SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Radulović, Borja Rukavina

Osnove matematičke analize

– skripta –

Zagreb, 12. travnja 2024.

Sadržaj

Poglavlje 1

Zasnivanje skupova $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^N$

1. Skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$

Zadatak 1.1. *Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

a) $2^n > n$,

b) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Rješenje: Koristimo aksiom matematičke indukcije ($P3$):

a) Baza ($n = 1$): $2^1 > 1$

Korak: pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^n > n. \tag{1.1}$$

Tada iz (1.1) slijedi da je $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n + n \geq n + 1$.

b) Baza ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2. \tag{1.2}$$

Korak: pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2. \tag{1.3}$$

Tada je

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \tag{1.4}$$

□

Zadatak 1.2. *Dokažite da svaki neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima najmanji element, tj. $\exists s \in S$ takav da $s \leq k$, $\forall k \in S$.*

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da tvrdnja ne vrijedi. Tada postoji neprazni podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ koji nema najmanji element. Neka je

$$R := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq s \text{ za svaki } s \in S\}. \tag{1.5}$$

Kako S nema najmanji element, jasno je da vrijedi $R \cap S = \emptyset$. Jasno je da je $1 \in R$ (aksiom ($P1$)). Pretpostavimo da je $k \in R$. Tada svaki prirodni broj manji ili jednak k mora također biti manji ili jednak s za svaki $s \in S$. Stoga je $1, 2, \ldots, k \in R$. Iz činjenice da $R \cap S = \emptyset$, vidimo da vrijedi $1, 2, \ldots, k \notin S$. Da je $k + 1 \in S$, tada bi $k + 1$ bio najmanji element skupa S. Ova činjenica implicira da $k + 1 \in R$. Stoga, princip matematičke indukcije implicira da je $R = \mathbb{N}$. Tada je S prazan skup, što je kontradikcija s pretpostavkom da je S neprazan. Stoga, svaki neprazan skup prirodnih brojeva mora imati najmanji element. □

Zadatak 1.3. *Dokažite da jednadžba $q^2 = 2$ nema rješenja u skupu $\mathbb{Q}$.*

Rješenje: Pretpostavimo da postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $q^2 = 2$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $q = \frac{m}{n}$, za $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ te da su m i n relativno prosti, tj. nemaju zajedničkog djeljitelja različitog od -1 i 1 ("razlomak je maksimalno skraćen"). Tada je

$$\frac{m^2}{n^2} = 2, \tag{1.6}$$

odakle slijedi

$$m^2 = 2n^2, \tag{1.7}$$

pa je m^2 djeljiv s 2. Tada je i m djeljiv s 2, jer u slučaju da nije, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k + 1$ pa bi slijedilo da

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \tag{1.8}$$

nije djeljiv s 2, što je kontradikcija. Dakle, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k$. Tada iz

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2, \tag{1.9}$$

slijedi

$$n^2 = 2k^2, \tag{1.10}$$

odakle slično vidimo da je i n djeljiv s 2, tj. postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 2l$. Time smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da su m i n relativno prosti.

$\square$

Domaća zadaća

1. Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

2. Dokažite da za svaka tri prirodna broja x, y i z vrijedi
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3. Dokažite da su definicije zbrajanja i množenja cijelih i racionalnih borjeva „dobre", tj. da ne ovise o izboru predstavnika klase.

4. Dokažite asocijativnost zbrajanja u skupu $\mathbb{Q}$.

2. Skup $\mathbb{R}$

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ definiramo pomoću aksioma:

1. Aksiomi zbrajanja $(+)$

   (A1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (asocijativnost)

   (A2) $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = 0 + x = x$ (neutralni element)

   (A3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R})\ x + (-x) = (-x) + x = 0$ (inverz)

   (A4) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$ (komutativnost)

$(\mathbb{R}, +)$ je abelova grupa.

2. Aksiomi množenja $(\cdot)$

   (A5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (xy)z = x(yz)$ (asocijativnost)

   (A6) $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{R})\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (neutralni element)

   (A7) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R})\ x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ (inverz)

   (A8) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ xy = yx$ (komutativnost)

   (A9) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x(y + z) = xy + xz$ (distributivnost $\cdot$ prema $+$)

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je polje.

Zadatak 2.1. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dokažite:*

a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$,

b) $-(-x) = x$,

c) $x \neq 0,\ x \cdot y = x \Rightarrow y = 1$,

d) $0 \cdot x = 0$,

e) $(-x) \cdot y = -(xy)$.

Rješenje:

a) $y = (A2) = 0+y = (A3) = ((-x)+x)+y = (A1) = (-x)+(x+y) = (pretpostavka) = (-x) + (x + z) = (A1) = ((-x) + x) + z = (A3) = 0 + z = (A2) = z$,

b) $(-x) + (-(-x)) = (A3) = 0 = (A3) = (-x) + x \Rightarrow$ (koristimo a)) $-(-x) = x$,

c) $1 = (A7) = x^{-1} \cdot x = (pretpostavka) = x^{-1} \cdot (xy) = (A5) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = (A7) = 1 \cdot y = (A6) = y$,

d) $0 \cdot x = (A2) = (0 + 0) \cdot x = (A9) = 0 \cdot x + 0 \cdot x = 2 \cdot 0x$ $(1 \cdot 0x = 2 \cdot 0x)$
Pretpostavimo da vrijedi $0 \cdot x \neq 0$. Tada iz c) slijedi $1 = 2$ $(1 + 0 = 1 + 1)$, odakle dobijemo (koristeći dio a)) $0 = 1$, što je kontradikcija s $(A6)$. $(1 \neq 0)$

e) $-(xy) + xy = (A3) = 0 = (d)) = 0 \cdot y = (A3) = ((-x) + x) \cdot y = (A9) = (-x) \cdot y + xy$.
Iz dijela a) imamo $(-x) \cdot y = -(xy)$.

□

3. Aksiomi uređaja

   (A10) $(\forall x, y, \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \vee (y \leq x)$ (linearnost)

   (A11) $(\forall x, y, \in \mathbb{R})\ ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y)$ (antisimetričnost)

   (A12) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$ (tranzitivnost)

   (A13) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \leq y) \Rightarrow x + z \leq y + z$ (usklađenost zbrajanja)

   (A14) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ ((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \Rightarrow x \cdot y \geq 0$ (usklađenost množenja)

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je totalno uređeno polje.

