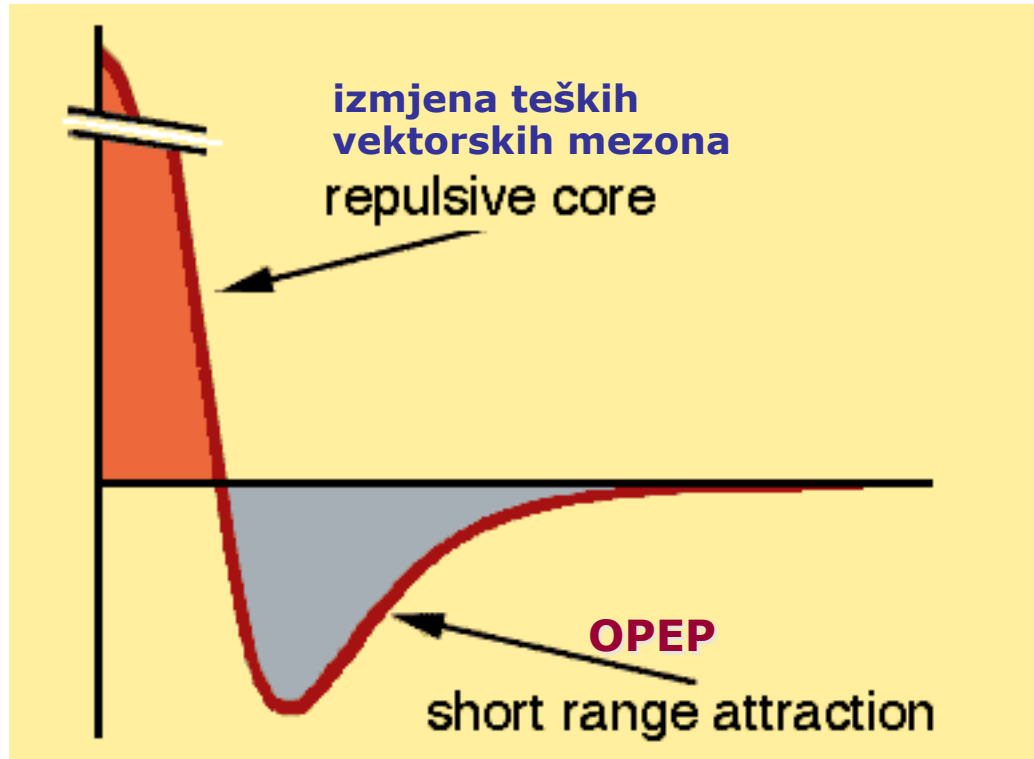


NUKLEARNI MODEL LJUSAKA

U jezgri nukleoni međudjeluju dvočestičnom interakcijom. U nerelativističkoj granici radijalni potencijal između slobodnih nukleona ima oblik:



U OPEP (one-pion exchange potential) području $r \approx 1-2$ fm, potencijal:

$$V(r) = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \left(1 + \frac{3}{\mu r} + \frac{3}{(\mu r)^2} \right)$$

U opisu atomske jezgre skup nukleona koji međudjeluju jakom NN interakcijom možemo opisati kao sustav gotovo nezavisnih čestica koje se gibaju u srednjem potencijalu stvorenom djelovanjem svih nukleona.

Zbog Paulijevog efekta i relacija neodređenosti, jezgra nije jako gusto složen sustav. Udaljenost na kojoj počinje jaki odbojni dio potencijala je $c \approx 0.4$ fm, a eksp. polumjer jezgre $R = r_0 A^{1/3}$ $r_0 = 1.2$ fm \Rightarrow omjer volumena najgušće posloženih nukleona i stvarnog volumena jezgre $\approx 1/100$.

Teorijski opis strukture atomske jezgre:

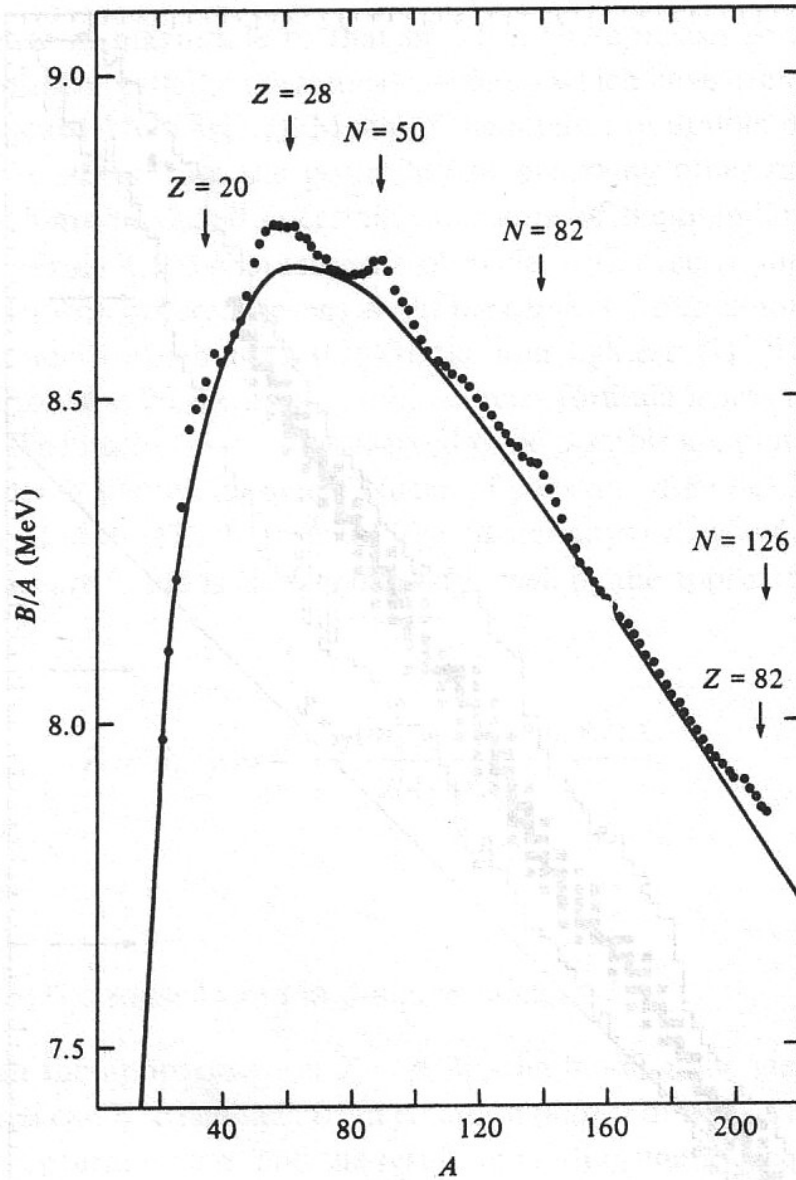
- 1) Problem A čestica koje međudjeluju jakom interakcijom?
- 2) Kako iz NN međudjelovanja između slobodnih nukleona dobiti srednji nuklearni potencijal?

