

# NUKLEARNE REAKCIJE

Raspršenje upadnog snopa na jezgri: ishod ovisi o mehanizmu reakcije, međudjelovanju projektila i mete, i unutrašnjoj strukturi jezgara koje sudjeluju u reakciji.

Tipična nuklearna reakcija       $a + X \rightarrow Y + b$    ili skraćeno zapisano       $X(a, b)Y$

Osnovna klasifikacija reakcija:

- Raspršenja ako su ulazne i odlazne čestice iste, X i Y odgovaraju istoj jezgri (elastična ako su Y i b u osnovnim stanjima, neelastična ako su Y ili b u pobuđenim stanjima)
- Reakcija izbacivanja ("knockout"), a i b su iste čestice, ali reakcija uzrokuje izbacivanje još jednog nukleona
- Transfer reakcije, jedan ili dva nukleona su izmijenjeni između projektila i mete, npr. dolazni deuterон završava izlaznim protonom ili neutronom, jedan nukleon je predan jezgri meti

Klasifikacija prema mehanizmu koji je odgovoran za proces:

- **direktne reakcije**, samo dio nukleona sudjeluje u samoj reakciji, dok su ostali nukleoni pasivni u procesu (npr. dodavanje i oduzimanje jednog nukleona iz jednočestičnog stanja modela Ijusaka)
- **reakcije složene jezgre**: spajanje projektila i mete i izmjena energije, i zatim izbacivanje odlaznog produkta van
- **rezonantne reakcije**: projektil formira kvazivezano stanje prije izbacivanja produkta

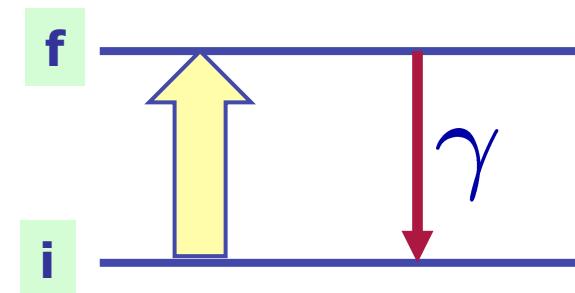
## 1. Coulomb pobuđenja

projektil naboja **ze**

meta naboja **Ze**



Kad je energija projektila manja od Coulomb barijere između projektila i mete => multipolni prijelazi



Sommerfeldov broj karakterizira jakost Coulomb polja

$$\eta = \alpha z Z \frac{c}{v}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \quad v \text{ -brzina projektila}$$

Klasično, najmanja udaljenost između mete i projektila (iz centralnog sudara):

$$\frac{zZe^2}{R_s} = \frac{1}{2}\mu v^2$$

$$\frac{1}{2}R_s = \eta \frac{\hbar}{\mu v}$$

reducirana de Broglie  
valna duljina

$\eta \ll 1$  -Coulomb polje je slabo u usporedbi s kinetičkom energijom  
(valna funkcija projektila se ne mijenja značajno; Bornova aproksimacija)

$\eta \gg 1$  -projektil i meta nisu u dosegu nuklearne interakcije => Coulomb pobjuđenja. Jaka Coulomb-ova polja se mogu postići raspršenjem snopova teških iona na jezgri meti.

## MULTIPOLNI RAZVOJ

-elektromagnetsko međudjelovanje projektila i mete  
kao mala smetnja prema nuklearnom Hamiltonijanu:

$$H'(t) = \frac{zZe^2}{|\vec{r}_p(t) - \vec{r}|} - \underbrace{\text{monopole term}}_{\substack{\text{uzrokuje otklon projektila bez} \\ \text{pobudivanja internih stupnjeva} \\ \text{slobode}}}$$

projektil

meta

-u području  $r_p > r$ :

$$\frac{1}{|\vec{r}_p(t) - \vec{r}|} = \sum_{\lambda\mu} \frac{4\pi}{(2\lambda+1)} \frac{r^\lambda}{r_p^{\lambda+1}(t)} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) Y_{\lambda\mu}^*(\theta_p, \phi_p)$$

meta:  $r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \sim \mathcal{O}_{\lambda\mu}(E\lambda)$  (isti operator za Coulomb pobuđenje i elektromagnetske prijelaze)

Kod raspršenja uvjetovanog elektromagnetskim međudjelovanjem, udarni presjek je proporcionalan onome od raspršenja točkastih naboja.