Zadatak 2.2. *Dokažite da za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

a) $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$,

b) $0 < 1$,

c) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$,

d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

Rješenje:

a) Iz $x \leq 0$ koristeći (A13) imamo $0 = (A3) = (-x) + x \leq (-x) + 0 = (A2) = -x$, iz čega slijedi $0 \leq -x$.

b) Zbog (A6) imamo $0 \neq 1$ pa vrijedi $0 < 1$ ili $1 < 0$. Pretpostavimo da vrijedi $1 < 0$. Iz a) imamo $-1 > 0$ pa iz (A14) dobivamo $(-1) \cdot (-1) > 0$.

   S druge strane, koristeći tvrdnje *b)* i *e)* iz Zadatka 2.1 imamo $(-1)\cdot(-1) = -(1\cdot(-1)) = -(-(1 \cdot 1)) = 1$, pa vrijedi $1 > 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $1 < 0$.

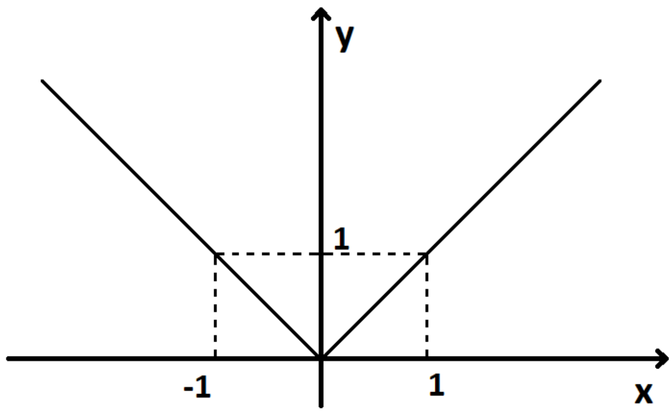
c) Koristeći tvrdnju *e)* iz Zadatka 2.1 dobivamo $(x-y)(x+y) = (A9) = (x-y)x + (x-y)y = (A9) = x^2 + (-y)x + xy + (-y)y = x^2 - xy + xy - y^2 = (A3) = x^2 + 0 - y^2 = (A2) = x^2 - y^2$.

d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x, y \geq 0$ i $y - x \geq 0$ pa imamo $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) \geq (A14) \geq 0$ (gdje je $y - x \geq 0$ i $y + x \geq y + 0 \geq 0 + 0 = 0$), dobivamo $y^2 \geq x^2$.

$\square$

Definicija 2.1. *Apsolutna vrijednost je funkcija* $|\cdot| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirana sa*

$$|x| := \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$



Napomena 2.2. *Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:*

a) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

c) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$,

d) $||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.3. *Dokažite da za $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \tag{2.2}$$

Rješenje: Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza: (n=1) $|x_1| \le |x_1|$

Korak: Pretpostavimo da (2.2) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ $(*)$. Neka su $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Tada iz Napomene 2.2 $c)$ i pretpostavke $(*)$:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\Big| \le \Big|\sum_{k=1}^{n} x_k\Big| + |x_{n+1}| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|. \tag{2.3}$$

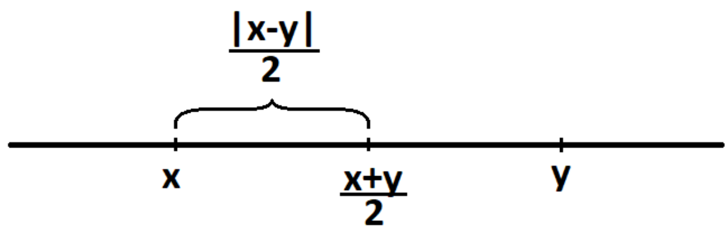
□

Zadatak 2.4. *Dokažite da za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

a) $\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, *b)* $\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

Rješenje:

a) Grafički:



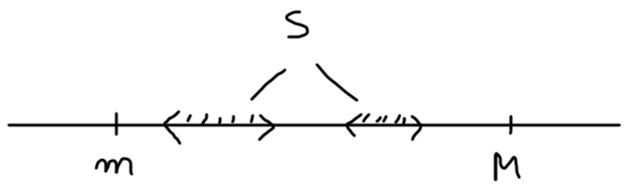
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \le y$. Tada je $x - y \le 0$, iz čega slijedi $|x-y| = -(x-y)$, pa je

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(-(x-y))}{2} = x = \min\{x,y\}. \tag{2.4}$$

b) Slično (domaća zadaća).

□

Definicija 2.3. *Skup $S \subset \mathbb{R}$ je omeđen odozgo (odozdo) ako postoji $M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$ takav da $(\forall x \in S)$ $x \le M$ $(m \le x)$. Kažemo da je M (m) gornja (donja) međa skupa S.*

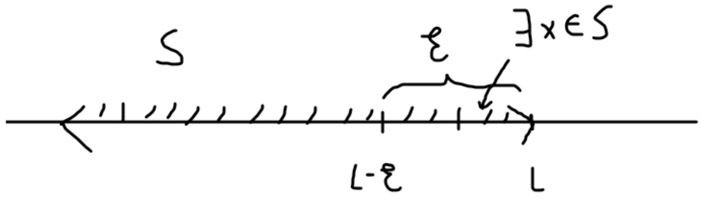


Najmanju gornju među zovemo supremum, a najveću donju među zovemo infimum skupa S. Pišemo: $\sup S$ *i* $\inf S$.

Ako je L gornja međa, tada je ona supremum ako i samo ako ne postoji manja gornja međa, odnosno $(\forall a \in \mathbb{R},\, a < L)\, \exists x \in S$ *t.d.* $a < x$, *odnosno*

i) $(\forall x \in S)\ x \leq L$,

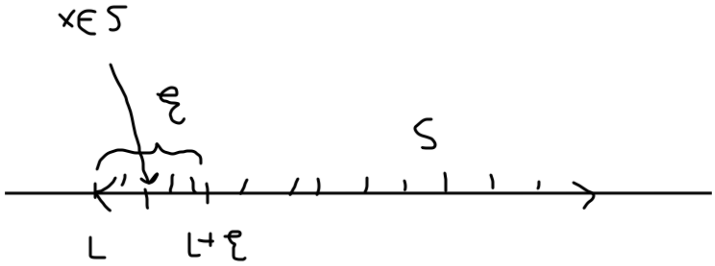
ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S)\ L - \varepsilon < x$.



Slično je donja međa L infimum skupa S ako i samo ako vrijedi $(\forall a \in \mathbb{R},\, a > L)\, \exists x \in S$ *t.d.* $a > x$, *odnosno*

i) $(\forall x \in S)\ x \geq L$,

ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S)\ L + \varepsilon > x$.



$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ i $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ zadovoljavaju (A1)-(A14).

