

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Radulović, Borja Rukavina

Osnove matematičke analize

– skripta –

Zagreb, 27. ožujka 2024.

Sadržaj

1 Zasnivanje skupova $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^N$	1
1 Skupovi \mathbb{N}, \mathbb{Z} i \mathbb{Q}	2
2 Skup \mathbb{R}	3

Poglavlje 1

Zasnivanje skupova $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^N$

1. Skupovi \mathbb{N} , \mathbb{Z} i \mathbb{Q}

Zadatak 1.1. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

- a) $2^n > n$,
- b) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$.

Rješenje: Koristimo aksiom matematičke indukcije (P3):

- a) Baza ($n = 1$): $2^1 > 1$

Korak: prepostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$2^n > n. \quad (1.1)$$

Tada iz (1.1) slijedi da je $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n = n + n \geq n + 1$.

- b) Baza ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2. \quad (1.2)$$

Korak: prepostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2. \quad (1.3)$$

Tada je

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) + (2(n+1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \quad (1.4)$$

□

Zadatak 1.2. Dokažite da svaki neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima najmanji element, tj. $\exists s \in S$ takav da $s \leq k$, $\forall k \in S$.

Rješenje: Prepostavimo suprotno, tj. da tvrdnja ne vrijedi. Tada postoji neprazni podskup $S \subseteq \mathbb{N}$ koji nema najmanji element. Neka je

$$R := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq s \text{ za svaki } s \in S\}. \quad (1.5)$$

Kako S nema najmanji element, jasno je da vrijedi $R \cap S = \emptyset$. Jasno je da je $1 \in R$ (aksiom (P1)). Prepostavimo da je $k \in R$. Tada svaki prirodni broj manji ili jednak k mora također biti manji ili jednak s za svaki $s \in S$. Stoga je $1, 2, \dots, k \in R$. Iz činjenice da $R \cap S = \emptyset$, vidimo da vrijedi $1, 2, \dots, k \notin S$. Da je $k+1 \in S$, tada bi $k+1$ bio najmanji element skupa S . Ova činjenica implicira da $k+1 \in R$. Stoga, princip matematičke indukcije implicira da je $R = \mathbb{N}$. Tada je S prazan skup, što je kontradikcija s prepostavkom da je S neprazan. Stoga, svaki neprazan skup prirodnih brojeva mora imati najmanji element. □

Zadatak 1.3. Dokažite da jednadžba $q^2 = 2$ nema rješenja u skupu \mathbb{Q} .

Rješenje: Prepostavimo da postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $q^2 = 2$.

Bez smanjenja općenitosti možemo prepostaviti da je $q = \frac{m}{n}$, za $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ te da su m i n relativno prosti, tj. nemaju zajedničkog djeljitelja različitog od -1 i 1 ("razlomak je maksimalno skraćen"). Tada je

$$\frac{m^2}{n^2} = 2, \quad (1.6)$$

odakle slijedi

$$m^2 = 2n^2, \quad (1.7)$$

pa je m^2 djeljiv s 2 . Tada je i m djeljiv s 2 , jer u slučaju da nije, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k + 1$ pa bi slijedilo da

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1, \quad (1.8)$$

nije djeljiv s 2 , što je kontradikcija. Dakle, postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $m = 2k$. Tada iz

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2, \quad (1.9)$$

slijedi

$$n^2 = 2k^2, \quad (1.10)$$

odakle slično vidimo da je i n djeljiv s 2 , tj. postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 2l$. Time smo dobili kontradikciju s prepostavkom da su m i n relativno prosti.

□

Domaća zadaća

1. Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi

$$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

2. Dokažite da za svaka tri prirodna broja x, y i z vrijedi

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3. Dokažite da su definicije zbrajanja i množenja cijelih i racionalnih brojeva „dobre”, tj. da ne ovise o izboru predstavnika klase.
4. Dokažite asocijativnost zbrajanja u skupu \mathbb{Q} .

2. Skup \mathbb{R}

Skup realnih brojeva \mathbb{R} definiramo pomoću aksioma:

1. Aksiomi zbrajanja ($+$)

$$(A1) (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x + y) + z = x + (y + z) \text{ (asocijativnost)}$$

$$(A2) (\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) x + 0 = 0 + x = x \text{ (neutralni element)}$$

$$(A3) (\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R}) x + (-x) = (-x) + x = 0 \text{ (inverz)}$$

$$(A4) (\forall x, y \in \mathbb{R}) x + y = y + x \text{ (komutativnost)}$$

$(\mathbb{R}, +)$ je abelova grupa.

