konačnih razlika



Metoda konačnih razlika

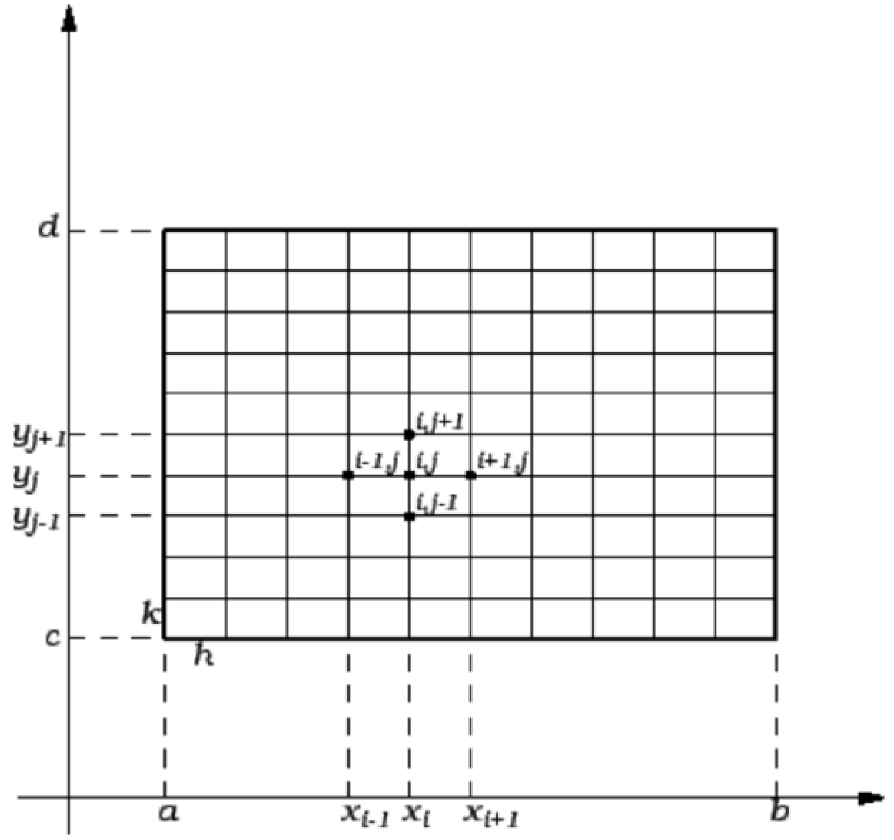
- osnovna ideja: zamijeniti derivacije s konačnim razlikama → (parcijalna) diferencijalna jednadžba svodi se na sustav algebarskih jednadžbi

- aproksimacija derivacije → centralne (središnje) konačne razlike:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

- aproksimacija derivacije → ne-centralne konačne razlike (gledamo dvije susjedne točke):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$