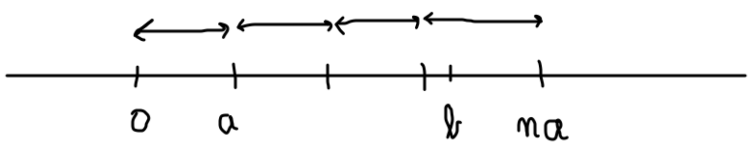
Uvodimo aksiom potpunosti:

(A15) Svaki neprazan i odozgo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$ (tj. $\sup S \in \mathbb{R}$).

Napomena 2.4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *ne zadovoljava (A15).*

Napomena 2.5. *U skupu $\mathbb{R}$ vrijedi Arhimedov aksiom:*

(AA) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a > 0,\ b > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$.



Definicija 2.6. *Neka je* $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$. *Ako je* $L\colon = \sup S \in S$ ($L\colon = \inf S \in S$), *onda* $\sup S$ ($\inf S$) *zovemo maksimum (minimum) skupa S i pišemo* $\max S\colon = L$ ($\min S\colon = L$).

Zadatak 2.5. *Odredite infimum i supremum skupova:*

a) $A = \left\{\frac{1}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$, *b)* $B = \left\{\frac{x^2-4}{x^2+4} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$.

Rješenje:

(a) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{0+1} = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

iz čega slijedi da je 1 gornja međa skupa A. Nadalje, za $x = 0$ imamo

$$\frac{1}{x^2+1} = 1, \tag{2.6}$$

iz čega slijedi da je 1 maksimum skupa A. Dakle, $\sup A = \max A = 1$.

Nadalje, primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

iz čega slijedi da je 0 donja međa skupa A.

Dokažimo da je $\inf A = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\frac{1}{x^2+1} < 0 + \varepsilon, \tag{2.8}$$

to jest

$$x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Po Arhimedovom aksiomu za $a = \varepsilon$ i $b = 1$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n\varepsilon > 1. \tag{2.10}$$

Tada je za $x \geq n$

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Dakle, $\inf A = 0$.

(b) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{x^2+4-4-4}{x^2+4} = 1 - \frac{8}{x^2+4}. \tag{2.12}$$

Nadalje, imamo:

$$1 - \frac{8}{x^2+4} < 1, \tag{2.13}$$

jer je $\frac{8}{x^2+4} > 0$, pa imamo da je 1 gornja međa skupa B. Tvrdimo da je $\sup B = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tražimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$1 - \frac{8}{x^2+4} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{8}{x^2+4} \Leftrightarrow (x^2+4)\varepsilon > 8. \tag{2.14}$$

Po Arhimedovom aksiomu sada za $a = \varepsilon$ i $b = 8$ imamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot \varepsilon > 8$, odakle je za $x \geq n$: $(x^2+4)\varepsilon \geq x^2\varepsilon \geq n^2\varepsilon \geq n\varepsilon > 8$.

Dakle, $\sup B = 1$.

S druge strane, primijetimo da vrijedi:

$$1-\frac{8}{x^2+4}\geq 1-\frac{8}{0+4}=1-2=-1, \tag{2.15}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $x^2\geq 0$.

Sada za $x=0$ imamo $1-\frac{8}{x^2+4}=1-\frac{8}{4}=-1$, te imamo $\inf B=\min B=-1$.

□

Definicija 2.7. *Niz realnih brojeva je funkcija $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Umjesto $a(n)$ pišemo a_n. Niz označavamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Kažemo da je (a_n) rastući (padajući) ako $(\forall n\in\mathbb{N})a_n\leq a_{n+1}$ ($a_n\geq a_{n+1}$). U slučaju stroge nejednakosti ($<$ ili $>$) kažemo da je (a_n) strogo rastući (strogo padajući).*

Zadatak 2.6. *Odredite infimum i supremum skupova:*

a) $S=\{\frac{3n-2}{n+3}|n\in\mathbb{N}\}$, *b)* $S=\{\frac{n^2+1}{2n^2+n}|n\in\mathbb{N}\}$.

Rješenje:

(a) Imamo:

$$a_n=\frac{3n-2}{n+3}=\frac{3(n+3)-3\cdot 3-2}{n+3}=3-\frac{11}{n+3}. \tag{2.16}$$

Dakle, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je rastući niz, iz čega slijedi:

$$\inf S=\min S=a_1=3-\frac{11}{4}=\frac{1}{4}. \tag{2.17}$$

Tvrdimo da je $\sup S=3$. Vrijedi:

$$a_n=3-\frac{11}{n+3}\leq 3, \tag{2.18}$$

iz čega slijedi da je 3 gornja međa skupa S.

Neka je $\varepsilon>0$. Imamo:

$$\begin{aligned} a_n>3-\varepsilon &\Leftrightarrow 3-\frac{11}{n+3}>3-\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \varepsilon>\frac{11}{n+3}\Leftrightarrow (n+3)\varepsilon>11. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Po Arhimedovom aksiomu, postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takav da je $n_0\varepsilon>11$ ($a=\varepsilon$, $b=11$), pa je $(n_0+3)\varepsilon>11$, odakle slijedi $a_{n_0}>3-\varepsilon$. Dakle, $\sup S=3$.

(b) Imamo niz:

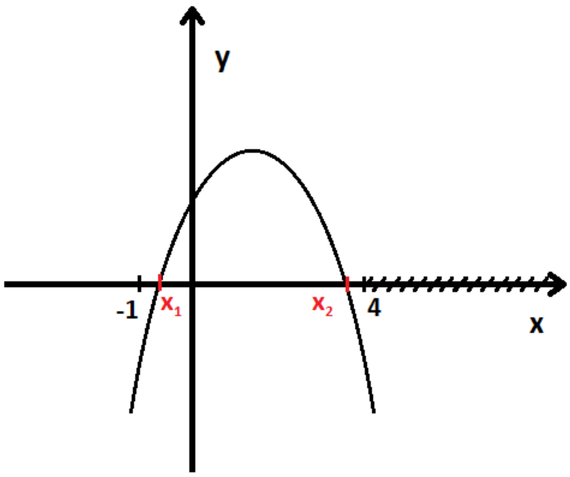
$$a_n=\frac{n^2+1}{2n^2+n}. \tag{2.20}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} a_n<a_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{2n^2+n}<\frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2+n+1}\\ &\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{2n^2+n}<\frac{n^2+2n+2}{2n^2+5n+3}\\ &\Leftrightarrow (n^2+1)(2n^2+5n+3)<(n^2+2n+2)(2n^2+n)\\ &\Leftrightarrow 2n^4+5n^3+5n^2+5n+3<2n^4+5n^3+6n^2+2n\\ &\Leftrightarrow -n^2+3n+3<0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Vrijedi:

$$-x^2+3x+3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+12}}{-2}=\frac{3\mp\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x_1=-0.79\ x_2=3.79. \tag{2.22}$$



Dakle, (2.21) vrijedi za $n>x_2 \Leftrightarrow n\geq 4$. Tada je niz rastući. Imamo:

$$a_1>a_2>a_3>a_4<a_5<a_6<\ldots. \tag{2.23}$$

Slijedi da je $\inf S=\min S=a_4=\frac{17}{36}$.