2. Aksiomi množenja (\cdot)

- (A5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (xy)z = x(yz)$ (asocijativnost)
- (A6) $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{R}) 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ (neutralni element)
- (A7) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R}) x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ (inverz)
- (A8) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) xy = yx$ (komutativnost)
- (A9) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x(y + z) = xy + xz$ (distributivnost \cdot prema $+$)

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je polje.

Zadatak 2.1. Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dokažite:

- a) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$,
- b) $-(-x) = x$,
- c) $x \neq 0, x \cdot y = x \Rightarrow y = 1$,
- d) $0 \cdot x = 0$,
- e) $(-x) \cdot y = -(xy)$.

Rješenje:

- a) $y = (A2) = 0 + y = (A3) = ((-x) + x) + y = (A1) = (-x) + (x + y) = (\text{pretpostavka}) = (-x) + (x + z) = (A1) = ((-x) + x) + z = (A3) = 0 + z = (A2) = z$,
- b) $(-x) + (-(-x)) = (A3) = 0 = (A3) = (-x) + x \Rightarrow (\text{koristimo } a)) -(-x) = x$,
- c) $1 = (A7) = x^{-1} \cdot x = (\text{pretpostavka}) = x^{-1} \cdot (xy) = (A5) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = (A7) = 1 \cdot y = (A6) = y$,
- d) $0 \cdot x = (A2) = (0 + 0) \cdot x = (A9) = 0 \cdot x + 0 \cdot x = 2 \cdot 0x$ ($1 \cdot 0x = 2 \cdot 0x$)
Pretpostavimo da vrijedi $0 \cdot x \neq 0$. Tada iz c) slijedi $1 = 2$ ($1 + 0 = 1 + 1$), odakle dobijemo (koristeći dio a)) $0 = 1$, što je kontradikcija s (A6). ($1 \neq 0$)
- e) $-(xy) + xy = (A3) = 0 = (d) = 0 \cdot y = (A3) = ((-x) + x) \cdot y = (A9) = (-x) \cdot y + xy$.
Iz dijela a) imamo $(-x) \cdot y = -(xy)$.

□

3. Aksiomi uređaja

- (A10) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) (x \leq y) \vee (y \leq x)$ (linearnost)
- (A11) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) ((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \Rightarrow (x = y)$ (antisimetričnost)
- (A12) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) ((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$ (tranzitivnost)
- (A13) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x \leq y) \Rightarrow x + z \leq y + z$ (usklađenost zbrajanja)
- (A14) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) ((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \Rightarrow x \cdot y \geq 0$ (usklađenost množenja)

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je totalno uređeno polje.

Zadatak 2.2. Dokažite da za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

- a) $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$, c) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$,
b) $0 < 1$, d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$.

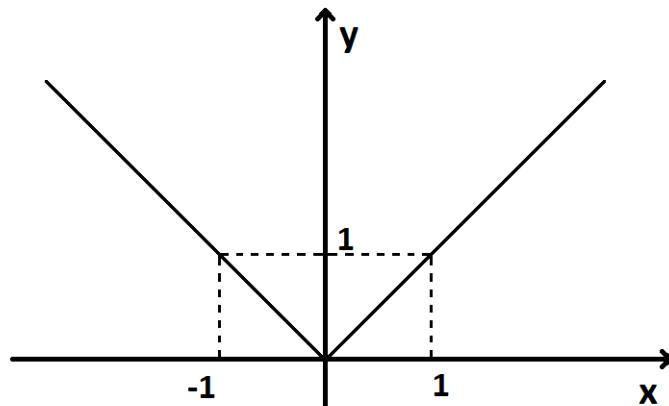
Rješenje:

- a) Iz $x \leq 0$ koristeći (A13) imamo $0 = (A3) = (-x) + x \leq (-x) + 0 = (A2) = -x$, iz čega slijedi $0 \leq -x$.
- b) Zbog (A6) imamo $0 \neq 1$ pa vrijedi $0 < 1$ ili $1 < 0$. Pretpostavimo da vrijedi $1 < 0$. Iz a) imamo $-1 > 0$ pa iz (A14) dobivamo $(-1) \cdot (-1) > 0$.
S druge strane, koristeći tvrdnje b) i e) iz Zadatka 2.1 imamo $(-1) \cdot (-1) = -(1 \cdot (-1)) = -(-(1 \cdot 1)) = 1$, pa vrijedi $1 > 0$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $1 < 0$.
- c) Koristeći tvrdnju e) iz Zadatka 2.1 dobivamo $(x - y)(x + y) = (A9) = (x - y)x + (x - y)y = (A9) = x^2 + (-y)x + xy + (-y)y = x^2 - xy + xy - y^2 = (A3) = x^2 + 0 - y^2 = (A2) = x^2 - y^2$.
- d) $0 \leq x \leq y \Rightarrow x, y \geq 0$ i $y - x \geq 0$ pa imamo $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) \geq (A14) \geq 0$ (gdje je $y - x \geq 0$ i $y + x \geq y + 0 \geq 0 + 0 = 0$), dobivamo $y^2 \geq x^2$.

□

Definicija 2.1. Apsolutna vrijednost je funkcija $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana sa

$$|x|: = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$



Napomena 2.2. Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:

- a) $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
c) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.3. Dokažite da za $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|. \quad (2.2)$$

Rješenje: Tvrđnu dokazujemo matematičkom indukcijom.

Baza: ($n=1$) $|x_1| \leq |x_1|$

Korak: Pretpostavimo da (2.2) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ (*). Neka su $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Tada iz Napomene 2.2 c) i pretpostavke (*):

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| + |x_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|. \quad (2.3)$$

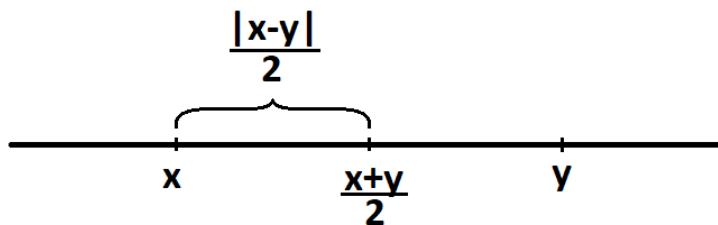
□

Zadatak 2.4. Dokažite da za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$a) \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}, \quad b) \max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}.$$

Rješenje:

a) Grafički:



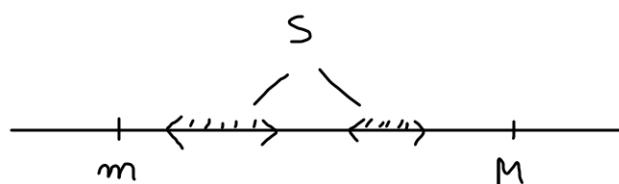
Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \leq y$. Tada je $x - y \leq 0$, iz čega slijedi $|x - y| = -(x - y)$, pa je

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(-(x-y))}{2} = x = \min\{x, y\}. \quad (2.4)$$

b) Slično (domaća zadaća).

□

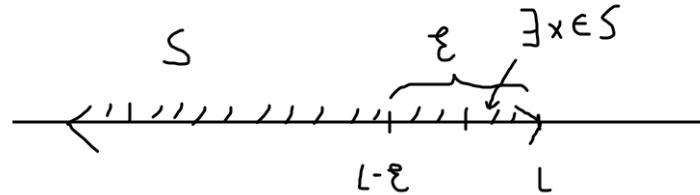
Definicija 2.3. Skup $S \subset \mathbb{R}$ je omeden odozgo (odozdo) ako postoji $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) takav da ($\forall x \in S$) $x \leq M$ ($m \leq x$). Kažemo da je M (m) gornja (donja) međa skupa S .



Najmanju gornju među zovemo supremum, a najveću donju među zovemo infimum skupa S . Pišemo: $\sup S$ i $\inf S$.

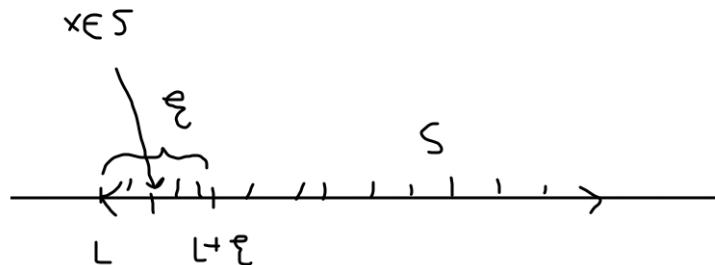
Ako je L gornja meda, tada je ona supremum ako i samo ako ne postoji manja gornja meda, odnosno $(\forall a \in \mathbb{R}, a < L) \exists x \in S$ t.d. $a < x$, odnosno

- i) $(\forall x \in S) x \leq L$,
- ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S) L - \varepsilon < x$.



