Osnove matematičke analize

2. zadaća

1. Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq B \subseteq X$. Dokažite da je $A' \subseteq B'$ i $\operatorname{Cl} A \subseteq \operatorname{Cl} B$.

2. Neka je (X, d) metrički prostor i A i B podskupovi od X. Dokažite:

   a) $\operatorname{Cl}(A \cup B) = \operatorname{Cl} A \cup \operatorname{Cl} B$

   b) $\operatorname{Cl}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl} B$. Vrijedi li obratna inkluzija?

   c) $\operatorname{Cl} A = \operatorname{Int} A \cup \partial A$

   d) $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \emptyset$.

3. Neka je $A = [0, 1] \times [1, 5]$. Dokažite da je A zatvoren skup.

4. Za sljedeće skupove odredite interior, zatvarač i rub:

   a) $A = \{1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ u $\mathbb{R}$,

   b) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$,

   c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle 1, 2] \cup \{5\}\}$ u $\mathbb{R}^2$,

   d) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(x, 0) = \frac{1}{n}\}$.

5. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \ i = 1, \dots, n\}$ zatvoren u $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

6. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i < 1, \ i = 1, \dots, n\}$ otvoren u $(\mathbb{R}^n, d_2)$.