$\sup S=?$. Imamo:

$$a_1=\frac{1^2+1}{2\cdot 1^2+1}=\frac{2}{3}. \tag{2.24}$$

Vrijedi:

$$a_n=\frac{n^2+1}{2n^2+n}=\frac{1}{2}\frac{n^2+1}{n^2+\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}\frac{n^2+\frac{n}{2}-\frac{n}{2}+1}{n^2+\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{n}{2}-1}{n^2+\frac{n}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{n-2}{4n^2+2n}\leq\frac{1}{2},\ n\geq 2. \tag{2.25}$$

Dakle, $\sup S=\max S=a_1=\frac{2}{3}$. □

Zadatak 2.7. *Neka su $A,B\subseteq\mathbb{R}$ odozgo omeđeni skupovi. Dokažite:*

(a) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$,

(b) $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$.

Rješenje:

(a) Zbog

$$x+y\leq\sup A+\sup B,\ \forall x\in A,\ y\in B, \tag{2.26}$$

je $\sup A+\sup B$ gornja međa skupa $A+B$. Neka je $\varepsilon>0$. Tada

$$(\exists x_0\in A)(\exists y_0\in B)\ x_0>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}\ \text{i}\ y_0>\sup B-\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.27}$$

Tada je $x_0+y_0\in A+B$ i $x_0+y_0>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}+\sup B-\frac{\varepsilon}{2}=\sup A+\sup B-\varepsilon$.

(b) Bez smanjenja općenitosti imamo $\sup A \leq \sup B$ (inače zamijenimo uloge A i B). Vrijedi:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ili } x \in B \Rightarrow x \leq \sup A \leq \sup B \text{ ili } x \leq \sup B. \tag{2.28}$$

Dakle, imamo:

$$(\forall x \in S = A \cup B)\ x \leq \sup B, \tag{2.29}$$

pa je $\sup B$ gornja međa skupa $A \cup B$. Dokažimo da je to i supremum. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada

$$(\exists x_0 \in B \subset A \cup B = S)\ x_0 > \sup B - \varepsilon. \tag{2.30}$$

Dakle, $\sup B$ je najmanja gornja međa skup $A \cup B$.

Slijedi da je $\sup B = \max\{\sup A, \sup B\}$ supremum skupa $A \cup B$.

□

Napomena 2.8. *Slično se pokaže (DZ): Ako su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni skupovi, onda vrijedi:*

(a) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,

(b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Zadatak 2.8. *Odredite infimum i supremum skupova:*

(a) $S = \{\frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $S = \{(-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+7} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Rješenje:

(a) Vrijedi:

$$\frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} = \frac{m-n-1}{(m+3)(n+4)} = \frac{m+3-(n+4)}{(m+3)(n+4)} = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{m+3}. \tag{2.31}$$

Dakle, $S = A + B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{\frac{1}{n+4} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \\ B &:= \left\{-\frac{1}{m+3} \mid m \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} &\sup A = \max A = \frac{1}{5}\ (n = 1), \quad \sup B = 0, \\ &\inf A = 0, \quad \inf B = \min B = -\frac{1}{4}\ (m = 1). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} &\sup S = \sup A + \sup B = \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5} \text{ (nije maksimum)}, \\ &\inf S = \inf A + \inf B = 0 + (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4} \text{ (nije minimum)}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

(b) Definiramo $S := A \cup B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{(-1)^{2k}\frac{(2k)^2+2}{(2k)^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{4k^2+2}{4k^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\right\}, \\ B &:= \left\{(-1)^{2k-1}\frac{(2k-1)^2+2}{(2k-1)^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\right\} = \left\{-\frac{(2k-1)^2+2}{(2k-1)^2+7} \mid k \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Skup A. Definiramo:

$$a_k = \frac{4k^2+2}{4k^2+7} = 1 - \frac{5}{4k^2+7} < 1. \tag{2.36}$$

Niz a_k je rastući pa vrijedi $\inf A = \min A = a_1 = \frac{6}{11}$.

Uočimo da je 1 je gornja međa skupa A. Dokažimo da je $\sup A = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} a_k > 1 - \varepsilon &\Leftrightarrow 1 - \frac{5}{4k^2+7} > 1 - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{4k^2+7} \Leftrightarrow (4k^2+7)\varepsilon > 5. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon$ i $b = 5$) postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0\varepsilon > 5$, pa vrijedi:

$$(4k_0^2+7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5. \tag{2.38}$$

Dakle, $\sup A = 1$.

Skup B. Definiramo:

$$b_k = -\frac{(2k-1)^2+2}{(2k-1)^2+7} = -1 + \frac{5}{(2k-1)^2+7}. \tag{2.39}$$

Niz b_k je padajući pa vrijedi $\sup B = \max B = b_1 = -\frac{3}{8}$.

Uočimo da je -1 donja međa skupa B. Dokažimo da je $\inf B = -1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} b_k < -1 + \varepsilon &\Leftrightarrow -1 + \frac{5}{(2k-1)^2+7} < -1 + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{(2k-1)^2+7} \Leftrightarrow ((2k-1)^2+7)\varepsilon > 5. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon$ i $b = 5$) postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0\varepsilon > 5$ pa vrijedi:

$$((2(k_0+1)-1)^2+7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5. \tag{2.41}$$

Dakle, $\inf B = -1$.

Sada imamo

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} = \max\left\{1, -\frac{3}{8}\right\} = 1, \\ \inf S &= \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} = \min\left\{\frac{6}{11}, -1\right\} = -1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

$\square$

Zadatak 2.9. *Neka su $A, B \subset [0, \infty\rangle$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo:*

$$A \cdot B = \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}. \tag{2.43}$$

Dokažite

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Rješenje: Ako je $\sup A = 0$, onda je $A = \{0\}$ pa je $A \cdot B = \{0\}$ i tvrdnja slijedi.