Primjeri

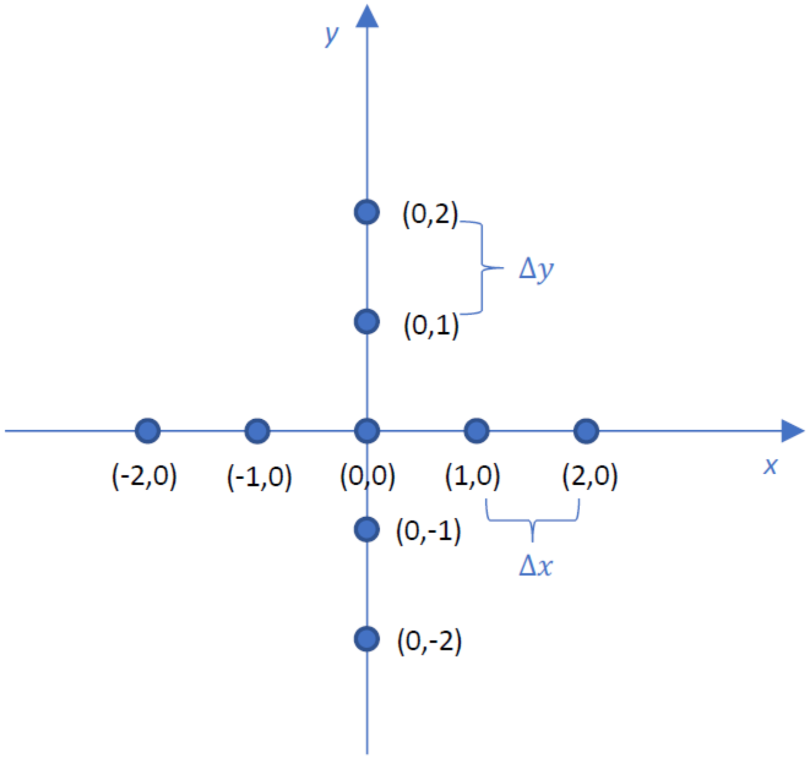
Primjer 1

Odrediti prvu i drugu derivaciju dvodimenzionalnog polja temperature $T(x, y)$ u točki (0,0), u x i y smjeru, uz pomoć centralnih konačnih razlika.

- prva derivacija:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(0,0)} = \frac{T(1,0) - T(-1,0)}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(0,0)} = \frac{T(0,1) - T(0,-1)}{2\Delta y}$$



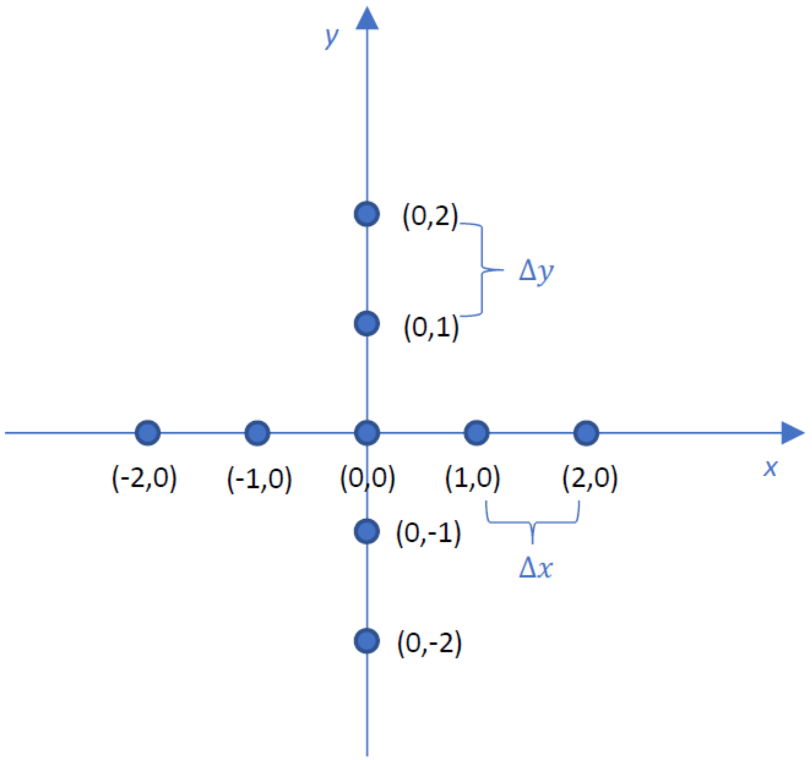
Primjer 1
Odrediti prvu i drugu derivaciju dvodimenzionalnog polja temperature $T(x,y)$ u točki (0,0), u x i y smjeru, uz pomoć centralnih konačnih razlika.

- druga derivacija u smjeru x-osi:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(0,0)} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(1,0)} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{(-1,0)}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{(0,0)} = \frac{\frac{T(2,0)-T(0,0)}{2\Delta x} - \frac{T(0,0)-T(-2,0)}{2\Delta x}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{(0,0)} = \frac{T(2,0)-2T(0,0)+T(-2,0)}{4\Delta x^2}$$