Eksperimentalne evidencije za postojanje strukture ljuski u nuklearnom potencijalu:

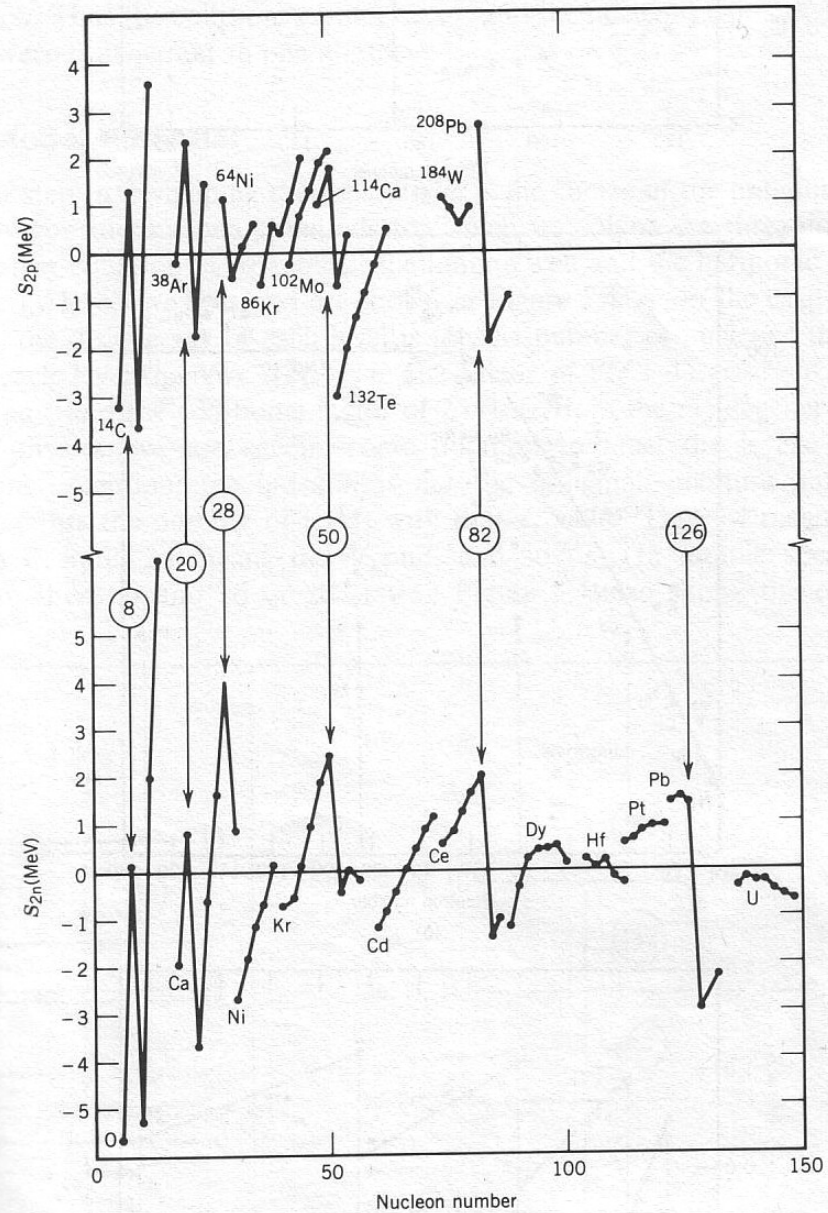
- 1) Energije vezanja kao funkcije broja protona ili neutrona
- 2) Energije prvih pobuđenih stanja u dvostruko parnim jezgrama.
- 3) Energije separacije protona i neutrona

\Rightarrow diskontinuiteti koji ukazuju na postojanje **magičnih brojeva**, a to znači i ljusaka.

