MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 2. svibnja 2022.

Zadatak 1 (10 bodova)

(a) (5 bodova) Pokažite da je niz zadan rekurzivno s

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{7},\ n \in \mathbb{N}$$

konvergentan te mu odredite limes.

(b) (5 bodova) Odredite sva gomilišta niza

$$b_n = \cos((n-1)\pi) + \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{3}\right).$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 2. svibnja 2022.

Zadatak 2 (13 bodova)

(a) (8 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{1 - x^2y - x^2}{x^2y + 2x^2 + y + 2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}, y \geq 0 \right\}.$$

Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje.

(b) (5 bodova) Neka je $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ preslikavanje zadano s

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2|x_1 - y_1| + |x_2 + 3y_2|.$$

Je li $(\mathbb{R}^2, d)$ metrički prostor? Detaljno obrazložite sve tvrdnje.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 2. svibnja 2022.

Zadatak 3 (13 bodova)

(a) (6 bodova) Iskažite i dokažite Bolzano–Weierstrassov teorem za nizove u $\mathbb{R}^2$.

(b) (4 boda) Neka su $(v_k)_k$ i $(w_k)_k$ konvergentni nizovi u normiranom prostoru $\mathbb{R}^n$. Dokažite da je $(v_k + w_k)_k$ konvergentan niz i odredite mu limes.

(c) (3 boda) Neka su $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$ nizovi realnih brojeva takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako $(a_n)_n$ i $(c_n)_n$ imaju isto gomilište, mora li i $(b_n)_n$ imati to gomilište? Ako da, dokažite; ako ne, napišite kontraprimjer.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 2. svibnja 2022.

Zadatak 4 (14 bodova)

(a) (5 bodova) Neka je (X, d) metrički prostor. Definirajte pojam otvorenog skupa u X. Dokažite da je skup $U \subseteq X$ otvoren ako i samo ako za svaku točku $x_0 \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$.

(b) (4 boda) Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Definirajte pojmove zatvarač i interior skupa A. Odredite zatvarač i interior skupa $A = \{(x, 1) : x > 0\}$ u $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Detaljno obrazložite odgovor.

(c) (5 bodova) Dokažite po definiciji da je skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2, 4],\ y \leq 5\}$ zatvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Detaljno i precizno obrazložite odgovor.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 2. svibnja 2022.

Zadatak 1 (10 bodova)

(a) (5 bodova) Pokažite da je niz zadan rekurzivno s

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 8}{6}, \, n \in \mathbb{N}$$

konvergentan te mu odredite limes.

(b) (5 bodova) Odredite sva gomilišta niza

$$b_n = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right).$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 2. svibnja 2022.

Zadatak 2 (13 bodova)

(a) (8 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{1 - xy^2 - 2y^2}{xy^2 + x + 3y^2 + 3} \;\middle|\; x \geq 0, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje.

(b) (5 bodova) Neka je $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ preslikavanje zadano s

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |2x_1 + y_1| + |3x_2 - 3y_2|.$$

Je li $(\mathbb{R}^2, d)$ metrički prostor? Detaljno obrazložite sve tvrdnje.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 2. svibnja 2022.

Zadatak 3 (13 bodova)

(a) (6 bodova) Definirajte Cauchyjev niz u metričkom prostoru. Mora li u prostoru $(\mathbb{R}^2, d_2)$ svaki Cauchyjev niz konvergirati? Ako da, dokažite; ako ne, nađite kontraprimjer.

(b) (4 boda) Neka je $(v_k)_k$ konvergentan niz u normiranom prostoru $\mathbb{R}^n$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Dokažite da je $(\lambda v_k)_k$ konvergentan niz i odredite mu limes.

(c) (3 boda) Neka su $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$ nizovi realnih brojeva takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako $(a_n)_n$ i $(c_n)_n$ imaju isto gomilište, mora li i $(b_n)_n$ imati to gomilište? Ako da, dokažite; ako ne, napišite kontraprimjer.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Osnove matematičke analize

Prvi kolokvij - 2. svibnja 2022.

Zadatak 4 (14 bodova)

(a) (5 bodova) Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Definirajte pojam gomilišta skupa A. Dokažite da je A zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.

(b) (5 bodova) Dokažite po definiciji da je skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3, y \in [1, 5]\}$ zatvoren skup u $\mathbb{R}^2$. Detaljno i precizno obrazložite odgovor.

(c) (4 boda) Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$. Definirajte pojmove zatvarač i interior skupa A. Odredite zatvarač i interior skupa $\{(2, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1\}$ u $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Detaljno obrazložite odgovor.