Primjer 1

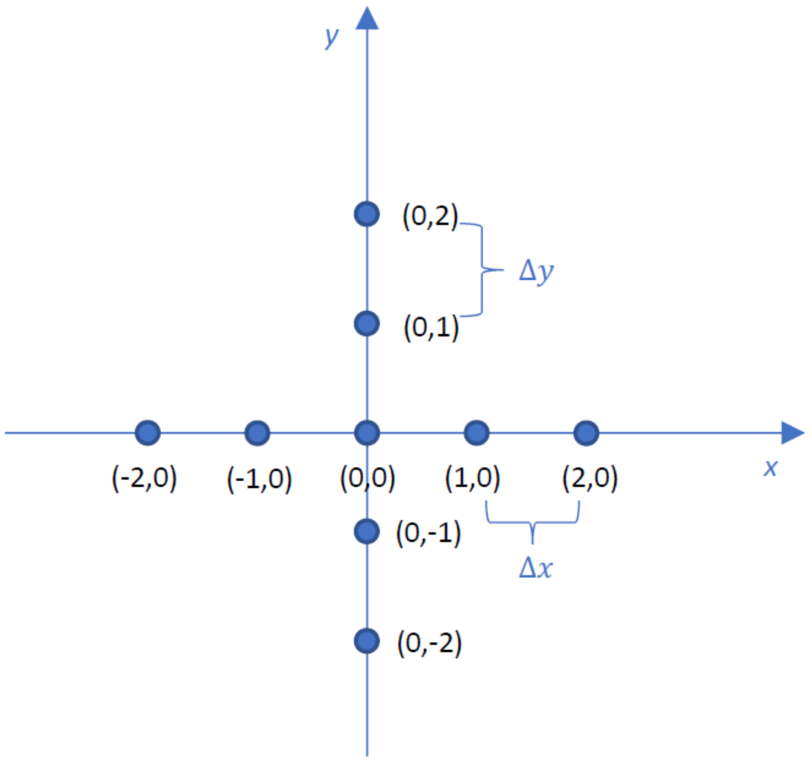
Odrediti prvu i drugu derivaciju dvodimenzionalnog polja temperature $T(x,y)$ u točki (0,0), u x i y smjeru, uz pomoć centralnih konačnih razlika.

- druga derivacija u smjeru y-osi:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(0,0)} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(0,1)} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(0,-1)}}{2\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{(0,0)} = \frac{\frac{T(0,2)-T(0,0)}{2\Delta y} - \frac{T(0,0)-T(0,-2)}{2\Delta y}}{2\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{(0,0)} = \frac{T(0,2)-2T(0,0)+T(0,-2)}{4\Delta y^2}$$



Primjer 1

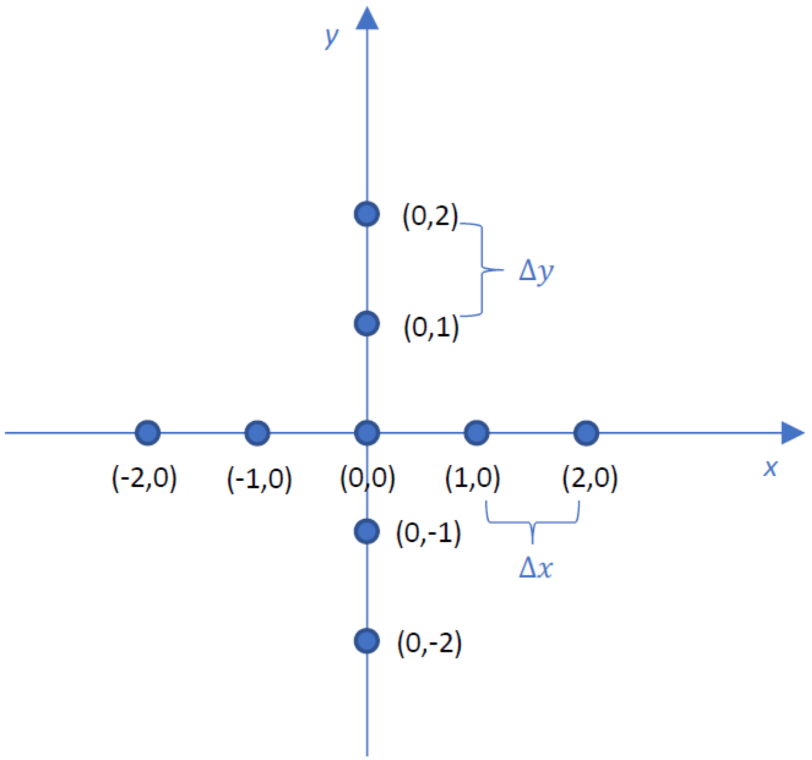
Odrediti prvu i drugu derivaciju dvodimenzionalnog polja temperature $T(x,y)$ u točki (0,0), u x i y smjeru, uz pomoć centralnih konačnih razlika.