Slično je donja meda L infimum skupa S ako i samo ako vrijedi $(\forall a \in \mathbb{R}, a > L) \exists x \in S$ t.d. $a > x$, odnosno

- i) $(\forall x \in S) x \geq L$,
- ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S) L + \varepsilon > x$.



$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ i $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ zadovoljavaju (A1)-(A14).

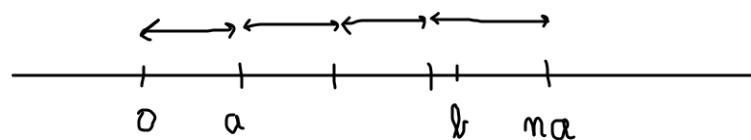
Uvodimo aksiom potpunosti:

(A15) Svaki neprazan i odozgo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum u \mathbb{R} (tj. $\sup S \in \mathbb{R}$).

Napomena 2.4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ne zadovoljava (A15).

Napomena 2.5. U skupu \mathbb{R} vrijedi Arhimedov aksiom:

(AA) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a > 0, b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) na > b$.



Definicija 2.6. Neka je $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $L := \sup S \in S$ ($L := \inf S \in S$), onda $\sup S$ ($\inf S$) zovemo maksimum (minimum) skupa S i pišemo $\max S := L$ ($\min S := L$).

Zadatak 2.5. Odredite infimum i supremum skupova:

$$a) A = \left\{ \frac{1}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}, \quad b) B = \left\{ \frac{x^2-4}{x^2+4} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Rješenje:

(a) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{0+1} = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

iz čega slijedi da je 1 gornja međa skupa A . Nadalje, za $x = 0$ imamo

$$\frac{1}{x^2+1} = 1, \quad (2.6)$$

iz čega slijedi da je 1 maksimum skupa A . Dakle, $\sup A = \max A = 1$.

Nadalje, primijetimo da vrijedi:

$$\frac{1}{x^2+1} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

iz čega slijedi da je 0 donja međa skupa A .

Dokažimo da je $\inf A = 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\frac{1}{x^2+1} < 0 + \varepsilon, \quad (2.8)$$

to jest

$$x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.9)$$

Po Arhimedovom aksiomu za $a = \varepsilon$ i $b = 1$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n\varepsilon > 1. \quad (2.10)$$

Tada je za $x \geq n$

$$\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon. \quad (2.11)$$

Dakle, $\inf A = 0$.

(b) Primijetimo da vrijedi:

$$\frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{x^2+4-4-4}{x^2+4} = 1 - \frac{8}{x^2+4}. \quad (2.12)$$

Nadalje, imamo:

$$1 - \frac{8}{x^2+4} < 1, \quad (2.13)$$

jer je $\frac{8}{x^2+4} > 0$, pa imamo da je 1 gornja međa skupa B . Tvrđimo da je $\sup B = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tražimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$1 - \frac{8}{x^2+4} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{8}{x^2+4} \Leftrightarrow (x^2+4)\varepsilon > 8. \quad (2.14)$$

Po Arhimedovom aksiomu sada za $a = \varepsilon$ i $b = 8$ imamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot \varepsilon > 8$, odakle je za $x \geq n$: $(x^2+4)\varepsilon \geq x^2\varepsilon \geq n^2\varepsilon \geq n\varepsilon > 8$.

Dakle, $\sup B = 1$.

S druge strane, primijetimo da vrijedi:

$$1 - \frac{8}{x^2 + 4} \geq 1 - \frac{8}{0+4} = 1 - 2 = -1, \quad (2.15)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $x^2 \geq 0$.

Sada za $x = 0$ imamo $1 - \frac{8}{x^2+4} = 1 - \frac{8}{4} = -1$, te imamo $\inf B = \min B = -1$.

□

Definicija 2.7. Niz realnih brojeva je funkcija $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Umjesto $a(n)$ pišemo a_n . Niz označavamo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Kažemo da je (a_n) rastući (padajući) ako $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$). U slučaju stroge nejednakosti ($<$ ili $>$) kažemo da je (a_n) strogo rastući (strogo padajući).