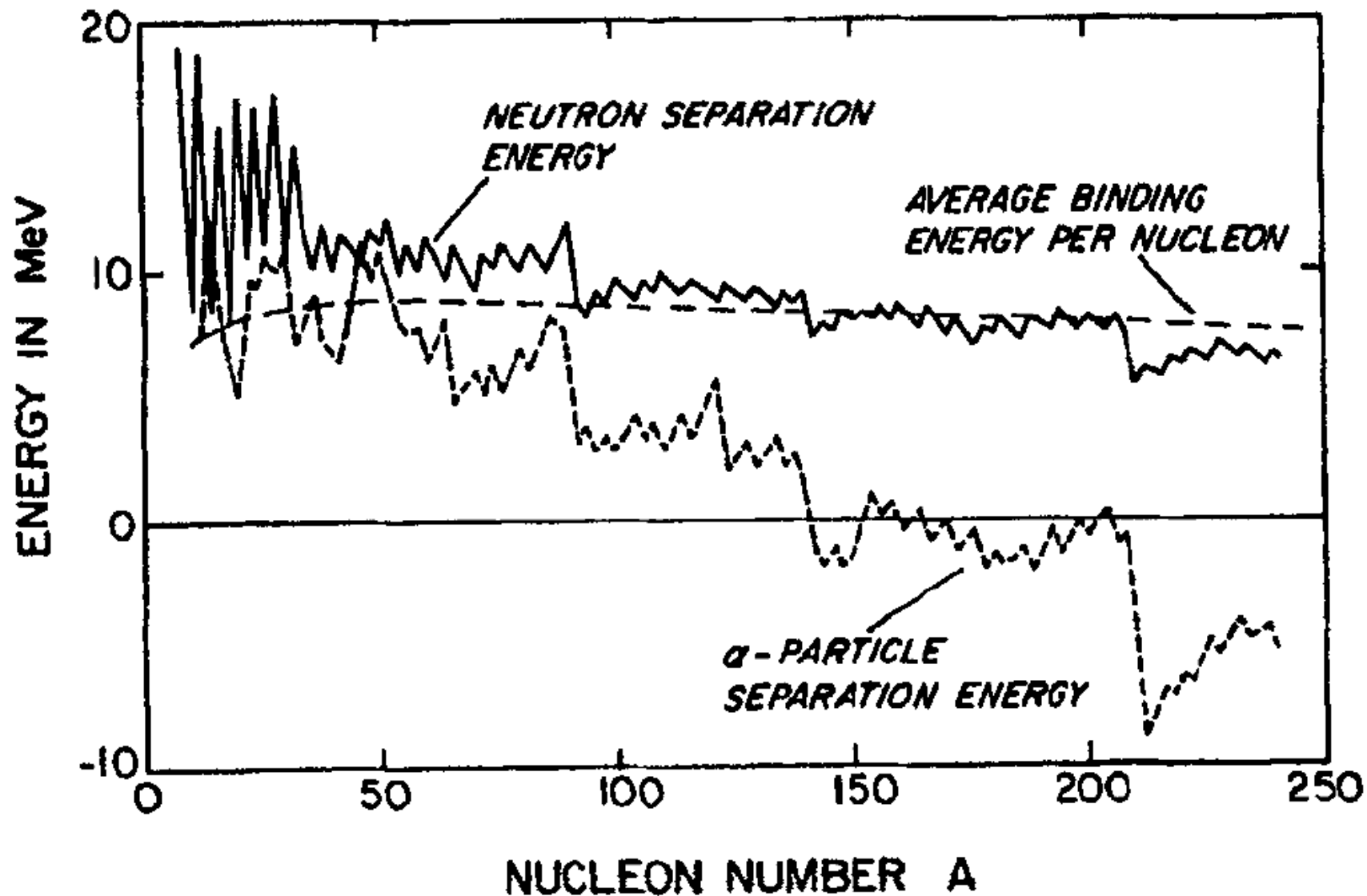
Energija vezanja po nukleonu kao funkcija broja nukleona



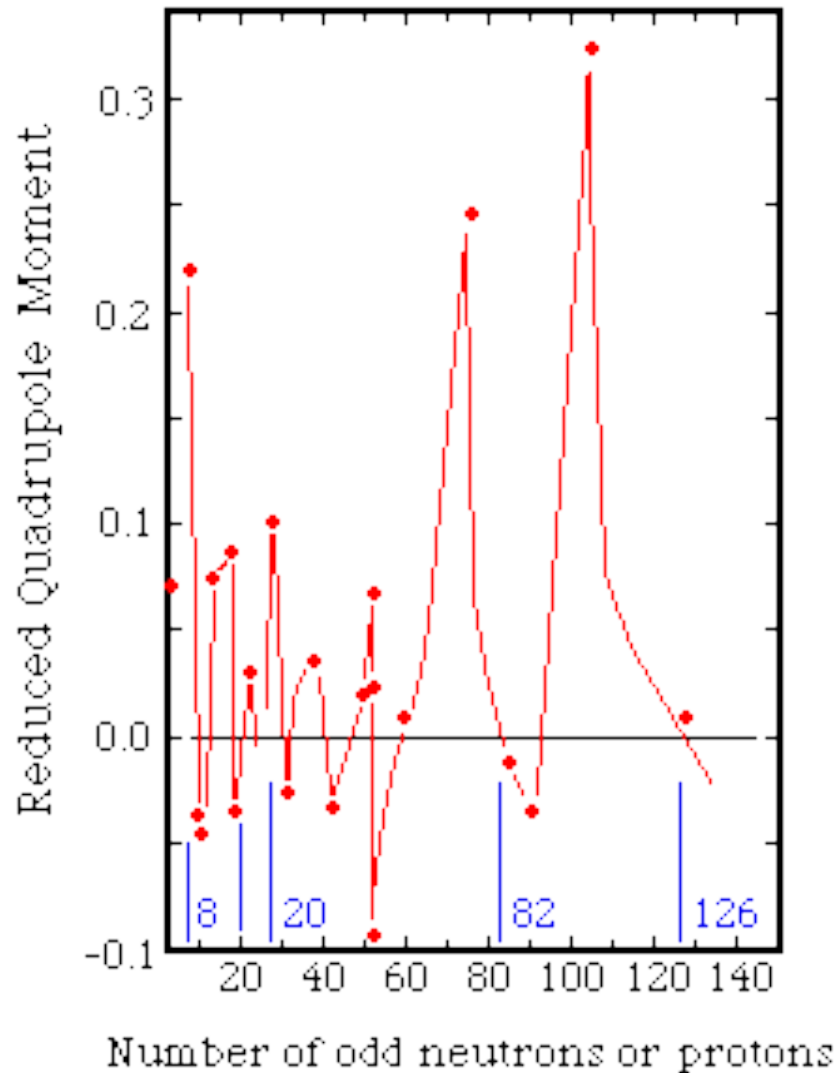
Energija separacije para protona ili neutrona kao funkcija broja nukleona



Energija separacije neutrona ili alfa jezgre u stabilnim jezgrama kao funkcija broja nukleona



Kvadrupolni momenti neparnih jezgara kao funkcija broja nukleona.