- druga derivacija:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right)_{(0,0)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(0,0)} = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(1,0)} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(-1,0)}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right)_{(0,0)} = \frac{\frac{T(1,1)-T(1,-1)}{2\Delta y} - \frac{T(-1,1)-T(-1,-1)}{2\Delta y}}{2\Delta x}$$

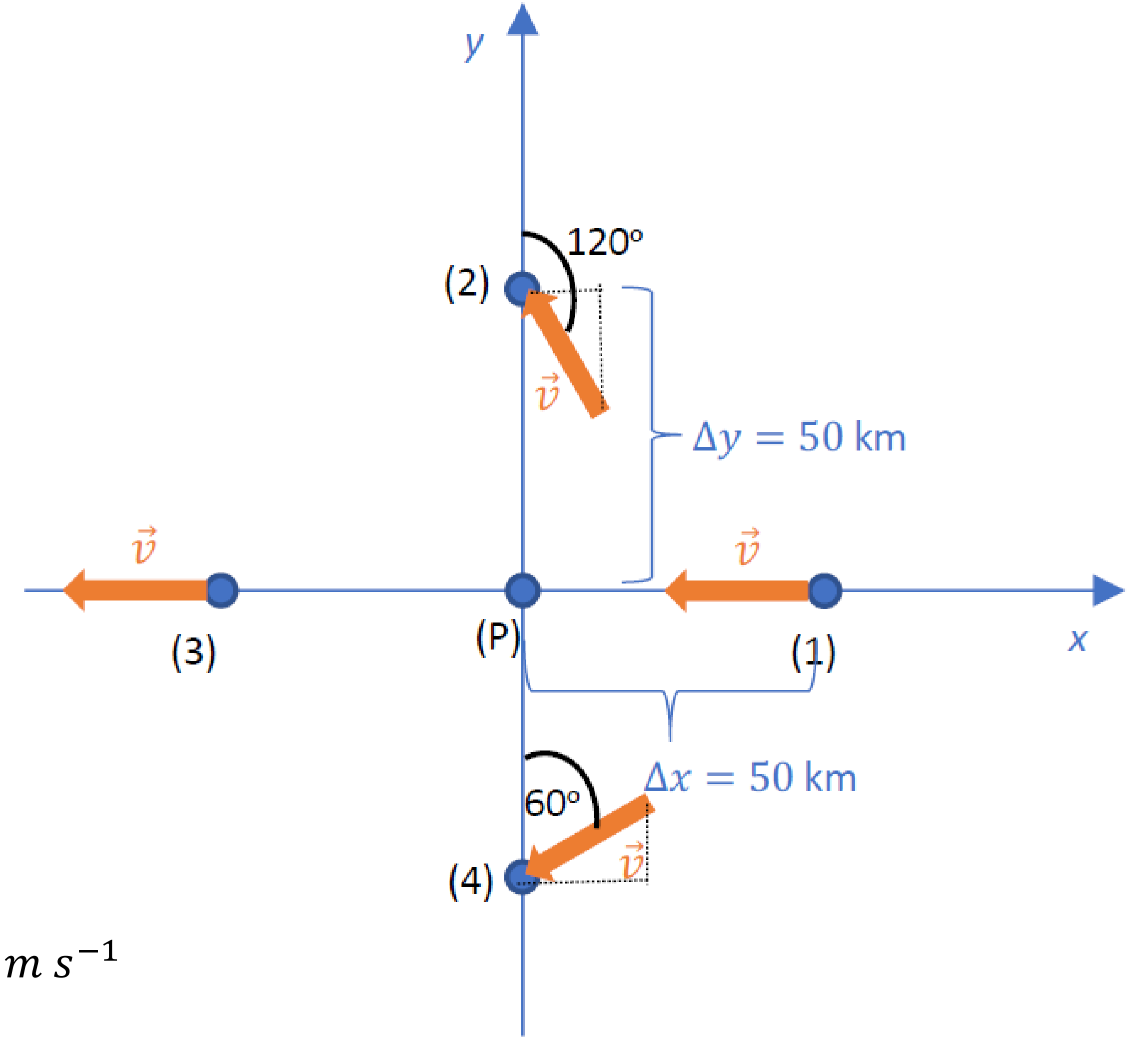
$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right)_{(0,0)} = \frac{T(1,1)-T(1,-1)-T(-1,1)+T(-1,-1)}{4\Delta \mathrm{x}\Delta y}$$