**UDARNI PRESJEK** za Coulomb pobuđenje mete iz početnog stanja  $\mathbf{i}$  u konačno  $\mathbf{f}$ :

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{fi} = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{M_f M_i} |P_{M_f M_i}|^2 \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford}$$

**FORM FAKTOR:**

$$P_{M_f M_i} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\langle J_f M_f \xi | H'(t) | J_i M_i \zeta \rangle}_{\text{nuklearni matrični element}} e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} dt$$

(ovdje uvrštavamo multipolni razvoj)

$$H'(t) = zZe^2 \sum_{\lambda\mu} \frac{4\pi}{(2\lambda+1)} \frac{r^\lambda}{r_p^{\lambda+1}(t)} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) Y_{\lambda\mu}^*(\theta_p, \phi_p)$$

→  $P_{M_f M_i} = \frac{4\pi z e}{i\hbar} \sum_{\lambda\mu} \frac{1}{2\lambda+1} \underbrace{\langle J_f M_f \xi | \mathcal{O}_{\lambda\mu}(E\lambda) | J_i M_i \zeta \rangle}_{S_{\lambda\mu}(E\lambda)}$

Ovisnost udarnog presjeka o valnim funkcijama jezgre mete, može se povezati sa reduciranom vjerojatnosti elektromagnetskih prijelaza  $B(E\lambda)$

Dio ovisan o vremenu:

$$S_{\lambda\mu}(E\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)t} \frac{1}{r_p^{\lambda+1}(t)} Y_{\lambda\mu}^*(\theta_p(t), \phi_p(t)) dt$$

### UDARNI PRESJEK

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{fi} = \sum_{\lambda} \left( \frac{2ze}{a^{\lambda} \hbar v} \right)^2 B(E\lambda; J_i \zeta \rightarrow J_f \xi) \frac{df(E\lambda, \rho)}{d\Omega}$$

$$a = R_s/2$$

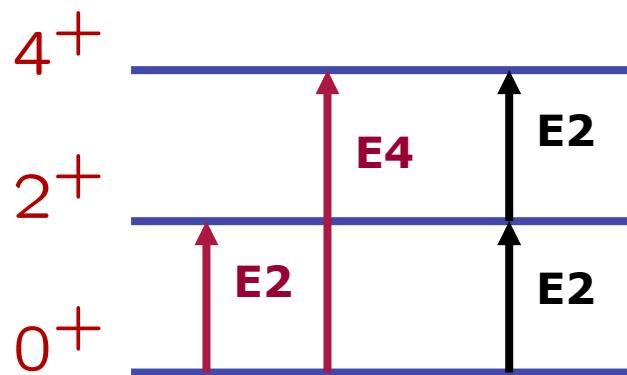
$$\rho = \eta \frac{E_f - E_i}{2E_i}$$

Kutna ovisnost:

$$\frac{df(E\lambda, \rho)}{d\Omega} = \frac{4\pi^2}{(2\lambda + 1)^3} \sum_{\mu} \left| Y_{\lambda\mu}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) F_{\lambda\mu}(\theta, \rho) \right|^2 \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth.}$$

Coulomb pobuđenje je korisno u stvaranju pobuđenih stanja u jezgri meti ili projektilu. Vjerojatnost pobuđenja viših multipolariteta naglo pada. Višestruka pobuđenja nižeg  $\lambda$  su usprediva sa jednostrukim pobuđenjem u stanje visokog spina.