Pretpostavimo da je $\sup A > 0$. Vrijedi:

$$xy \leq \sup A \sup B,\ \forall x \in A,\ \forall x \in B, \tag{2.44}$$

pa slijedi da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $A \cdot B$.

Dokažimo da je supremum.

Prvi način: Neka je $0 < \varepsilon < \sup A \sup B$. Tada za:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon}{2 \sup B} > 0\ (\exists x \in A)\ x > \sup A - \varepsilon_1, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon}{2 \sup A} > 0\ (\exists y \in B)\ y > \sup B - \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Sada imamo:

$$xy > (\sup A - \varepsilon_1)(\sup B - \varepsilon_2) = \sup A \sup B - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4 \sup A \sup B} > \sup A \sup B - \varepsilon. \tag{2.46}$$

Drugi način: Stavimo oznaku $C = A \cdot B$. Već smo dokazali da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $C = A \cdot B$. Kako je skup C odozgo ograničen, po aksiomu potpunosti, C ima supremum u $\mathbb{R}$, a kako je supremum najmanja gornja međa, vrijedi

$$\sup C \leq \sup A \sup B \quad (1)$$

Dokažimo sada da vrijedi i $\sup A \sup B \leq \sup C$. Vrijedi $ab \leq \sup C$ za sve $a \in A, b \in B$. Budući da smo pretpostavili $\sup A > 0$, postoji $a' \in A \setminus \{0\}$. Vrijedi $b \leq \frac{\sup C}{a'}$ za sve $b \in B$ pa je $\frac{\sup C}{a'}$ gornja međa skupa B, iz čega slijedi

$$\sup B \leq \frac{\sup C}{a'}.$$

Ukoliko je $\sup B = 0$, onda je $B = \{0\}$ pa je $C = \{0\}$ i onda tvrdnja očito vrijedi jer je u ovom slučaju $\sup C = \sup A \sup B = 0$. Ako je $\sup B > 0$, onda možemo zaključiti da je

$$a' \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a' \in A \setminus \{0\}$, a zapravo vrijedi i

$$a \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a \in A$. Stoga je $\frac{\sup C}{\sup B}$ gornja međa skupa A pa je

$$\sup A \leq \frac{\sup C}{\sup B},$$

odnosno

$$\sup A \sup B \leq \sup C. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi $\sup A \sup B = \sup C$. $\square$

Napomena 2.9. *Ako su* $A, B \subset [0, \infty\rangle$, *vrijedi* $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$ *(domaća zadaća).*

Napomena 2.10. *Ako su* $A, B \subset \mathbb{R}$ *neprazni i omeđeni, tada je*

$$\begin{aligned} \sup(A \cdot B) &= \max\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}, \\ \inf(A \cdot B) &= \min\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Zadatak 2.10. *Odredite infimum i supremum skupova:*

(a) $S = \{\frac{2n-1}{n}\frac{1+m}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $S = \{\frac{n^2x}{n^2x+2x+n^2+2} \mid n \in \mathbb{N},\ x \geq 0\}$.

Rješenje:

(a) Neka je $S = A \cdot B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{\frac{2n-1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subset [0, \infty\rangle, \\ B &:= \left\{\frac{1+m}{m} \,|\, m \in \mathbb{N}\right\} \subset [0, \infty\rangle. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Dobivamo da je $\sup A = 2$, $\inf A = \min A = 1$ (postiže se za $n = 1$) te $\sup B = \max B = 2$ (postiže se za $m = 1$) i $\inf B = 1$.

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup A \cdot \sup B = 2 \cdot 2 = 4, \\ \inf S &= \inf A \cdot \inf B = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned} \tag{2.49}$$

(b) Vrijedi

$$S = \left\{\frac{n^2}{n^2+2} \cdot \frac{x}{x+1} \ \mid\ n \in \mathbb{N},\ x \geq 0\right\} = A \cdot B, \tag{2.50}$$

gdje je

$$A := \left\{\frac{n^2}{n^2+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq [0, \infty\rangle,\ B := \left\{\frac{x}{x+1} \mid x \geq 0\right\} \subseteq [0, \infty\rangle. \tag{2.51}$$

Lako dobivamo da je $\sup A = 1$ i $\inf A = \min A = \frac{1}{3}$ $(n = 1)$.

Vrijedi

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

pa je 0 donja međa skupa B, a ujedno i minimum skupa B jer se dostiže za $x = 0$. Stoga je $\inf B = 0$.

Nadalje,

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} < 1$$

za $x \geq 0$ pa je 1 gornja međa skupa B. Dokažimo da je $\sup B = 1$. Treba dokazati

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \geq 0)(1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{x+1}),$$

što je ekvivalentno s $\varepsilon(x+1) > 1$. Primjenom Arhimedovog aksioma na ε i 1, dobivamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon n > 1$. Sada je

$$\varepsilon(n+1) > \varepsilon n > 1,$$

tj.

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Slijedi da je $\sup B = 1$ te $\inf B = \min B = 0$ $(x = 0)$.

Sada vidimo da je $\sup S = \sup A \cdot \sup B = 1 \cdot 1 = 1$ te $\inf S = \inf A \cdot \inf B = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 = \min S$.

$\square$

Domaća zadaća

1. Odredite supremume i infimume sljedećih skupa (ako postoje):

   a) $A = \left\{(-1)^{n+1}\frac{2n^2-1}{n^2+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   b) $B = \left\{\frac{2m+2n-3}{2mn-2m-n+1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\right\}$.

   c) $C = \left\{(-1)^{n+m}\frac{mn+m}{2mn+n-2m-1} : m, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\right\}$.

   d) $D = \left\{(-1)^{n-m} \cdot \frac{2mn-m+6n-3}{mn+n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

   e) $E = \left\{\frac{2nm^2+4nm-2n-3m^2-6m+3}{nm^2+2mn} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

   f) $F = \left\{\frac{nx^2-4nx+2}{n} : n \in \mathbb{N}, x \in \langle 0, 3]\right\}$

   g) $G = \left\{\frac{n^2+1}{3n^2+n}(2 + \cos(m\pi)) : n, m \in \mathbb{N}\right\}$

2. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni skupovi. Dokažite:

   (a) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,

   (b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

3.* Neka su $A, B \subseteq [0, +\infty\rangle$. Dokažite da je

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

4. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni ograničeni skupovi. Vrijedi li nužno:

   a) Ako je $A \subsetneq B$, onda je $\sup A < \sup B$?

   b) Ako je $A \subsetneq B$, onda je $\inf A > \inf B$?

   c) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?

   d) $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$?

   e) $\sup(A - B) = \sup(A) - \sup(B)$, gdje je $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$?

   f) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$?

