10. ZAMJENA VARIJABLI U VIŠESTRUKOM INTEGRALU

10.1. Neka je $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ preslikavanje definirano s $\varphi(u,v) = (4u, 2u+3v)$. Izračunajte:

(a) $\displaystyle\iint\limits_{\varphi([0,1]\times[1,2])} xy\ dxdy$,

(b) $\displaystyle\iint\limits_{\varphi([0,1]\times[1,2])} (x-y)dxdy$.

10.2. Izračunajte $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} \sin(x-y)\cos(x+2y)dxdy$ ako je $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon 0 \le x-y \le \pi, 0 \le x+2y \le \frac{\pi}{2}\}$.

10.3. Izračunajte $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} xy\ dxdy$ ako je Ω paralelogram omeđen pravcima $y = x, y = x+1, y = 2x, y = 2x-2$.

10.4. Izračunajte:

(a) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)dxdy, \Omega$ krug radijusa 2 sa središtem u ishodištu,

(b) $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} e^{x^2+y^2}dxdy, \Omega$ omeđen sa $x \ge 0, y \ge 0, x^2+y^2 \ge 1$ i $x^2+y^2 \le 4$,

(c) $\iint\limits_{\Omega} \cos(x^2+y^2)dxdy, \Omega$ krug radijusa 1 sa središtem u ishodištu,

(d) $\iint\limits_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy, \Omega$ omeđen sa $x^2+y^2 \geq 1$ i $x^2+y^2 \leq 4$.

10.5. Koristeći polarne koordinate izračunajte:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$,

(b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$.

10.6. Izračunajte površinu skupa
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \geq 4, (x-2)^2+y^2 \leq 4\}$.

10.7. Izračunajte površinu elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

10.8. Izračunajte $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, gdje je
$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3\}$.

10.9. Koristeći cilindričke koordinate izračunajte:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} z^3 dzdydx$,

(b) $\int\limits_{0}^{3} \int\limits_{0}^{\sqrt{9-y^2}} \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dzdxdy$,

(c) $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{0}^{2} \sin(x^2+y^2) dzdydx$,

10.10. Izračunajte volumen tijela:

(a) omeđenog cilindrom $x^2+y^2=1$, te ravninama $z=0$ i $x+z=1$,
(b) omeđenog cilindrom $x^2+y^2=1$, te ravninama $z=0$ i $z=y+1$,
(c) ispod paraboloida $z=x^2+y^2$, unutar cilindra $x^2+y^2=1$ i iznad xy-ravnine,
(d) omeđenog xy-ravninom i paraboloidom $z=1-(x^2+y^2)$,
(e) ispod paraboloida $z=x^2+y^2$, unutar cilindra $x^2+y^2=2x$ i iznad xy-ravnine,
(f) ispod konusa $z^2=x^2+y^2$, unutar cilindra $x^2+y^2=2x$ i iznad xy-ravnine.

10.11. Izračunajte:

(a) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$,

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4)\}$,

(b) $\iiint\limits_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz$, $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leq 1)\}$.

10.12. Koristeći sferne koordinate izračunajte:

(a) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dzdydx$,

(b) $\int\limits_0^2 \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)dzdxdy$,

(c) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dzdydx$.

10.13. Izračunajte volumen tijela

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2 \leq 2, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}.$$

10.14. Izračunajte volumen elipsoida $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$.

Rješenja:

10.1. (a) 140,
(b) -42.

10.2. $\frac{2}{3}$

10.3. 7

10.4. (a) 8π
(b) $\frac{\pi}{4}(e^4 - e)$,
(c) $\pi \sin 1$,
(d) $2\pi(-2\cos 2 + \cos 1 + \sin 2 - \sin 1)$.

10.5. (a) $\frac{\pi}{3}$,
(b) $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

10.6. $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$.

10.7. 6π

10.8. $\frac{40\pi}{3}$

10.9. (a) $\frac{\pi}{12}$,
(b) $\frac{9\pi^2}{8}$,
(c) $\frac{\pi}{2}(1 - \cos 1)$.

10.10. (a) π,
(b) π,
(c) $\frac{\pi}{2}$,
(d) $\frac{\pi}{2}$,
(e) $\frac{3\pi}{2}$,
(f) $\frac{32}{9}$.

10.11. 15π

10.12. (a) $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}(2-\sqrt{2})$,
(b) $\frac{8\pi}{5}(2-\sqrt{2})$,
(c) $\frac{\pi}{2}$.

10.13. $\frac{1}{3}(16-6\sqrt{2})\pi$.

10.14. $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$.