Primjer parno-parne jezgre:

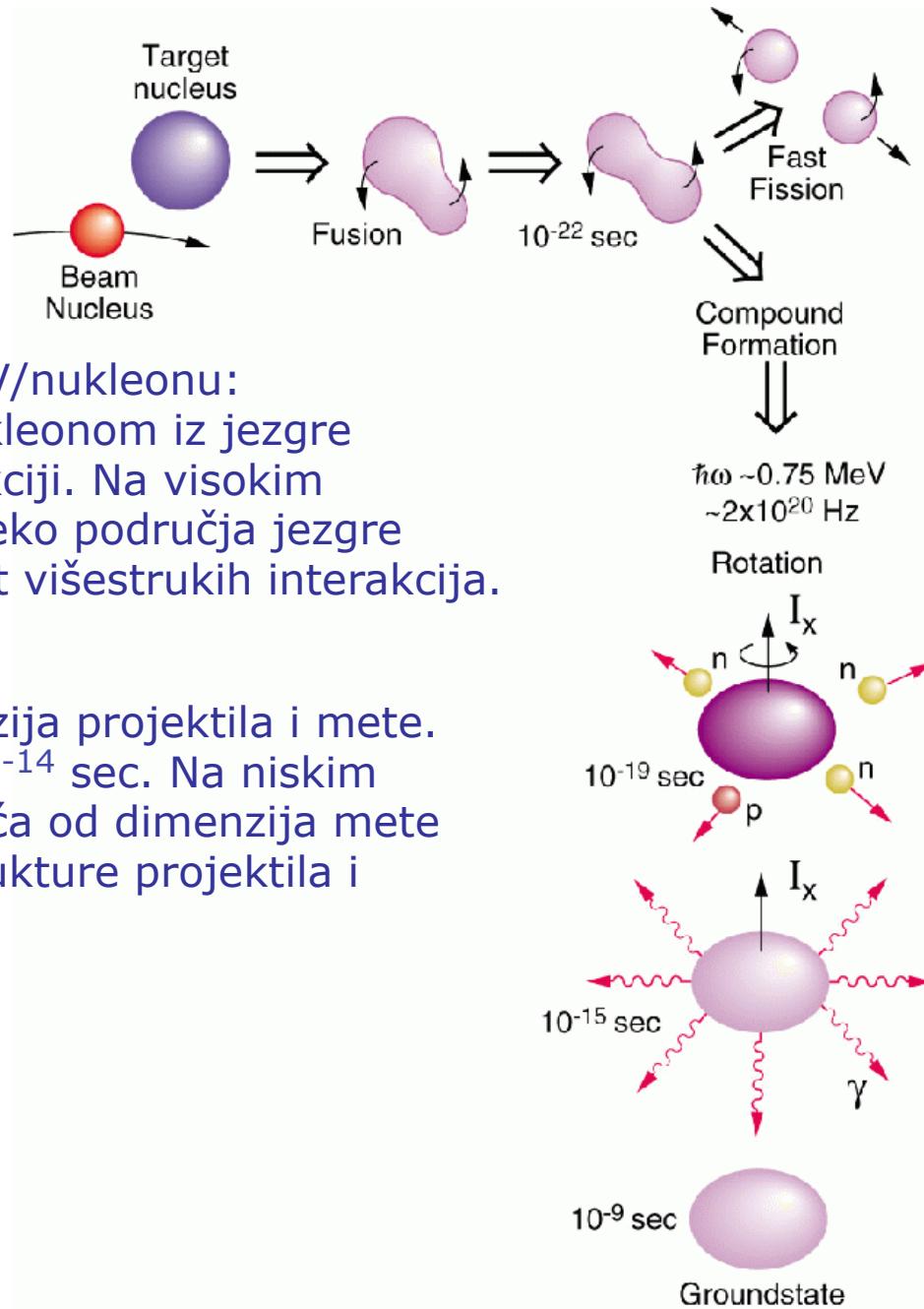


⇒ vjerojatnost E4 pobuđenja je 1/100 vjerojatnosti E2 pobuđenja. Niz od dva E2 pobuđenja usporediv je ili vjerojatniji od jednostrukog E4 procesa.

## 2. Složena jezgra

Direktne reakcije na energijama  $> 1 \text{ MeV/nukleonu}$ : projektil međudjeluje samo s jednim nukleonom iz jezgre mete, ostali nukleoni ne sudjeluju u reakciji. Na visokim energijama vrijeme proleta projektila preko područja jezgre mete je  $\approx 10^{-22} \text{ sec} \Rightarrow$  mala vjerojatnost višestrukih interakcija.

