

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja će biti objavljena danas na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do ponedjeljka, 27. studenog 2017. u 9 sati na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u ponedjeljak, 27. studenog 2017. u 10:30 u prostorijama A301 (1.-2. zadatak) i 104 (3.-7. zadatak).

Zadatak 1.

(a) (1 bod) Napišite tablicu istinitosti za operaciju konjunkcije.

(b) (2 boda) Dokažite da je

$$A \Rightarrow (A \vee B)$$

tautologija.

(c) (2 boda) Definirajte parcijalno uređen skup.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 2.

- (a) (2 boda) Riješite jednadžbu $\arcsin x = 2\pi$. Odgovor obrazložite.
- (b) (3 boda) Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaka dva podskupa skupa cijelih brojeva vrijedi: ako su oba skupa neprazna, onda su oni međusobno disjunktni skupovi.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(A \cup C) \cap (B \setminus A)$ i $(C \cup B) \setminus A$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu cijelih brojeva \mathbb{Z} zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sa

$$x \rho y \iff 4 \mid x^4 - y^4.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Obrazložite!

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 6. Funkcija $f: \langle 2, +\infty \rangle \rightarrow \langle -2, +\infty \rangle$ zadana je pravilom pridruživanja

$$f(x) = \ln(x^4 - 4x^2 + 5) - 1.$$

- (a) (3 boda) Ispitajte injektivnost i surjektivnost funkcije f .
- (b) (2 boda) Neka je $g: \mathbb{R} \rightarrow \langle -2, +\infty \rangle$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = \ln(x^2 + 1) - 1$. Pronađite primjer funkcije $h: \langle 2, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f = g \circ h$. Je li takva funkcija jedinstvena?

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 10$.

- (a) (2 boda) Odredite sliku funkcije f .
- (b) (3 boda) Odredite skup $f^{-1}(\langle 10, 17 \rangle)$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja će biti objavljena danas na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do ponedjeljka, 27. studenog 2017. u 9 sati na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u ponedjeljak, 27. studenog 2017. u 10:30 u prostorijama A301 (1.-2. zadatak) i 104 (3.-7. zadatak).

Zadatak 1.

(a) (1 bod) Napišite tablicu istinitosti za operaciju disjunkcije.

(b) (2 boda) Dokažite da je

$$(A \wedge B) \Rightarrow B$$

tautologija.

(c) (2 boda) Definirajte relaciju ekvivalencije.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 2.

- (a) (2 boda) Riješite jednadžbu $\arccos x = 2\pi$. Odgovor obrazložite.
- (b) (3 boda) Dokažite da za sve realne brojeve x i y vrijedi $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 3. (5 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji. Zapišite zatim riječima sve dobivene tvrdnje. Odredite istinitost svih tvrdnji i obrazložite što tvrdite. Zadana je sljedeća tvrdnja.

Za svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva vrijedi: ako ti skupovi nisu međusobno disjunktni, onda je barem jedan od tih skupova prazan skup.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 4. (5 bodova) Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove $(B \cup C) \setminus (A \cup B)$ i $(C \setminus A) \cup B$. Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vrijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 5. (5 bodova) Na skupu cijelih brojeva \mathbb{Z} zadana je relacija $\rho \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sa

$$x \rho y \iff 5 \mid x^5 - y^5.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična. Sve svoje tvrdnje dokažite. Je li ρ relacija ekvivalencije? Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Obrazložite!

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 6. Funkcija $f: \langle 2, +\infty \rangle \rightarrow \langle 1, +\infty \rangle$ zadana je pravilom pridruživanja

$$f(x) = \ln(x^4 - 6x^2 + 10) + 2.$$

- (a) (3 boda) Ispitajte injektivnost i surjektivnost funkcije f .
- (b) (2 boda) Neka je $g: \mathbb{R} \rightarrow \langle 1, +\infty \rangle$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = \ln(x^2 + 1) + 2$. Pronađite primjer funkcije $h: \langle 2, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f = g \circ h$. Je li takva funkcija jedinstvena?

UVOD U MATEMATIKU

Prvi kolokvij – 22. studenog 2017.

Zadatak 7. (5 bodova) Neka je $f(x) = 4^x - 2^{x+2} + 5$.

- (a) (2 boda) Odredite sliku funkcije f .
- (b) (3 boda) Odredite skup $f^{-1}(\langle 5, 10 \rangle)$.