Primjer 2

U tablici su dani podaci iznosa brzine vjetra oko postaje (P). Ako je udaljenosti između postaje i mjernih točki 50 km, približno izračunajte divergenciju i vrtložnost.

	v (m s^{-1})	α (°)
točka (1)	10	90
točka (2)	4	120
točka (3)	8	90
točka (4)	4	60



- brzine rastavljene na komponente:

$$u_1 = -10\, m\, s^{-1}, \qquad v_1 = 0\, m\, s^{-1}$$
$$u_2 = -4 \cdot \cos 30° = -2\sqrt{3}\; m\, s^{-1}, \qquad v_2 = 4 \cdot \sin 30° = 2\, m\, s^{-1}$$
$$u_3 = -8\, m\, s^{-1}, \qquad v_3 = 0\, m\, s^{-1}$$
$$u_4 = -4 \cdot \cos 30° = -2\sqrt{3}\; m\, s^{-1}, \qquad v_4 = -4 \cdot \sin 30° = -2\, m\, s^{-1}$$

Primjer 2
U tablici su dani podaci iznosa brzine vjetra oko postaje (P). Ako je udaljenosti između postaje i mjernih točki 50 km, približno izračunajte divergenciju i vrtložnost.

- brzine rastavljene na komponente:

$$u_1 = -10\ m\ s^{-1}, \qquad v_1 = 0\ m\ s^{-1}$$
$$u_2 = -4 \cdot \cos 30° = -2\sqrt{3}\ m\ s^{-1}, \qquad v_2 = 4 \cdot \sin 30° = 2\ m\ s^{-1}$$
$$u_3 = -8\ m\ s^{-1}, \qquad v_3 = 0\ m\ s^{-1}$$
$$u_4 = -4 \cdot \cos 30° = -2\sqrt{3}\ m\ s^{-1}, \qquad v_4 = -4 \cdot \sin 30° = -2\ m\ s^{-1}$$