Na energijama  $< 1 \text{ MeV/nukleonu} \Rightarrow$  fuzija projektila i mete. **SLOŽENA JEZGRA** kao međustanje  $\approx 10^{-14} \text{ sec}$ . Na niskim energijama je valna duljina projektila veća od dimenzija mete  $\Rightarrow$  reakcija ne može razotkriti detalje strukture projektila i mete.



**FUZIJA PROJEKtilA I METE** => višestrukim interakcijama nukleona dolazi do gubitka identiteta prvotnih jezgri. Formira se složena jezgra koja nema memorije o ulaznom kanalu. Raspad međustanja određen je energijom pobuđenja.

**SLOŽENA JEZGRA** => pretpostavka je da su procesi formacije i raspada nezavisni

$$a + A \rightarrow \mathcal{N}$$

projektil    meta    složena jezgra

**RASPAD SLOŽENE JEZGRE:** izlazni kanali

	vjerojatnost	širina
$\mathcal{N} \rightarrow a + A$	$\alpha$	$W_\alpha$
$\mathcal{N} \rightarrow b + B$	$\beta$	$W_\beta$
$\mathcal{N} \rightarrow c + C$	$\gamma$	$W_\gamma$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$		
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$		

Ukupna širina raspada:

$$\Gamma = \Gamma_\alpha + \Gamma_\beta + \Gamma_\gamma + \dots$$

**Udarni presjek za reakciju: ulazni kanal  $\xi \rightarrow$  složena jezgra  $\rightarrow$  izlazni kanal  $\beta$**

$\sigma_\xi$  - udarni presjek za formaciju složene jezgre kroz kanal  $\xi$

$\Gamma_\beta / \Gamma$  - Vjerovatnost raspada složene jezgre kroz kanal  $\beta$

Ukupni udarni presjek za ulazni kanal  $\xi$  i izlazni kanal  $\beta$  :

$$\sigma_{\beta\xi} = \sigma_\xi \frac{\Gamma_\beta}{\Gamma}$$

**Bohrova hipoteza  
nezavisnosti ulaznog  
i izlaznog kanala**

## **DEF.** polumjer kanala reakcije $R_c$

$r > R_c \Rightarrow$  u ovom području nema međudjelovanja između raspršene čestice i rezidualne jezgre (Coulomb interakcija dalekog dosegaa zanemarena). Valne funkcije su ravni valovi.

$r < R_c \Rightarrow$  područje međudjelovanja, složena valna funkcija

Logaritamska derivacija radijalne valne funkcije  $u_c$  svakog kanala mora biti kontinuirana na granici između ova dva područja.

$$\rho_c = \left( \frac{r}{u_c} \frac{du_c}{dr} \right)_{r=R_c}$$

Informacija o unutrašnjem području (području djelovanja jake interakcije) sadržana je u skupu logaritamskih derivacija.

**PRIMJER:** zbog jednostavnosti promatramo samo raspršenje s-vala. Asimptotski oblik valne funkcije (Wong, Appendix B):

$$u_0(r) \sim [e^{-ikr} - \eta_0 e^{ikr}]$$

**PARAMETAR NEELASTIČNOSTI:**

$$\eta_0 = e^{2i\delta_0}$$

kompleksni fazni  
pomak za  $l=0$  kanal

$$\rho_0 = \frac{r}{u_0} \left( \frac{du_0}{dr} \right)_{r=R_c}$$



$$\eta_0 = \frac{\rho_0 + ikR_c}{\rho_0 - ikR_c} e^{-2ikR_c}$$

veličina koja se mjeri

**UDARNI PRESJEK ZA ELASTIČNO RASPRŠENJE (Wong, Appendix B):**

$$\sigma^{el} = \frac{\pi}{k^2} |1 - \eta_0|^2 = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{2ikR_c} - 1 - \frac{2ikR_c}{\rho_0 - ikR_c} \right|^2$$