Zadatak 2.6. Odredite infimum i supremum skupova:

$$a) S = \left\{ \frac{3n-2}{n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \quad b) S = \left\{ \frac{n^2+1}{2n^2+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Rješenje:

(a) Imamo:

$$a_n = \frac{3n-2}{n+3} = \frac{3(n+3)-3 \cdot 3 - 2}{n+3} = 3 - \frac{11}{n+3}. \quad (2.16)$$

Dakle, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je rastući niz, iz čega slijedi:

$$\inf S = \min S = a_1 = 3 - \frac{11}{4} = \frac{1}{4}. \quad (2.17)$$

Tvrdimo da je $\sup S = 3$. Vrijedi:

$$a_n = 3 - \frac{11}{n+3} \leq 3, \quad (2.18)$$

iz čega slijedi da je 3 gornja međa skupa S .

Neka je $\varepsilon > 0$. Imamo:

$$\begin{aligned} a_n > 3 - \varepsilon &\Leftrightarrow 3 - \frac{11}{n+3} > 3 - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{11}{n+3} \Leftrightarrow (n+3)\varepsilon > 11. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Po Arhimedovom aksiomu, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0\varepsilon > 11$ ($a = \varepsilon$, $b = 11$), pa je $(n_0 + 3)\varepsilon > 11$, odakle slijedi $a_{n_0} > 3 - \varepsilon$. Dakle, $\sup S = 3$.

(b) Imamo niz:

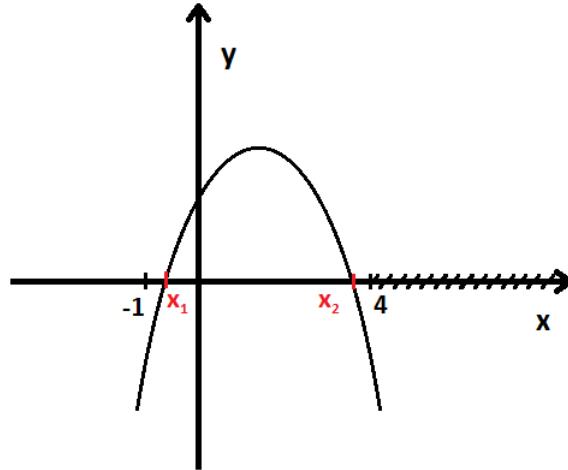
$$a_n = \frac{n^2+1}{2n^2+n}. \quad (2.20)$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{2n^2+n} < \frac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2+n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{n^2+1}{2n^2+n} < \frac{n^2+2n+2}{2n^2+5n+3} \\ &\Leftrightarrow (n^2+1)(2n^2+5n+3) < (n^2+2n+2)(2n^2+n) \\ &\Leftrightarrow 2n^4+5n^3+5n^2+5n+3 < 2n^4+5n^3+6n^2+2n \\ &\Leftrightarrow -n^2+3n+3 < 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Vrijedi:

$$-x^2 + 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{-2} = \frac{3 \mp \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x_1 = -0.79, x_2 = 3.79. \quad (2.22)$$



Dakle, (2.21) vrijedi za $n > x_2 \Leftrightarrow n \geq 4$. Tada je niz rastući. Imamo:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 < a_5 < a_6 < \dots \quad (2.23)$$

Slijedi da je $\inf S = \min S = a_4 = \frac{17}{36}$.

$\sup S = ?$. Imamo:

$$a_1 = \frac{1^2 + 1}{2 \cdot 1^2 + 1} = \frac{2}{3}. \quad (2.24)$$

Vrijedi:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + n} = \frac{1}{2} \frac{n^2 + 1}{n^2 + \frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \frac{n^2 + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} + 1}{n^2 + \frac{n}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\frac{n}{2} - 1}{n^2 + \frac{n}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{n-2}{4n^2 + 2n} \leq \frac{1}{2}, \quad n \geq 2. \quad (2.25)$$

Dakle, $\sup S = \max S = a_1 = \frac{2}{3}$. \square

Zadatak 2.7. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđeni skupovi. Dokazite:

- (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
- (b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Rješenje:

- (a) Zbog

$$x + y \leq \sup A + \sup B, \quad \forall x \in A, y \in B, \quad (2.26)$$

je $\sup A + \sup B$ gornja međa skupa $A + B$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada

$$(\exists x_0 \in A)(\exists y_0 \in B) \quad x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ i } y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.27)$$

Tada je $x_0 + y_0 \in A + B$ i $x_0 + y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \sup B - \varepsilon$.