Ako neke od tih tvrdnji vrijede općenito, dokažite ih, a ako ne vrijede općenito, navedite kontraprimjer.

5. Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dokažite:

    a) $\langle a, b\rangle \sim [a, b\rangle \sim \langle a, b] \sim [a, b] \sim \mathbb{R}$.

    b) $[a, +\infty\rangle \sim \langle -\infty, a] \sim \mathbb{R}$.

6. Dokažite da je skup iracionalnih brojeva neprebrojiv skup.

7.* Dokažite da je skup iracionalnih brojeva gust u $\mathbb{R}$, tj. da za svaki $x \in \mathbb{R}$ i za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\langle x - \epsilon, x + \epsilon\rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

Poglavlje 2

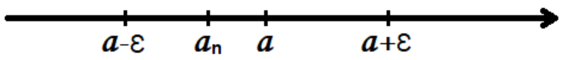
Nizovi u $\mathbb{R}$

1. Konvergencija nizova

Definicija 1.1. *Niz realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k realnom broju a ako vrijedi:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.1}$$

Pišemo: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.



Zadatak 1.1. *Dokažite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0,\ p > 0. \tag{1.2}$$

Rješenje: Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n^p} < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow n \cdot \varepsilon^{1/p} > 1,\ \forall n \geq n_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon^{1/p}$ i $b = 1$) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $n_0\varepsilon^{1/p} > 1$. □

Teorem 1.2 (Teorem o sendviču)**.** *Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentni nizovi tako da vrijedi $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: L$. Ako je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz takav da je $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onda je i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.*

Zadatak 1.2. *Izračunajte limese:*

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2\cos(n)+8n}{n^3+1}$,

b) $\lim_{n\to\infty} q^n,\ q \in \langle 0, 1\rangle$,

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$,

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a},\ a \geq 1$,

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n!}$.

Rješenje:

a) Vrijedi:

$$0 \leq \left|\frac{5n^2\cos n + 8n}{n^3+1}\right| \leq \frac{5n^2|\cos n| + 8n}{n^3+1} \leq \frac{5 + \frac{8}{n}}{n + \frac{1}{n^2}} \to 0,\ n \to \infty. \tag{1.4}$$

Po Teoremu o sendviču slijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2\cos n + 8n}{n^3+1} = 0. \tag{1.5}$$

b) Vrijedi (koristimo binomni teorem):

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n = \left(1+\frac{1}{q}-1\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{1}{q}-1\right)^k \geq \binom{n}{1}\left(\frac{1}{q}-1\right), \tag{1.6}$$

gdje smo iskoristili da je $\frac{1}{q}-1>0$. Dakle, slijedi:

$$0 \leq q^n \leq \frac{1}{\frac{1}{q}-1}\frac{1}{n} \to 0,\ n\to\infty. \tag{1.7}$$

Po Teoremu o sendviču slijedi da

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0,\ q\in\langle 0,1\rangle. \tag{1.8}$$

c) Vrijedi:

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1+(\sqrt[n]{n}-1))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt[n]{n}-1)^k \geq 1+\binom{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2. \tag{1.9}$$

Sada dobivamo:

$$\begin{aligned} n &\geq 1+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{n}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \to 1,\ n\to\infty, \end{aligned} \tag{1.10}$$

za $n\geq 2$.

Po Teoremu o sendviču slijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1. \tag{1.11}$$

d) Vrijedi:

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n},\ \forall n \geq a. \tag{1.12}$$

Znamo da $\sqrt[n]{n}\to 1,\ n\to\infty$ po *c*) dijelu Zadatka, pa po Teoremu o sendviču imamo:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1. \tag{1.13}$$

e) Vrijedi:

$$4 = \sqrt[n]{0+0+4^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} \leq \sqrt[n]{4^n+4^n+4^n} \leq 4\cdot\sqrt[n]{3}. \tag{1.14}$$

Znamo da $\sqrt[n]{a}\to 1,\ n\to\infty$ po *d*) dijelu Zadatka, pa po Teoremu o sendviču vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n} = 4. \tag{1.15}$$

f) Vrijedi:

$$0 \leq \frac{\sqrt{n^2+1}}{n!} \leq \frac{\sqrt{n^2+n^2}}{n!} \leq \frac{n\sqrt{2}}{n!} = \frac{\sqrt{2}}{(n-1)!} \leq \frac{\sqrt{2}}{n-1} \to 0,\ n\to\infty. \tag{1.16}$$

Po Teoremu o sendviču vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n!} = 0. \tag{1.17}$$

□

Napomena 1.3. *Vrijedi:*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ a > 0, \\ &\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \\ &\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \ q \in \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Teorem 1.4. *Vrijedi:*

i) Ako je (a_n) rastući i odozgo omeđen, onda je konvergentan i $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Ako je (a_n) padajući i odozdo omeđen, onda je konvergentan i $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Zadatak 1.3. *Izračunajte:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}. \tag{1.19}$$

Rješenje: Definiramo:

$$a_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}. \tag{1.20}$$

Tada je

$$a_{n+1} = \Big(2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{\text{n korijena}}\Big)^{1/2} \tag{1.21}$$

Imamo: $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Dokazati ćemo da je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući i odozgo omeđen pomoću matematičke indukcije.

Dokazujemo da je $(a_n)_n$ rastući, tj. da vrijedi

$$a_n \leq a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.22}$$

Baza. $(n = 1)$, $a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$.

Korak. Pretpostavimo da je $a_n \leq a_{n+1}$ za neki $n \in \mathbb{N}$.

Tada vrijedi (koristimo pretpostavku indukcije):

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}. \tag{1.23}$$

Dokazujemo da je $(a_n)_n$ odozgo omeđen s 2, tj. da vrijedi

$$a_n \leq 2, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Baza. $(n = 1)$, $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$.

Korak. Pretpostavimo da je $a_n \leq 2$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2. \tag{1.25}$$

Dakle, (a_n) je rastući i odozgo omeđen pa je po Teoremu 1.4 niz (a_n) konvergentan.

Označimo $L := \lim_{n\to\infty} a_n$.

Tada iz

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \tag{1.26}$$

dobijemo:

$$\begin{aligned} L = \sqrt{2+L} &\Leftrightarrow L^2 = 2 + L \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (L-2)(L+1) = 0 \Leftrightarrow L = 2 \text{ ili } L = -1. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Odbacujemo $L = -1$ jer iz $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ slijedi $L \geq 0$.