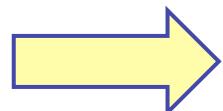
**UDARNI PRESJEK ZA REAKCIJU:**

$$\sigma^{re} = \frac{\pi}{k^2} (1 - |\eta_0|^2) = \frac{\pi}{k^2} \frac{-4kR_c Im \rho_0}{(Re \rho_0)^2 + (Im \rho_0 - kR_c)^2}$$

## Breit-Wigner formula za izolirane rezonancije

Udarni presjek ima rezonantnu strukturu:  $\sigma^{re} \equiv \max$  za  $Re\rho_0 = 0$

Neka je  $E_c$  energija na kojoj udarni presjek ima maksimum:



$$Re\rho_0 = a(E - E_c) + \dots$$

$$Im\rho_0 = -b + \dots$$

$$\sigma^{el} = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{2ikR_c} - 1 - \frac{2ikR_c}{a(E - E_c) - i(b + kR_c)} \right|^2$$

$$\sigma^{re} = \frac{\pi}{k^2} \frac{4kR_c b}{a^2(E - E_c)^2 + (b + kR_c)^2}$$

**DEF.**

$$\Gamma = 2 \frac{b + kR_c}{a}$$

ukupna širina

$$\Gamma_\alpha = \frac{2kR_c}{a}$$

parcijalna širina za ulazni kanal

$$\Gamma^{re} = 2 \frac{b}{a}$$

širina reakcije

Ukupna širina reakcije:

$$\Gamma^{re} = \sum_{i \neq \alpha} \Gamma_i$$

Ukupna širina:

$$\Gamma = \Gamma_\alpha + \Gamma^{re}$$



$$\sigma^{el} = \frac{\pi}{k^2} \left| e^{2ikR_c} - 1 - \frac{i\Gamma_\alpha}{(E - E_c) - i\frac{\Gamma}{2}} \right|^2$$

nerezonantni član  
(raspršenje na potencijalu)

$$\sigma^{re} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma^{re} \Gamma_\alpha}{(E - E_c)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

Elastični udarni presjek za  $E \approx E_c$ :

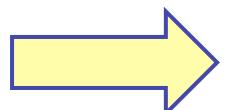
$$\sigma^{el} \approx \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_\alpha^2}{(E - E_c)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

**Compound elastic scattering cross section** – razlikuje se od potencijalnog elastičnog udarnog presjeka po tome što dolazi do formacije složene jezgre prije nego se sistem vrati u ulazni kanal.

Udarni presjek za formaciju složene jezgre kroz kanal  $\alpha$

$$\sigma_\alpha = \sigma^{\text{compound elastic}} + \sigma^{\text{re}}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_\alpha^2 + \Gamma^{\text{re}} \Gamma_\alpha}{(E - E_c)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma \Gamma_\alpha}{(E - E_c)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

 Udarni presjek za reakciju  $(\alpha, \beta)$  **BREIT-WIGNER ONE-LEVEL FORMULA**

$$\sigma_{\beta\alpha} = \sigma_\alpha \frac{\Gamma_\beta}{\Gamma} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_\beta \Gamma_\alpha}{(E - E_c)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

**PREKRIVANJE REZONANCI:** u području viših energija širina stanja je veća ili usporediva s prosječnim energetskim razmakom između susjednih stanja. Dolazi do prekrivanja rezonanci.

### 3. DIREKTNE REAKCIJE

Npr. (d,p) reakcija deuterona kinetičke energije više od nekoliko MeV-a i jezgre mete, u izlaznom kanalu je dobiven proton.

Deuteron je slabo vezani sustav protona i neutrona, neutron se može uhvatiti u jednočestičnu orbitu jezgre mete bez većeg utjecaja na ostale nukleone, proton ostaje kao produkt reakcije.

“stripping” reakcija, neutron je skinut sa projektila; moguć je transfer i više nukleona, čak i nuklearnih klastera.

“pick up” reakcije, jedan ili više nukleona je oduzeto od jezgre mete, npr.  $(^3He, ^4He)$

Udarni presjek za direktnu reakciju računa se u **prvoj Bornovoj aproksimaciji**.