- (b) Bez smanjenja općenitosti imamo $\sup A \leq \sup B$ (inače zamijenimo uloge A i B). Vrijedi:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ili } x \in B \Rightarrow x \leq \sup A \leq \sup B \text{ ili } x \leq \sup B. \quad (2.28)$$

Dakle, imamo:

$$(\forall x \in S = A \cup B) x \leq \sup B, \quad (2.29)$$

pa je $\sup B$ gornja međa skupa $A \cup B$. Dokažimo da je to i supremum. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada

$$(\exists x_0 \in B \subset A \cup B = S) x_0 > \sup B - \varepsilon. \quad (2.30)$$

Dakle, $\sup B$ je najmanja gornja međa skup $A \cup B$.

Slijedi da je $\sup B = \max\{\sup A, \sup B\}$ supremum skupa $A \cup B$.

□

Napomena 2.8. *Slično se pokaže (DZ): Ako su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni skupovi, onda vrijedi:*

- (a) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,
- (b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Zadatak 2.8. Odredite infimum i supremum skupova:

- (a) $S = \left\{ \frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$,
- (b) $S = \left\{ (-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+7} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Rješenje:

- (a) Vrijedi:

$$\frac{m-n-1}{mn+4m+3n+12} = \frac{m-n-1}{(m+3)(n+4)} = \frac{m+3-(n+4)}{(m+3)(n+4)} = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{m+3}. \quad (2.31)$$

Dakle, $S = A + B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ \frac{1}{n+4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}, \\ B &:= \left\{ -\frac{1}{m+3} \mid m \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \sup A &= \max A = \frac{1}{5} \quad (n=1), \quad \sup B = 0, \\ \inf A &= 0, \quad \inf B = \min B = -\frac{1}{4} \quad (m=1). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dakle, imamo:

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup A + \sup B = \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{5} \quad (\text{nije maksimum}), \\ \inf S &= \inf A + \inf B = 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \quad (\text{nije minimum}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

(b) Definiramo $S := A \cup B$, gdje je

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ (-1)^{2k} \frac{(2k)^2 + 2}{(2k)^2 + 7} \mid k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{4k^2 + 2}{4k^2 + 7} \mid k \in \mathbb{N} \right\}, \\ B &:= \left\{ (-1)^{2k-1} \frac{(2k-1)^2 + 2}{(2k-1)^2 + 7} \mid k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -\frac{(2k-1)^2 + 2}{(2k-1)^2 + 7} \mid k \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Skup A. Definiramo:

$$a_k = \frac{4k^2 + 2}{4k^2 + 7} = 1 - \frac{5}{4k^2 + 7} < 1. \quad (2.36)$$

Niz a_k je rastući pa vrijedi $\inf A = \min A = a_1 = \frac{6}{11}$.

Uočimo da je 1 je gornja međa skupa A . Dokažimo da je $\sup A = 1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} a_k > 1 - \varepsilon &\Leftrightarrow 1 - \frac{5}{4k^2 + 7} > 1 - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{4k^2 + 7} \Leftrightarrow (4k^2 + 7)\varepsilon > 5. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon$ i $b = 5$) postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0\varepsilon > 5$, pa vrijedi:

$$(4k_0^2 + 7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5. \quad (2.38)$$

Dakle, $\sup A = 1$.

Skup B. Definiramo:

$$b_k = -\frac{(2k-1)^2 + 2}{(2k-1)^2 + 7} = -1 + \frac{5}{(2k-1)^2 + 7}. \quad (2.39)$$

Niz b_k je padajući pa vrijedi $\sup B = \max B = b_1 = -\frac{3}{8}$.

Uočimo da je -1 donja međa skupa B . Dokažimo da je $\inf B = -1$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} b_k < -1 + \varepsilon &\Leftrightarrow -1 + \frac{5}{(2k-1)^2 + 7} < -1 + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{5}{(2k-1)^2 + 7} \Leftrightarrow ((2k-1)^2 + 7)\varepsilon > 5. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Po Arhimedovom aksiomu (za $a = \varepsilon$ i $b = 5$) postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0\varepsilon > 5$ pa vrijedi:

$$((2(k_0+1)-1)^2 + 7)\varepsilon > (4k_0^2)\varepsilon > k_0^2\varepsilon \geq k_0\varepsilon > 5. \quad (2.41)$$

Dakle, $\inf B = -1$.