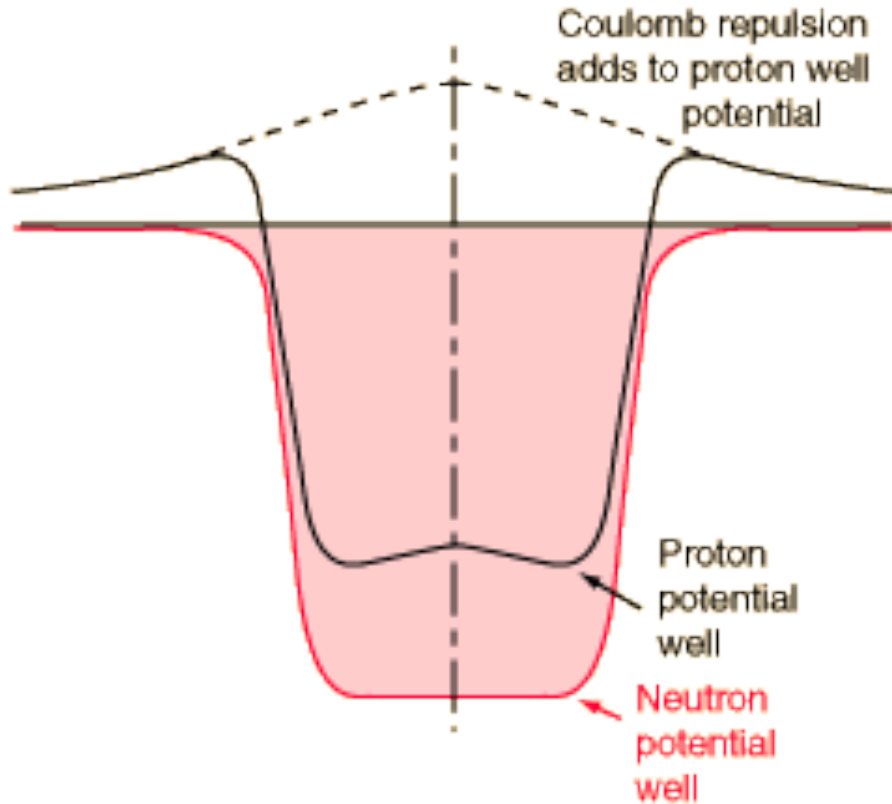


MAGIČNI BROJEVI U STABILNIM JEZGRAMA:

BROJ PROTONA(Z)	BROJ NEUTRONA(N)
2	2
8	8
20	20
28	28
50	50
82	82
114	126
	184

Magični brojevi, za koje su jezgre posebno jako vezane, energije separacije nukleona su veće nego u susjednim jezgrama, energije pobuđenih stanja su mnogo više nego kod susjeda, kvadrupolni momenti iščezavaju => **STRUKTURA LJUSKA.**

SREDNJI NUKLEARNI POTENCIJAL



1) U prvoj aproksimaciji promatramo samo centralni sferno-simetrični potencijal. Ovo je strogo ostvareno samo u jezgrama koje imaju najviše jedan nukleon više ili manje od dvostruko magičnih brojeva.

2) Centralni potencijal kojeg osjeća svaki nukleon u jezgri nastaje usrednjenjem NN međudjelovanja po svim parovima.

3) Na nukleon koji se nalazi u središtu jezgre, nuklearne sile djeluju uniformno sa svih strana, odnosno, ukupna sila na nukleon u središtu iščezava:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$$

4) Efektivna nuklearna sila jača od površine prema unutrašnjosti jezgre

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r < R_0} > 0$$

5) konačan doseg

$$V(r) \approx 0 \quad r > R_0$$

Analitički ansatz koji dobro opisuje efektivni nuklearni potencijal:

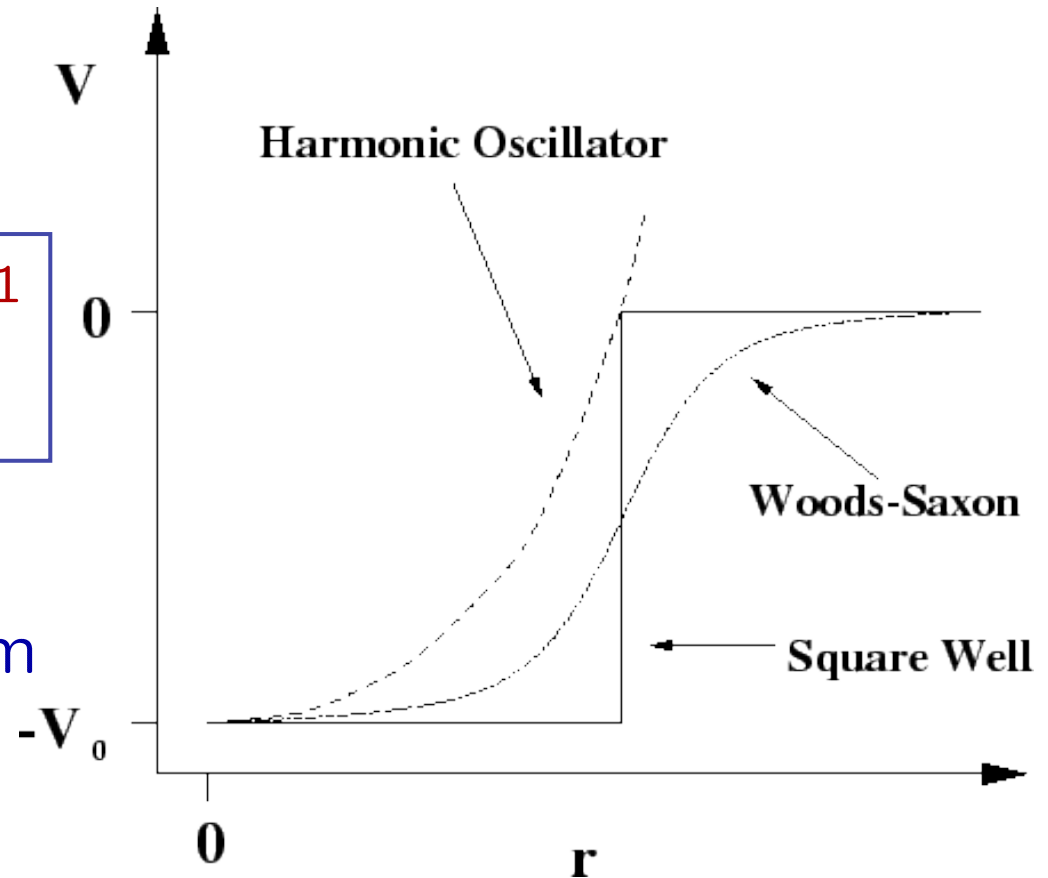
WOODS-SAXON POTENCIJAL

$$V(r) = -V_0 \left[1 + e^{\frac{r-R_0}{a}} \right]^{-1}$$

$$V_0 \approx 50 \text{ MeV}$$

$$R_0 = r_0 A^{1/3} \quad r_0 \approx 1.2 \text{ fm}$$

$$a \approx 0.5 \text{ fm}$$



Schrödingerova jednačba nema analitička rješenja za Woods-Saxon potencijal. Stoga se u kvalitativnim razmatranjima često upotrebljavaju aproksimacije:

Harmonički oscilator:
$$V(r) = -V_0 \left[1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right] = \frac{m}{2} \omega_0^2 (r^2 - R_0^2)$$

Pravokutna jama:
$$V(r) = -V_0 \quad (r \leq R_0) \quad V(r) = +\infty \quad (r > R_0)$$

Jednočestični potencijal: započnimo s aproksimacijom harmoničkog oscilatora

HAMILTONIJAN:
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

VALNA FUNKCIJA:
$$\psi(r) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

RADIJALNA JEDNADŽBA:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \right] u(r) = Eu(r)$$

RUBNI UVJETI:
$$r \rightarrow \infty \Rightarrow u(r) \rightarrow 0 \quad u(0) = 0$$

RJEŠENJE: RADIJALNA FUNKCIJA

$$u_{kl}(r) = N_{kl} r^{l+1} e^{-\nu r^2} L_k^{l+1/2}(2\nu r^2)$$

$$\nu = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

LAGUERRE POLINOM



Radijalne valne funkcije Harmoničkog oscilatora

$$R_{1s}(r) = 2 \left(\frac{\nu^3}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\nu r^2/2}$$

$$R_{1p}(r) = \sqrt{\frac{2^3}{3}} \left(\frac{\nu^5}{\pi} \right)^{1/4} r e^{-\nu r^2/2}$$

$$R_{1d}(r) = \sqrt{\frac{2^4}{15}} \left(\frac{\nu^7}{\pi} \right)^{1/4} r^2 e^{-\nu r^2/2}$$

$$R_{2s}(r) = \sqrt{\frac{2^3}{3}} \left(\frac{\nu^3}{\pi} \right)^{1/4} \left(\frac{3}{2} - \nu r^2 \right) e^{-\nu r^2/2}$$

$$R_{1f}(r) = \sqrt{\frac{2^5}{105}} \left(\frac{\nu^9}{\pi} \right)^{1/4} r^3 e^{-\nu r^2/2}$$

$$R_{2p}(r) = \sqrt{\frac{2^4}{15}} \left(\frac{\nu^5}{\pi} \right)^{1/4} \left(\frac{5}{2} - \nu r^2 \right) r e^{-\nu r^2/2}$$

$$R_{1g}(r) = \sqrt{\frac{2^6}{945}} \left(\frac{\nu^{11}}{\pi} \right)^{1/4} r^4 e^{-\nu r^2/2}$$

$$R_{2d}(r) = \sqrt{\frac{2^5}{105}} \left(\frac{\nu^7}{\pi} \right)^{1/4} \left(\frac{7}{2} - \nu r^2 \right) r^2 e^{-\nu r^2/2}$$

$$R_{3s}(r) = \sqrt{\frac{2^3}{15}} \left(\frac{\nu^3}{\pi} \right)^{1/4} \left(\frac{15}{4} - 5\nu r^2 + \nu^2 r^4 \right) e^{-\nu r^2/2}$$

SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI $E = \hbar\omega(2k + l + 3/2) = \hbar\omega(N + 3/2)$

$$N = 0, 1, 2, \dots$$

Glavni oscilatorski kvantni broj

$$l = N, N - 2, \dots, 1 \text{ ili } 0$$

Orbitalni kvantni broj

$$k = (N - l)/2$$

Radijalni kvantni broj

$$n = k + 1 = \frac{N - l + 2}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Broj čvorova radijalne valne funkcije u intervalu } [0, \infty).$$

a) Za dva stanja jednakih orbitalnih kv. brojeva l , a različitih radijalnih kvantnih brojeva, veću energiju ima stanje većeg n (veći broj čvorova u potencijalu konačnog dosega => kraća valna duljina).

b) Za dva stanja s jednakim n i različitim l kvantnim brojevima => veću energiju ima stanje s većim l (nukleon je u prosjeku više udaljen od središta potencijala, a to znači i slabije vezan).