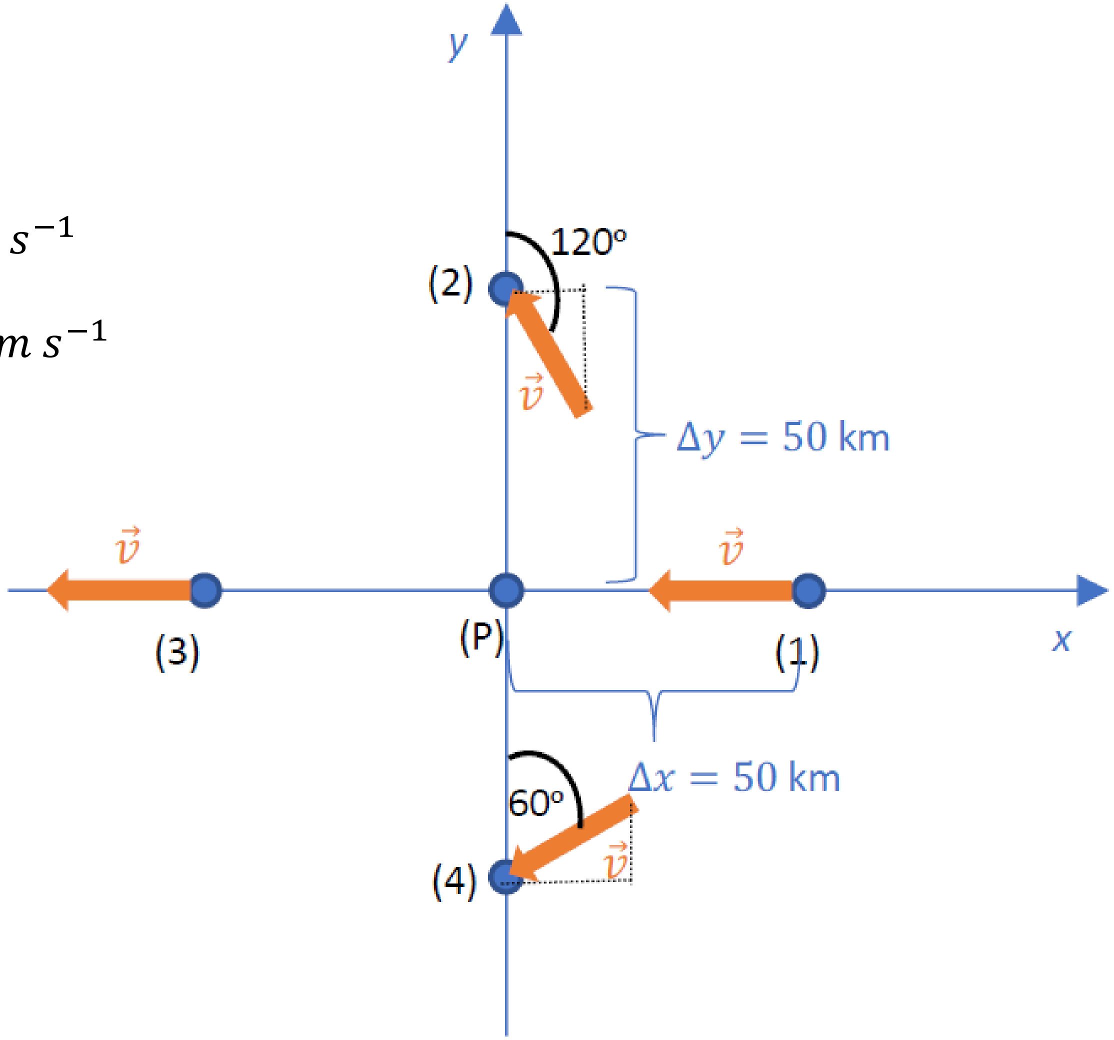
- divergencija

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{u_1 - u_3}{2\Delta x} + \frac{v_2 - v_4}{2\Delta y}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{-10-(-8)}{2 \cdot 50 \cdot 10^3} s^{-1} + \frac{2-(-2)}{2 \cdot 50 \cdot 10^3} s^{-1}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 2 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$$



Primjer 2

U tablici su dani podaci iznosa brzine vjetra oko postaje (P). Ako je udaljenosti između postaje i mjernih točki 50 km, približno izračunajte divergenciju i vrtložnost.

- brzine rastavljene na komponente:

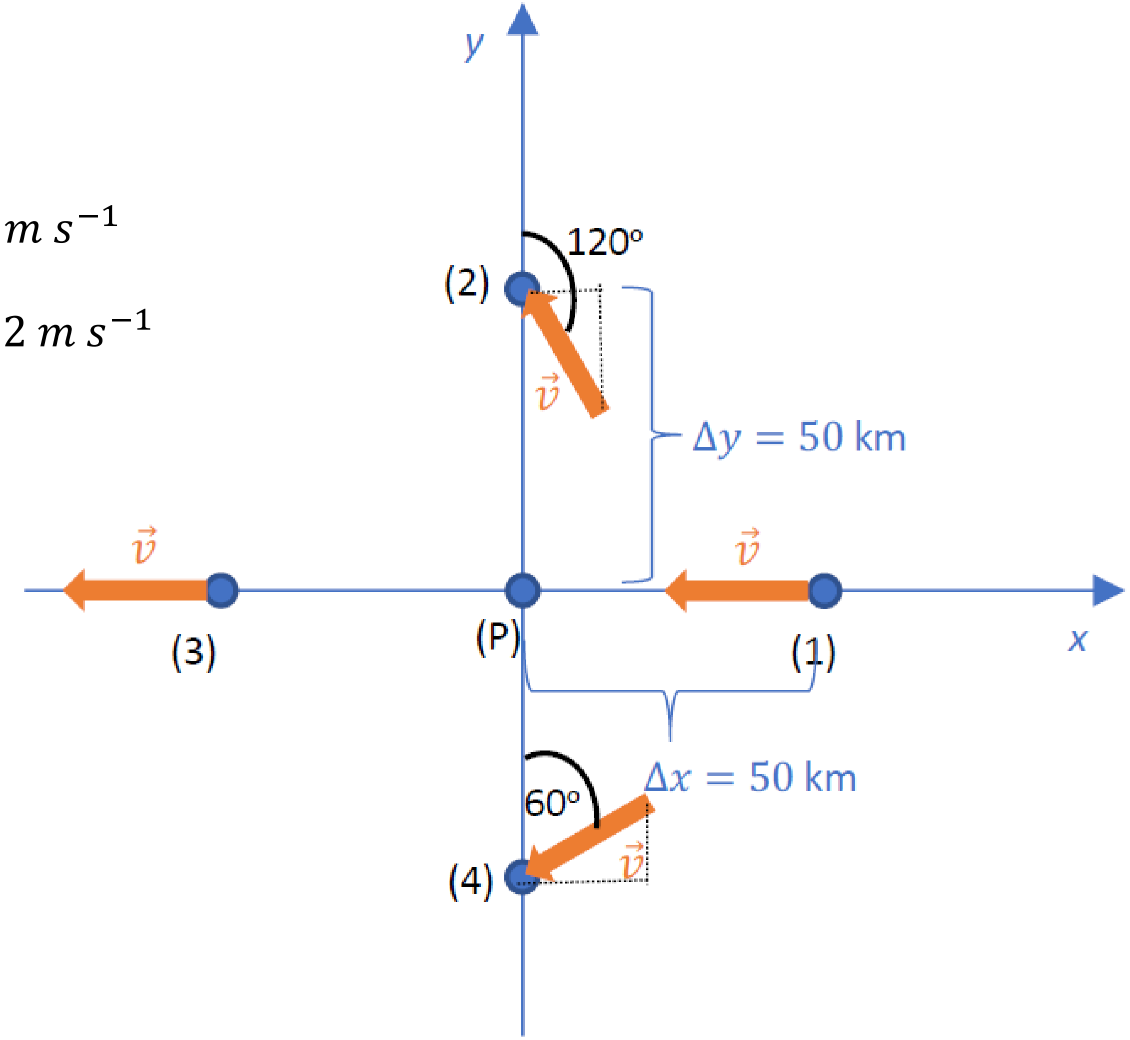
$$u_1 = -10\, m\, s^{-1}, \qquad v_1 = 0\, m\, s^{-1}$$
$$u_2 = -4 \cdot \cos 30° = -2\sqrt{3}\ m\, s^{-1}, \qquad v_2 = 4 \cdot \sin 30° = 2\, m\, s^{-1}$$
$$u_3 = -8\, m\, s^{-1}, \qquad v_3 = 0\, m\, s^{-1}$$
$$u_4 = -4 \cdot \cos 30° = -2\sqrt{3}\ m\, s^{-1}, \qquad v_4 = -4 \cdot \sin 30° = -2\, m\, s^{-1}$$

- relativna vrtložnost (vertikalna komponenta vrtložnosti)

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\zeta = \frac{v_1 - v_3}{2\Delta x} - \frac{u_2 - u_4}{2\Delta y}$$

$$\zeta = \frac{0-0}{2 \cdot 50 \cdot 10^3} s^{-1} - \frac{-2\sqrt{3} - \left(-2\sqrt{3}\right)}{2 \cdot 50 \cdot 10^3} s^{-1} = 0\, s^{-1}$$



Literatura

- Dinamička meteorologija : analitička rešenja i numeričke metode, Fedor Mesinger, Beograd : Građevinska knjiga, 1976