Sada imamo

$$\begin{aligned} \sup S &= \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} = \max\left\{1, -\frac{3}{8}\right\} = 1, \\ \inf S &= \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} = \min\left\{\frac{6}{11}, -1\right\} = -1. \end{aligned} \quad (2.42)$$

□

Zadatak 2.9. Neka su $A, B \subset [0, \infty)$ odozgo omeđeni i neprazni. Definiramo:

$$A \cdot B = \{xy \mid x \in A, y \in B\}. \quad (2.43)$$

Dokažite

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Rješenje: Ako je $\sup A = 0$, onda je $A = \{0\}$ pa je $A \cdot B = \{0\}$ i tvrdnja slijedi.

Prepostavimo da je $\sup A > 0$. Vrijedi:

$$xy \leq \sup A \sup B, \quad \forall x \in A, \forall y \in B, \quad (2.44)$$

pa slijedi da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $A \cdot B$.

Dokažimo da je supremum.

Prvi način: Neka je $0 < \varepsilon < \sup A \sup B$. Tada za:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon}{2 \sup B} > 0 \quad (\exists x \in A) \quad x > \sup A - \varepsilon_1, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon}{2 \sup A} > 0 \quad (\exists y \in B) \quad y > \sup B - \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sada imamo:

$$xy > (\sup A - \varepsilon_1)(\sup B - \varepsilon_2) = \sup A \sup B - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4 \sup A \sup B} > \sup A \sup B - \varepsilon. \quad (2.46)$$

Drugi način: Stavimo oznaku $C = A \cdot B$. Već smo dokazali da je $\sup A \sup B$ gornja međa skupa $C = A \cdot B$. Kako je skup C odozgo ograničen, po aksiomu potpunosti, C ima supremum u \mathbb{R} , a kako je supremum najmanja gornja međa, vrijedi

$$\sup C \leq \sup A \sup B \quad (1)$$

Dokažimo sada da vrijedi i $\sup A \sup B \leq \sup C$. Vrijedi $ab \leq \sup C$ za sve $a \in A, b \in B$. Budući da smo prepostavili $\sup A > 0$, postoji $a' \in A \setminus \{0\}$. Vrijedi $b \leq \frac{\sup C}{a'}$ za sve $b \in B$ pa je $\frac{\sup C}{a'}$ gornja međa skupa B , iz čega slijedi

$$\sup B \leq \frac{\sup C}{a'}.$$

Ukoliko je $\sup B = 0$, onda je $B = \{0\}$ pa je $C = \{0\}$ i onda tvrdnja očito vrijedi jer je u ovom slučaju $\sup C = \sup A \sup B = 0$. Ako je $\sup B > 0$, onda možemo zaključiti da je

$$a' \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a' \in A \setminus \{0\}$, a zapravo vrijedi i

$$a \leq \frac{\sup C}{\sup B}$$

za sve $a \in A$. Stoga je $\frac{\sup C}{\sup B}$ gornja međa skupa A pa je

$$\sup A \leq \frac{\sup C}{\sup B},$$

odnosno

$$\sup A \sup B \leq \sup C. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi $\sup A \sup B = \sup C$. □

Napomena 2.9. Ako su $A, B \subset [0, \infty)$, vrijedi $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$ (domaća zadaća).

Napomena 2.10. Ako su $A, B \subset \mathbb{R}$ neprazni i omeđeni, tada je

$$\begin{aligned}\sup(A \cdot B) &= \max\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}, \\ \inf(A \cdot B) &= \min\{\sup A \sup B, \sup A \inf B, \inf A \sup B, \inf A \inf B\}.\end{aligned}\quad (2.47)$$

Zadatak 2.10. Odredite infimum i supremum skupova:

- (a) $S = \left\{ \frac{2n-1}{n} \frac{1+m}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$,
- (b) $S = \left\{ \frac{n^2 x}{n^2 x + 2x + n^2 + 2} \mid n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \right\}$.

