

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 28. travnja 2023.

Zadatak 1 (5 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{(-1)^n n(m+2)}{2mn + 4m + n + 2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 28. travnja 2023.

Zadatak 2 (10 bodova)

- (a) (5 bodova) Dokažite da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadan formulom

$$a_n = \frac{n^3 \cos(\sin(n^{2023})) + 7n \sin(\cos(n^{2023}))}{(-n)^5 + (-n)^3}$$

konvergentan.

- (b) (5 bodova) Ispitajte je li niz zadan rekurzivno sa

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

konvergentan te ako je, odredite mu limes.

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 28. travnja 2023.

Zadatak 3 (7 bodova)

- (a) (2 boda) Nađite primjer niza kojemu je skup gomilišta $\{-7, 0, 7\}$.
- (b) (5 bodova) Odredite limes inferior i limes superior niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ zadanog sa

$$a_n = \frac{n^4 \cos\left(\pi \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) + 5n^4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + n^2}{(n^2 - 1)(n^2 + 1)}.$$

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 28. travnja 2023.

Zadatak 4 (8 bodova)

- (a) (3 boda) Neka je $S \subset \mathbb{R}$ neprazan ograničen skup. Dokažite da je $\sup(-S) = -\inf S$.
- (b) (2 boda) Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ ograničeni nizovi **pozitivnih** realnih brojeva. Vrijedi li nužno

$$\liminf (x_n y_n) = \liminf x_n \cdot \liminf y_n?$$

Ako vrijedi općenito, dokažite tu tvrdnju, a ako ne vrijedi općenito, navedite kontraprimjer.

- (c) (3 boda) Neka je $(a_n)_n$ niz u \mathbb{C} , pri čemu je

$$a_n = x_n + iy_n, \quad x_n = \operatorname{Re} a_n, \quad y_n = \operatorname{Im} a_n.$$

Dokažite da je niz $(a_n)_n$ konvergentan u \mathbb{C} ako i samo ako su nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ konvergentni u \mathbb{R} .

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 28. travnja 2023.

Zadatak 1 (5 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{(-1)^n n(m+1)}{2mn + 4n + m + 2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 28. travnja 2023.

Zadatak 2 (10 bodova)

- (a) (5 bodova) Dokažite da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadan formulom

$$a_n = \frac{n^3 \sin(\sin(n^{2023})) + 7n \cos(\cos(n^{2023}))}{(-n)^5 + (-n)^3}$$

konvergentan.

- (b) (5 bodova) Ispitajte je li niz zadan rekurzivno sa

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

konvergentan te ako je, odredite mu limes.

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 28. travnja 2023.

Zadatak 3 (7 bodova)

- (a) (2 boda) Nađite primjer niza kojemu je skup gomilišta $\{-8, 0, 8\}$.
- (b) (5 bodova) Odredite limes inferior i limes superior niza $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ zadanog sa

$$a_n = \frac{n^4 \cos(\pi \sin(\frac{n\pi}{2})) + 10n^4 \sin(\frac{n\pi}{2}) + n^2}{(n^2 - 1)(n^2 + 1)}.$$

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 28. travnja 2023.

Zadatak 4 (8 bodova)

- (a) (3 boda) Neka je $S \subset \mathbb{R}$ neprazan ograničen skup. Dokažite da je $\inf(-S) = -\sup S$.
- (b) (2 boda) Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ ograničeni nizovi **negativnih** realnih brojeva. Vrijedi li nužno

$$\limsup (x_n y_n) = \limsup x_n \cdot \limsup y_n?$$

Ako vrijedi općenito, dokažite tu tvrdnju, a ako ne vrijedi općenito, navedite kontraprimjer.

- (c) (3 boda) Neka je $(a_n)_n$ ograničen niz u \mathbb{R} . Definirajte pojam gomilišta niza $(a_n)_n$. Dokažite da je a gomilište niza $(a_n)_n$ ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ interval $\langle a - \epsilon, a + \epsilon \rangle$ sadrži beskonačno mnogo članova niza $(a_n)_n$,