Dakle, $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$. □

Zadatak 1.4 (Domaća zadaća). *Dokažite:*

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{12 + \sqrt{12 + \cdots + \sqrt{12}}}}_{n \text{ korijena}} = 4. \tag{1.28}$$

Zadatak 1.5. *Dokažite da je* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Rješenje: Definiramo $a_n = \frac{n}{2^n}$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} a_n. \tag{1.29}$$

Zbog

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{n+1}{2n} < 1 \Leftrightarrow n > 1, \tag{1.30}$$

vidimo da je (a_n) padajući za $n \geq 2$. Očito je (a_n) odozdo omeđen s 0 pa je konvergentan. Označimo $L := \lim_{n\to\infty} a_n$. Iz

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} a_n \tag{1.31}$$

dobijemo $L = \frac{1}{2}L$, tj. $L = 0$. □

Definicija 1.5. *Niz $(b_n)_n$ je podniz niza $(a_n)_n$ ako postoji strogo rastuća funkcija $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $b_n = a_{p_n},\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Lema 1.6. *Svaki niz u $\mathbb{R}$ ima monoton podniz.*

Teorem 1.7 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Svaki omeđeni niz ima konvergentan podniz.*

Teorem 1.8. *Ako je niz (a_n) konvergentan s limesom $L \in \mathbb{R}$, onda je svaki njegov podniz konvergentan s istim limesom L.*

Definicija 1.9. *Kažemo da niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k $+\infty$ ako*

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ a_n > M,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.32}$$

Pišemo $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Slično definiramo niz koji konvergira k $-\infty$.

Definiramo prošireni skup realnih brojeva s $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definicija 1.10. *Kažemo da je $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ gomilište niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako postoji podniz $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ niza $(a_n)_n$ takav da je:*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha. \tag{1.33}$$

Napomena 1.11. *Iz Leme 1.6 svaki niz ima barem jedno gomilište u $\overline{\mathbb{R}}$. Iz Bolzano-Weierstrassovog teorema 1.7 slijedi da svaki omeđeni niz ima barem jedno gomilište u $\mathbb{R}$.*

Primjer 1.12.

a) Niz $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ima dva gomilišta: -1 i 1, jer je

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \to -1,\ k\to\infty, \\ a_{2k} &= (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1,\ k\to\infty. \end{aligned} \tag{1.34}$$

b) Niz $a_n = (-1)^n n$ nema gomilišta u $\mathbb{R}$, ali ima u $\overline{\mathbb{R}}$: $\pm\infty$:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (-1)^{2k}\cdot 2k = 2k \to \infty, \\ a_{2k-1} &= (-1)^{2k-1}\cdot(2k-1) = -(2k-1) \to -\infty. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Definicija 1.13. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva i $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ skup svih gomilišta niza (a_n). Definiramo limes superior i limes inferior niza (a_n) s:*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup A \ \ i\ \ \liminf_{n\to\infty} a_n := \inf A. \tag{1.36}$$

Napomena 1.14. *Ako A nije odozgo/odozdo omeđen, onda definiramo:*

$$\sup A = \infty,\ \inf A = -\infty. \tag{1.37}$$

Zadatak 1.6. *Dokažite da je za $q > 1$*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \infty. \tag{1.38}$$

Rješenje: Neka je $M > 0$. Trebamo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$q^n > M,\ \forall n \geq n_0. \tag{1.39}$$

Sada imamo (zbog $q - 1 > 0$ i binomnog teorema):

$$q^n = ((q-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^k \geq n(q-1). \tag{1.40}$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = q - 1$ i $b = M$) postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$n_0(q-1) > M, \tag{1.41}$$

pa je

$$q^n \geq n(q-1) \geq n_0(q-1) > M,\ \forall n \geq n_0, \tag{1.42}$$

što je trebalo i dokazati. □

Zadatak 1.7 (Domaća zadaća)**.** *Dokažite da je za $q > 1$ $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n} = \infty$. Uputa: slijediti rješenje prethodnog Zadatka s $k = 2$.*

Zadatak 1.8. *Izračunajte:*

a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{1+n\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n+1}$, *b)* $\liminf_{n\to\infty} \frac{(1+(-1)^n)^n+n\cos(n\pi)}{2n+1}$.

Rješenje:

a) Neka je

$$a_n = \frac{1+n\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n+1}. \tag{1.43}$$

Sada imamo:

$$\cos(\frac{n\pi}{2}) = \begin{cases} 0, \ n = 2k-1 \ (1,3,5,7,\dots) \\ 1, \ n = 4k \ (0,4,8,\dots) \\ -1, \ n = 4k-2 \ (2,6,\dots) \end{cases} \tag{1.44}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= \frac{1+(2k-1)\cdot 0}{2(2k-1)+1} = \frac{1}{4k-1} \to 0, \ k\to\infty, \\ a_{4k} &= \frac{1+4k}{2\cdot 4k+1} = \frac{1+4k}{8k+1} \to \frac{1}{2}, \ k\to\infty, \\ a_{4k-2} &= \frac{1+(4k-2)\cdot(-1)}{2\cdot(4k-2)+1} = \frac{-4k+3}{8k-3} \to -\frac{1}{2}, \ k\to\infty. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Dakle, $A = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$ pa je $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup A = \frac{1}{2}$.

b) Neka je

$$a_n = \frac{(1+(-1)^n)^n + n\cos(n\pi)}{2n+1}. \tag{1.46}$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{(1+(-1)^{2k})^{2k} + 2k\cdot\cos(2k\pi)}{2\cdot 2k+1} = \frac{2^{2k}+2k}{4k+1} \to \infty, \ k\to\infty, \\ a_{2k-1} &= \frac{(1+(-1)^{2k-1})^{2k-1} + (2k-1)\cdot(-1)}{2\cdot(2k-1)+1} = \frac{-2k+1}{4k-1} \to -\frac{1}{2}, \ k\to\infty. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Dakle, $A = \{-\frac{1}{2}, \infty\}$ pa je $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf A = -\frac{1}{2}$. □

Teorem 1.15. *Niz (a_n) je konvergentan u $\overline{\mathbb{R}}$ ako i samo ako*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n. \tag{1.48}$$

Napomena 1.16. *Za $q < -1$ niz $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nije konvergentan. Naime,*

$$\begin{aligned} q^{2k} &= (q^2)^k \to \infty \ (q^2 > 1), \\ q^{2k-1} &= \frac{1}{q}(q^2)^k \to -\infty \ (\frac{1}{q} < 0), \end{aligned} \tag{1.49}$$

jer je

$$\liminf_{n\to\infty} q^n = -\infty \neq \infty = \limsup_{n\to\infty} q^n. \tag{1.50}$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \textit{ne postoji}, \ q \le -1, \\ 0, \ -1 < q < 1, \\ 1, \ q = 1, \\ \infty, \ q > 1. \end{cases} \tag{1.51}$$

Zadatak 1.9. *Neka je*

$$a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} + (1+a)\sin(\frac{n\pi}{2}). \tag{1.52}$$

Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da niz (a_n) bude konvergentan.