Rješenje:

- (a) Neka je $S = A \cdot B$, gdje je

$$\begin{aligned}A &:= \left\{ \frac{2n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset [0, \infty), \\ B &:= \left\{ \frac{1+m}{m} \mid m \in \mathbb{N} \right\} \subset [0, \infty).\end{aligned}\quad (2.48)$$

Dobivamo da je $\sup A = 2$, $\inf A = \min A = 1$ (postiže se za $n = 1$) te $\sup B = \max B = 2$ (postiže se za $m = 1$) i $\inf B = 1$.

Dakle, imamo

$$\begin{aligned}\sup S &= \sup A \cdot \sup B = 2 \cdot 2 = 4, \\ \inf S &= \inf A \cdot \inf B = 1 \cdot 1 = 1.\end{aligned}\quad (2.49)$$

- (b) Vrijedi

$$S = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 2} \cdot \frac{x}{x+1} \mid n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \right\} = A \cdot B, \quad (2.50)$$

gdje je

$$A := \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 2} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq [0, \infty), \quad B := \left\{ \frac{x}{x+1} \mid x \geq 0 \right\} \subseteq [0, \infty). \quad (2.51)$$

Lako dobivamo da je $\sup A = 1$ i $\inf A = \min A = \frac{1}{3}$ ($n = 1$).

Vrijedi

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

pa je 0 donja međa skupa B , a ujedno i minimum skupa B jer se dostiže za $x = 0$. Stoga je $\inf B = 0$.

Nadalje,

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} < 1$$

za $x \geq 0$ pa je 1 gornja međa skupa B . Dokažimo da je $\sup B = 1$. Treba dokazati

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \geq 0)(1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{x+1}),$$

što je ekvivalentno s $\varepsilon(x+1) > 1$. Primjenom Arhimedovog aksioma na ε i 1, dobivamo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon n > 1$. Sada je

$$\varepsilon(n+1) > \varepsilon n > 1,$$

tj.

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Slijedi da je $\sup B = 1$ te $\inf B = \min B = 0$ ($x = 0$).

Sada vidimo da je $\sup S = \sup A \cdot \sup B = 1 \cdot 1 = 1$ te $\inf S = \inf A \cdot \inf B = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 = \min S$.

□

Domaća zadaća

1. Odredite supremume i infimume sljedećih skupa (ako postoje):

- a) $A = \left\{ (-1)^{n+1} \frac{2n^2-1}{n^2+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
- b) $B = \left\{ \frac{2m+2n-3}{2mn-2m-n+1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$.
- c) $C = \left\{ (-1)^{n+m} \frac{mn+m}{2mn+n-2m-1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$.
- d) $D = \left\{ (-1)^{n-m} \cdot \frac{2mn-m+6n-3}{mn+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- e) $E = \left\{ \frac{2nm^2+4nm-2n-3m^2-6m+3}{nm^2+2mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
- f) $F = \left\{ \frac{nx^2-4nx+2}{n} : n \in \mathbb{N}, x \in \langle 0, 3 \rangle \right\}$
- g) $G = \left\{ \frac{n^2+1}{3n^2+n} (2 + \cos(m\pi)) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

2. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odozdo omeđeni skupovi. Dokažite:

- (a) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,
- (b) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

3.* Neka su $A, B \subseteq [0, +\infty)$. Dokažite da je

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

4. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni ograničeni skupovi. Vrijedi li nužno:

- a) Ako je $A \subsetneq B$, onda je $\sup A < \sup B$?
- b) Ako je $A \subsetneq B$, onda je $\inf A > \inf B$?
- c) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?
- d) $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$?
- e) $\sup(A - B) = \sup(A) - \sup(B)$, gdje je $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$?
- f) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$?

Ako neke od tih tvrdnji vrijede općenito, dokažite ih, a ako ne vrijede općenito, naveinite kontraprimjer.

5. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dokažite:
 - a) $\langle a, b \rangle \sim [a, b] \sim \langle a, b \rangle \sim [a, b] \sim \mathbb{R}$.
 - b) $[a, +\infty) \sim (-\infty, a] \sim \mathbb{R}$.
6. Dokažite da je skup iracionalnih brojeva neprebrojiv skup.
- 7.* Dokažite da je skup iracionalnih brojeva gust u \mathbb{R} , tj. da za svaki $x \in \mathbb{R}$ i za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\langle x - \epsilon, x + \epsilon \rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$

Bibliografija