DEGENERACIJA

Degeneracija stanja harmoničkog oscilatora s orbitalnim angularnim momentom l :

$$2l + 1$$

-degeneracija oscilatorske ljuske N:

$$D_N = 2 \sum_{l=0 \text{ ili } 1}^N (2l + 1) = (N + 1)(N + 2)$$

dvije projekcije spina

-ukupan broj stanja do nekog maksimalnog oscilatorskog kvantnog broja N_{max} :

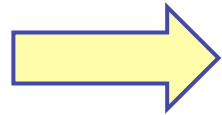
$$D_{max} = \sum_{N=0}^{N_{max}} D_N = \frac{1}{3}(N_{max} + 1)(N_{max} + 2)(N_{max} + 3)$$

$$N_{max} = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow D_{max} = 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, \dots$$

Frekvenciju harmoničkog oscilatora moguće je povezati s dimenzijom jezgre, odnosno s brojem nukleona A. Srednju vrijednost $\langle r^2 \rangle$ u stanju N $\hbar\omega$ dobivamo iz očekivane vrijednosti potencijalne energije harmoničkog oscilatora. Virijalni teorem => prosječna potencijalna energija jednaka je polovici ukupne energije.

$$\langle \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \rangle_N = \frac{1}{2}(N + \frac{3}{2})\hbar\omega$$





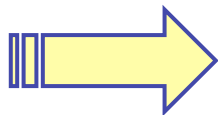
$$\langle r^2 \rangle_N = \frac{\hbar}{m\omega} \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

Srednja vrijednost kvadrata polumjera jezgre s A nukleona određena je prosjekom po svim zaposjednutim stanjima harmoničkog oscilatora za protone i neutrone:

$$\begin{aligned} \langle R^2 \rangle &= \frac{2}{A} \sum_{N=0}^{N_{max}} D_N \langle r^2 \rangle_N \\ \text{zbog jednostavnosti} & \\ \text{uzmimo } N=Z=1/2 A & \rightarrow \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= \frac{2}{A} \sum_{N=0}^{N_{max}} (N+1)(N+2) \left(N + \frac{3}{2} \right) \frac{\hbar}{m\omega} \end{aligned}$$

$$\sum_{N=0}^{N_{max}} (N+1)(N+2) \left(N + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{4} (N_{max}+1)(N_{max}+2)^2 (N_{max}+3)$$

U granici velikog broja N_{max} : $\langle R^2 \rangle = \frac{2}{A} \frac{\hbar}{m\omega} \frac{1}{4} (N_{max}+2)^4$



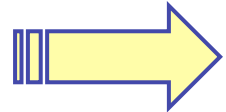
$$\hbar\omega = \frac{1}{A} \frac{\hbar^2}{m \langle R^2 \rangle} \frac{1}{2} (N_{max}+2)^4$$

Broj nukleona definira N_{max} :

$$A = 2D_{max} \approx \frac{2}{3}(N_{max} + 2)^3$$

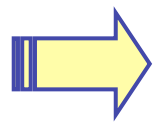
↑
protoni i neutroni

$$\langle R^2 \rangle = \frac{3}{5}R_0^2 = \frac{3}{5}(r_0A^{1/3})^2$$


$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{m\frac{3}{5}(r_0A^{1/3})^2} \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2}A\right)^{1/3} \approx 41A^{-1/3} \text{ MeV}$$

$$\text{Za } A = 100 \Rightarrow \hbar\omega \approx 8.8 \text{ MeV}$$

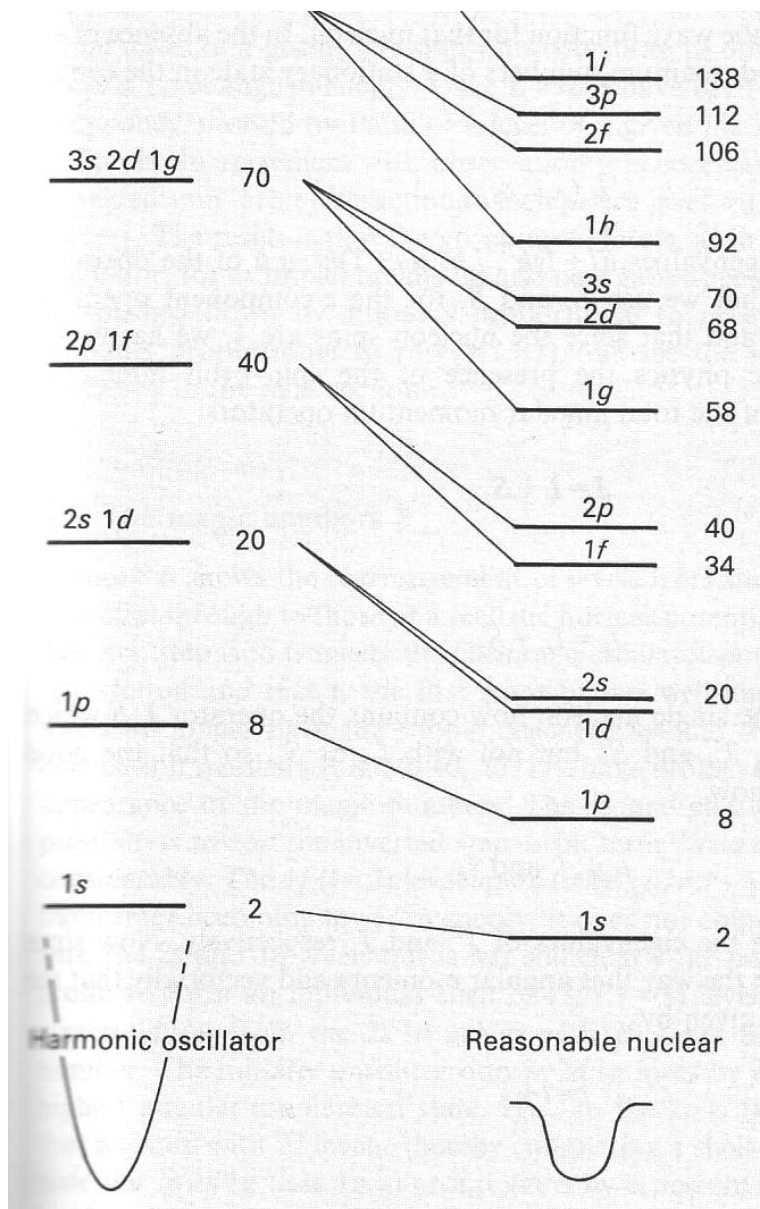
Energetski razmak između ljusaka harmoničkog oscilatora.