Rješenje: Odredi skup gomilišta A:

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{3^{2k} + (-2)^{2k}}{3^{2k+1} + (-2)^{2k+1}} + (1+a)\cdot 0 = \frac{3^{2k} + 2^{2k}}{3^{2k+1} - 2^{2k+1}} \to \frac{1}{3},\ k \to \infty,\\
a_{4k-1} &= \frac{3^{4k-1} + (-2)^{4k-1}}{3^{4k} + (-2)^{4k}} + (1+a)\cdot(-1) = \frac{3^{4k-1} - 2^{4k-1}}{3^{4k} + 2^{4k}} - (1+a) \to \frac{1}{3} - 1 - a,\ k \to \infty,\\
a_{4k-3} &= \frac{3^{4k-3} + (-2)^{4k-3}}{3^{4k-2} + (-2)^{4k-2}} + (1+a)\cdot 1 = \frac{3^{4k-3} - 2^{4k-3}}{3^{4k-2} + 2^{4k-2}} + 1 + a \to \frac{1}{3} + 1 + a.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Dakle, $A = \{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} - a, \frac{4}{3} + a\}$.

Da bi (a_n) bio konvergentan, treba vrijediti:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n, \tag{1.54}$$

pa skup A treba biti jednočlan skup, tj.

$$\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - a = \frac{4}{3} + a, \tag{1.55}$$

odakle je $a = -1$. $\square$

Definicija 1.17. *Kažemo da je niz realnih brojeva (a_n) Cauchyjev ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ |a_n - a_m| < \varepsilon,\ \forall n, m \geq n_0. \tag{1.56}$$

Teorem 1.18 (Potpunost skupa $\mathbb{R}$). *Niz (a_n) u $\mathbb{R}$ je konvergentan akko je Cauchyjev.*

Zadatak 1.10. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva takav da je*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{3^n},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.57}$$

Je li (x_n) konvergentan?

Rješenje: Dokazati ćemo da je (x_n) Cauchyjev. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Imamo:

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \leq\\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq\\
&\leq \frac{1}{3^{m-1}} + \frac{1}{3^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n}(1 + \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 + \cdots + (\frac{1}{3})^{m-n-1}) =\\
&= \frac{1}{3^n}\frac{1 - (\frac{1}{3})^{m-n}}{1 - \frac{1}{3}} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{3^n},
\end{aligned} \tag{1.58}$$

gdje je $1 - (\frac{1}{3})^{m-n} \leq 1$. Dakle,

$$|x_n - x_m| \leq \frac{3}{2}\frac{1}{3^n},\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n. \tag{1.59}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \ \forall m \geq n \geq n_0. \tag{1.60}$$

Zbog nejednakosti (1.59) je dovoljno pronaći $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da

$$\frac{3}{2}\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon \Leftrightarrow 3^{n_0}\varepsilon > \frac{3}{2}. \tag{1.61}$$

Zbog $3^{n_0} = (1+2)^{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0} \binom{n_0}{k} 2^k \geq n_0 \cdot 2$ i Arhimedovog aksioma (za $a = 2\varepsilon$ i $b = \frac{3}{2}$) vidimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$3^{n_0}\varepsilon \geq n_0 \cdot 2\varepsilon > \frac{3}{2}. \tag{1.62}$$

□

Domaća zadaća

1. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje (ako je tvrdnja istinita, dokažite je, a ako je lažna, navedite kontraprimjer):

   a) Neka je $(a_n)_n$ konvergentni niz realnih brojeva takav da je
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$
   Tada u skupu $[0, 1\rangle$ postoji beskonačno mnogo članova niza.

   b) Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva takav da za svaki $a \in \mathbb{R}$ postoji $\epsilon > 0$ takav da interval $\langle a - \epsilon, a + \epsilon\rangle$ sadrži konačno mnogo članova niza $(a_n)_n$. Tada je niz $(a_n)_n$ neograničen.

   c) Neka je $(a_n)_n$ konvergentni niz realnih brojeva takav da je $a_n < 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neka je
   $$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$
   Tada je $a \leq 0$.

   d) Svaki niz u intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $\langle 0, 1\rangle$.

   e) Svaki niz u segmentu $[0, 1]$ ima podniz koji konvergira k nekom broju iz $[0, 1]$.

   f) Ako niz realnih brojeva a_n konvergira k 5, onda izvan intervala $\langle 3, 6\rangle$ postoji beskonačno mnogo elemenata niza.

   g) Neka je $(b_n)_n$ niz realnih brojeva takav da za svaki $b \in \mathbb{R}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da interval $\langle b - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m}\rangle$ sadrži konačno mnogo članova niza $(b_n)_n$. Tada je niz $(b_n)_n$ neograničen.

   h) Neka su $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$ nizovi realnih brojeva takvi da je $a_n \leq b_n \leq c_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i neka je x gomilište nizova $(a_n)_n$ i $(c_n)_n$. Tada je x nužno gomilište niza $(b_n)_n$.

2. a) Nađite primjer niza kojemu je skup gomilišta $\{-8, 0, 8\}$.

   b) Odredite limes inferior i limes superior niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ zadanog sa
   $$a_n = \frac{n^4\cos(\pi\sin(\frac{n\pi}{2})) + 10n^4\sin(\frac{n\pi}{2}) + n^2}{(n^2-1)(n^2+1)}.$$

3. a) Dokažite da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan formulom

$$a_n = \frac{n^3 \sin(\sin(n^{2023})) + 7n\cos(\cos(n^{2023}))}{(-n)^5 + (-n)^3}$$

   konvergentan.

   b) Ispitajte je li niz zadan rekurzivno s

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

   konvergentan te ako je, odredite mu limes.

4. a) Odredite, ako postoji, limes niza:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 7}, \quad n \in \mathbb{N},$$

   b) Odredite skup gomilišta niza:

$$b_n = \frac{n^4 + 4^n \cos(n\pi) + 3^n}{n^4 + 3 \cdot 4^n + 2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

5. Odredite sve parametre $b \in \mathbb{R}$ tako da niz

$$b_n = \frac{2^{3n+5} + n^5 + 17}{n^8 + 2^{3n+1}} + (b^2 - 9)\cos(\frac{n\pi}{2})$$

   bude konvergentan.

Bibliografija