Schroedingerova jednadžba za proces (sustav centra mase):

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}V(\vec{r})\psi(\vec{r}) \quad k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

Računamo udarni presjek za direktnu reakciju u prvoj Bornovoj aproksimaciji:

$$\psi(\vec{r}) = \underbrace{e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}}_{\text{ulazni val}} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r'$$

Uzmimo Greenovu funkciju:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

koja zadovoljava jednadžbu

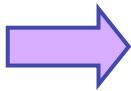
$$(\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\rightarrow \psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r'$$

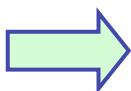
-ako je potencijal kratkog dosega 

$$k|\vec{r} - \vec{r}'| = k\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2} = kr - \vec{k}_f \cdot \vec{r}' + \mathcal{O}(r'^2)$$

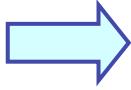
$$\vec{k}_f = k \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{u smjeru izlazne čestice.}$$


$$\psi(\vec{r}) \approx e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r'$$

Amplituda raspršenja definirana je izrazom:  $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$


$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r'$$

Prva Bornova aproksimacija:  $\psi(\vec{r}') \approx e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} + \dots$


$$f(\theta) \approx -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{k}_f \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} d^3 r'$$

-vektor transfera impulsa:

$$\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f \quad \longrightarrow$$

Razvoj po parcijalnim valovima:

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} = \sum_l i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(qr') Y_{l0}(\theta')$$

### KUTNA RASPODJELA:

Asimptotski oblici početne i konačne valne funkcije  
(vodeći računa da u reakciji dolazi do promjene jezgre, valne funkcije početne i konačne jezgre treba uzeti u obzir):

$$\Psi_i = e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \Phi_i$$

produkt internih valnih funkcija  
projektila i jezgre mete

$$\Psi_f = e^{i\vec{k}_f \cdot \vec{r}} \Phi_f$$

produkt internih valnih funkcija  
raspršene čestice i jezgre

**PRIMJER:**  ${}^{40}Ca(d, p) {}^{41}Ca$

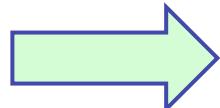
$$\Phi_i = [\phi(d) \otimes \phi({}^{40}Ca)]$$

$$\Phi_f = [\phi(p) \otimes \phi({}^{41}Ca)]$$

(valne funkcije su vezane u definirane vrijednosti angularnog momenta i izospina)

Neutron je uhvaćen u jednočestično stanje jezgre mete orbitalnog angулarnog momenta  $l_t$

$$\phi(d) = \phi(p) \otimes \phi(n) \quad \phi_{l_t}(^{41}Ca) \approx [\phi(n) \phi(^{40}Ca) Y_{l_t m_t}(\theta', \phi')]$$



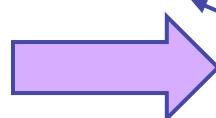
amplituda raspršenja:

$$f(\theta) \approx -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} < [\phi(p) \otimes (\phi(n) \phi(^{40}Ca) Y_{l_t m_t}(\theta', \phi'))] | V(\vec{r}') | [\phi(^{40}Ca) \otimes (\phi(p) \otimes \phi(n))] > d^3 r'$$

**APROKSIMACIJA:** interakciju projektila i mete aproksimiramo površinskom delta-interakcijom (kontaktna interakcija, djeluje na površini jezgre)

$$V(\vec{r}') = V_0 \delta(r' - R)$$

+ razvoj po parcijalnim valovima  
(exp. faktor)



polumjer jezgre

$$f(\theta) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} V_0 i^{l_t} \sqrt{\frac{2l_t + 1}{4\pi}} j_{l_t}(qR)$$

**PWBA** Plane Wave  
Born Approximation

## DIFERENCIJALNI UDARNI PRESJEK ZA DIREKTNU REAKCIJU:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |j_{l_t}(qR)|^2$$

-transfer impulsa kao funkcija kuta raspršenja:

$$q = \sqrt{k_i^2 + k_f^2 - 2k_i k_f \cos\theta} \approx 2k \sin \frac{\theta}{2} \quad k_i \approx k_f = k$$



**KUTNA RASPODJELA:**

$$|j_{l_t}(2kR \sin \frac{\theta}{2})|^2$$

određena je transferom angularnog momenta.

