

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja će biti objavljena danas na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do petka, 25. studenog 2016. u 11 sati na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u petak, 25. studenog 2016. u 14.30 u prostoriji 105.

Zadatak 1.

- (a) (2 boda) Dokažite da za sve podskupove A i B skupa U vrijedi

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

- (b) (2 boda) Vrijedi li

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

za sve sudove A i B ? Odgovor obrazložite.

- (c) (1 bod) Negirajte sljedeći sud:

$$x \in A \cup B \text{ ako i samo ako je } x \in A \text{ ili } x \in B.$$

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 2.

- (a) (2 boda) Ispitajte parnost / neparnost razlike i produkta dviju neparnih funkcija.
- (b) (3 boda) Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana sa $f(x) = \operatorname{sh} x$ je bijekcija. Odredite joj inverznu funkciju.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaki realan broj vrijedi: ako postoje dva prirodna broja čiji je zbroj strogo veći od njega, tada postoje dva cijela broja čiji je produkt strogo veći od njega.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus A)$ i $(B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu cijelih brojeva \mathbb{Z} zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sa

$$a \rho b \iff (\exists c \in \mathbb{Z})(a - b = c^2).$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja?

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 6. Funkcija $f: \langle 2, +\infty \rangle \rightarrow \langle -4, +\infty \rangle$ zadana je pravilom pridruživanja

$$f(x) = e^{x^4 - 4x^2} - 3.$$

- (a) (3 boda) Ispitajte injektivnost i surjektivnost funkcije f .
- (b) (2 boda) Neka je $g: \langle 2, +\infty \rangle \rightarrow \langle -4, +\infty \rangle$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = e^{x^2 - 4} - 3$. Pronađite funkciju h takvu da je $f = g \circ h$. Je li funkcija h rastuća?

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = [\log_3(3x + 1)]^2 + 4\log_3(3x + 1) + 2$.

- (a) Odredite prirodnu domenu funkcije f .
- (b) Odredite skup $f([0, \frac{26}{3}])$.
- (c) Odredite skup $f^{-1}(\langle -\infty, -1 \rangle)$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja će biti objavljena danas na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do petka, 25. studenog 2016. u 11 sati na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u petak, 25. studenog 2016. u 14.30 u prostoriji 105.

Zadatak 1.

- (a) (2 boda) Dokažite da za sve podskupove A i B skupa U vrijedi

$$B \cup (A \cap B) = B.$$

- (b) (2 boda) Vrijedi li

$$B \vee (A \wedge B) \equiv B$$

za sve sudove A i B ? Odgovor obrazložite.

- (c) (1 bod) Negirajte sljedeći sud:

$$x \in A \cap B \text{ ako i samo ako je } x \in A \text{ i } x \in B.$$

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 2.

- (a) (2 boda) Ispitajte parnost / neparnost zbroja i kvocijenta dviju neparnih funkcija.
- (b) (3 boda) Funkcija $f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ zadana sa $f(x) = \operatorname{ch} x$ je bijekcija. Odredite joj inverznu funkciju.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaki realan broj vrijedi: ako postoje dva prirodna broja čiji je produkt strogo veći od njega, tada postoje dva cijela broja čiji je zbroj strogo veći od njega.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(C \setminus (B \cup A)) \cup (A \setminus B)$ i $(C \cup A) \setminus (A \cap B \cap C)$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu cijelih brojeva \mathbb{Z} zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sa

$$a \rho b \iff (\exists d \in \mathbb{N}, d > 1)(d|a \wedge d|b).$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja?

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 6. Funkcija $f: \langle 3, +\infty \rangle \rightarrow \langle -4, +\infty \rangle$ zadana je pravilom pridruživanja

$$f(x) = e^{x^4 - 6x^2} - 3.$$

- (a) (3 boda) Ispitajte injektivnost i surjektivnost funkcije f .
- (b) (2 boda) Neka je $g: \langle 6, +\infty \rangle \rightarrow \langle -4, +\infty \rangle$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = e^{x^2 - 9} - 3$. Pronađite funkciju h takvu da je $f = g \circ h$. Je li funkcija h rastuća?

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 23. studenog 2016.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = [\log_2(2x + 1)]^2 - 2 \log_2(2x + 1) + 2$.

- (a) Odredite prirodnu domenu funkcije f .
- (b) Odredite skup $f([0, \frac{7}{2}])$.
- (c) Odredite skup $f^{-1}(\langle -\infty, 10 \rangle)$.