Energije vezanja jezgre koja ima pune ljuske protona i neutrona i jezgre koja ima jedan nukleon više ili manje od toga, trebale bi se razlikovati za $\approx \hbar\omega$.

Osim za najniža stanja, popunjene ljuske harmoničkog oscilatora (2, 8, 20, 40, 70, 112, 168,...) ne odgovaraju empirijskim magičnim brojevima (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126,...).

SPIN-ORBIT INTERAKCIJA



Spin-orbit član u jednočestičnom potencijalu:
Mayer 1949., Haxel, Jensen, Suess 1949.

$$h = h_0 + \zeta(r) \vec{l} \cdot \vec{s}$$

Spin-orbit član predstavlja inherentno kvantni relativistički efekt i automatski je uključen u efektivni potencijal, ako se dinamika nukleona opisuje Diracovom jednađbom. U slučaju kad se nukleoni opisuju kao nerelativističke čestice, spin-orbit član treba dodati u Schrödingerovu jednađbu.

Jednočestična valna funkcija:

$$\langle \vec{r}, \vec{\sigma} | nljm \rangle = \frac{u_{nl}(r)}{r} \left[Y_l(\theta, \phi) \otimes \chi_{1/2} \right]_{jm}$$

spin-orbit član je dijagonalan u ovoj bazi



The Nobel Prize in Physics 1963

Eugene Wigner, Maria Goeppert Mayer, J. Hans D. Jensen



Eugene Paul Wigner



Maria Goeppert
Mayer

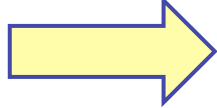


J. Hans D. Jensen

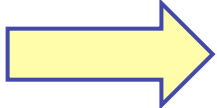
The Nobel Prize in Physics 1963 was divided, one half awarded to Eugene Paul Wigner *"for his contributions to the theory of the atomic nucleus and the elementary particles, particularly through the discovery and application of fundamental symmetry principles"*, the other half jointly to Maria Goeppert Mayer and J. Hans D. Jensen *"for their discoveries concerning nuclear shell structure"*.

$$\epsilon_{nlj} = \epsilon_{nlj}^{(0)} + \Delta\epsilon_{nlj}$$

$$\epsilon_{nlj}^{(0)} = \langle nljm | h_0 | nljm \rangle \quad \text{ne ovisi o spinu.}$$

Kako je $\zeta(r)\vec{l} \cdot \vec{s} = \zeta(r)\frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2)$ 

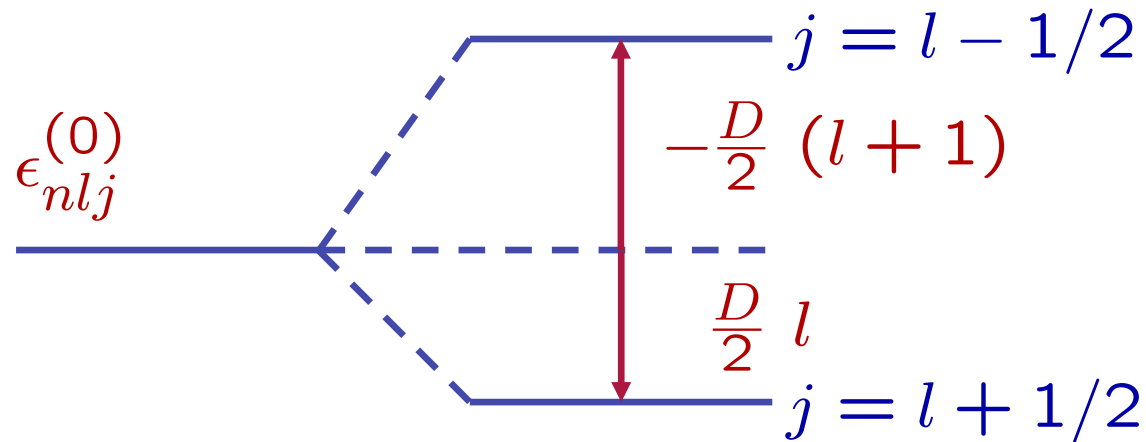
$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{nlj} &= \langle nljm | \zeta\vec{l} \cdot \vec{s} | nljm \rangle \\ &= \frac{D}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \end{aligned}$$

$$D = \int u_{nl}^2(r)\zeta(r)dr < 0$$
 

Izbor radijalnog oblika potencijala, na primjer Woods-Saxon, definirat će radijalnu valnu funkciju.

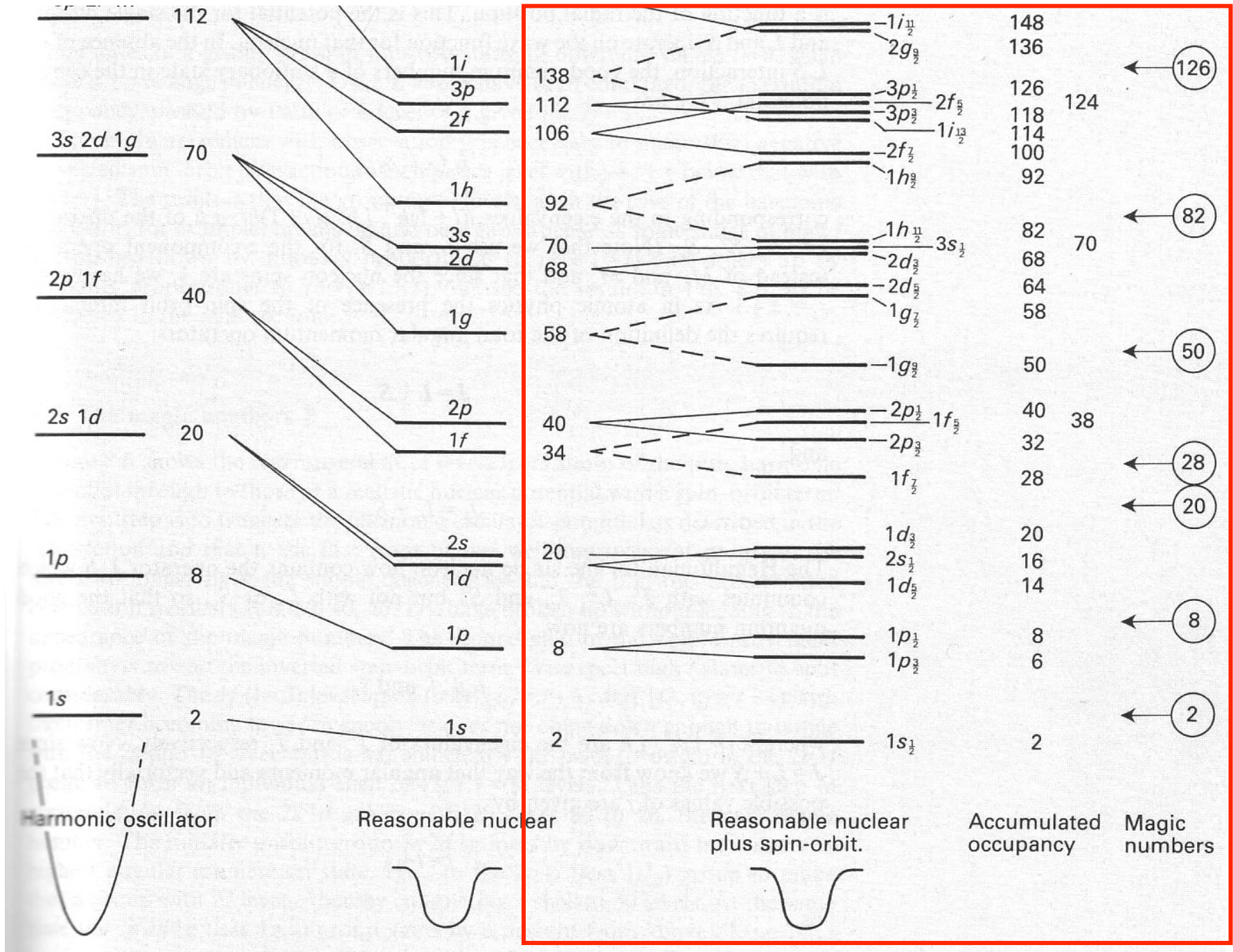
Spin-orbit rascjep:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{nlj=l+1/2} &= \frac{D}{2} l \\ \Delta\epsilon_{nlj=l-1/2} &= -\frac{D}{2} (l+1) \end{aligned}$$



$$\zeta(r) = V_{ls} r_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} \quad V_{ls} < 0$$

Rascjep je proporcionalan orbitalnom angularnom momentu, a to znači da raste s energijom jednočestičnih stanja u potencijalu $V(r)$. Degeneracija stanja s ukupnim angularnim momentom \mathbf{j} je $(2\mathbf{j}+1)$. Stanje $\mathbf{j} > \mathbf{l}$ najvećeg \mathbf{l} u ljusci s glavnim oscilatorskim brojem \mathbf{N} može se spustiti za $\approx \hbar\omega$ u područje stanja iz ljuske $(\mathbf{N}-1)$. Dolazi do promjene **magičnih brojeva** – broja nukleona koji zatvaraju ljuske.



OSNOVNO STANJE JEZGRE: N neutrona i Z protona. Ako je ukupna nuklearna interakcija sadržana u efektivnom jednočestičnom potencijalu, u osnovnom stanju jezgre jednočestična stanja redom su popunjena nukleonima od najnižeg do Fermi plohe. U stanju ukupnog angularnog momenta j nalazi se **($2j+1$)** nukleona.

Koncept nezavisnih nukleona može se izravno objasniti Paulijevim principom. Promatramo sudar dvaju nukleona u internim orbitalama. Osim ako je efekt sudara tako jak da podigne nukleon u neko od nepopunjenih stanja, interakcija ne može utjecati na gibanje nukleona. Residualna interakcija koja nije uključena u efektivni jednočestični potencijal, utječe samo na nukleone u blizini Fermi plohe. Takva je, na primjer, interakcija sparivanja.

