Zadatci iz Matematičke analize 2

PMF - Matematički odsjek

Ivan Ćorić, Paula Horvat

3. travnja 2023.

Uvod

Ova skripta nastala je kao rezultat vježbe gradiva kolegija Matematička analiza 2 po danim zadatcima na kraju svake cjeline službene skripte za vježbe. Nikako nije namijenjena samo za slijepo čitanje i prepisivanje rješenja, već za provjeru samostalno riješenih zadataka. Kako je rekao jedan matematičar: „Ne možete postati dobri u nogometu gledanjem kako Messi igra, već samim igranjem. Isto vrijedi i za matematiku - dobar matematičar postaje se ponavljanjem, samostalnim radom i vježbom." Ovom bismo skriptom željeli omogućiti studentima pouzdan način provjere rješenja te pomoć ako "zapnu" na nekom zadatku.

U svim zadatcima potrudili smo se dati što razumljivije rješenje. Kao što znamo, postoji mnogo načina rješavanja istog problema u matematici, a ova skripta prikazuje tek jedno od njih. Trudili smo se koristiti alate, postupke i notaciju koji su korišteni tijekom kolegija, a mogu se razlikovati od raznih izvora s interneta. Autori se nadaju da će vas napisana skripta motivirati za učenje jer će ovo znanje biti prijeko potrebno u ostatku vašeg matematičkog obrazovanja i karijere.

Za kraj, željeli bismo zahvaliti Ivanu Vojvodiću koji je naknadno rješavao i provjeravao zadatke koji su nam nedostajali pa je ova skripta puno ranije vidjela svjetlo dana. Zahvaljujemo i Josipi Debeljak čije su nas bilješke s vježbi iz MA2 oslobodile mnogo dodatnih sati rješavanja zadataka. Ne smijemo zaboraviti ni na Krunoslava Ivanovića koji je najbolja LaTeX korisnička podrška na ovim prostorima. Također, bili bismo zahvalni svakome tko nam prijavi bilo kakvu grešku, nejasnoću ili prijedlog za poboljšanje skripte.

Puno sreće žele vam autori!

U Zagrebu, travanj 2023.

Ivan Ćorić (`ivan.coric@student.math.hr`),
Paula Horvat (`paula.horvat@student.math.hr`).

LaTeXirao Ivan Ćorić, 2023.

Sadržaj

1 Derivacije

1.1 Tehnika deriviranja

Zadatak 1.6. Derivirajte sljedeće funkcije.

(a)

$$f(x) = \arcsin \frac{1}{x^2}$$

Rješenje.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{-2}{x^3 \sqrt{1 - \frac{1}{x^4}}}$$

(b)

$$f(x) = \sqrt{e^{10x}}$$

Rješenje.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{10x}}} \cdot e^{10x} \cdot 10 = \frac{5e^{10x}}{\sqrt{e^{10x}}} = 5\sqrt{e^{10x}}$$

(c)

$$f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{\arccos x}\right)^5$$

Rješenje.

$$f'(x) = 5\left(\frac{\arcsin x}{\arccos x}\right)^4 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x - \arcsin x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos^2 x} = \frac{5 \arcsin^4 x \left(\arcsin x + \arccos x\right)}{\arccos^6 x \left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

(d)

$$f(x) = \sin\left((\sin x)^{\sin x}\right)$$

Rješenje.

$$f'(x) = \cos\left((\sin x)^{\sin x}\right) \cdot \left((\sin x)^{\sin x}\right)'$$

$$\begin{aligned}
g(x) &= (\sin x)^{\sin x} \qquad / \ln \\
\ln g(x) &= \sin x \ln \sin x \qquad / \frac{d}{dx} \\
\frac{g'(x)}{g(x)} &= \cos x \ln \sin x + \cos x \\
&= \cos x \left(\ln \sin x + 1\right) \\
g'(x) &= (\sin x)^{\sin x} \left(\cos x \left(\ln \sin x + 1\right)\right)
\end{aligned}$$

Tada je derivacija funkcije f jednaka

$$f'(x) = \cos\left((\sin x)^{\sin x}\right)\left((\sin x)^{\sin x}\left(\cos x\left(\ln\sin x + 1\right)\right)\right)$$

(e)

$$f(x) = \underbrace{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{\ldots x\sqrt{x}}}}}_{n \quad \text{korijena}}$$

Rješenje. Zapišimo funkciju f koristeći geometrijski niz.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sqrt[2]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x} \cdot \cdots \cdot \sqrt[2^n]{x} = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} \\ &= x^{\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}} = x^{2-\frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

pa je po pravilu za derivaciju potencije

$$f'(x) = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) x^{1-\frac{1}{2^n}}$$

(f)

$$f(x) = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{(2x+1)\left(x^2-x+1\right) - \left(x^2+x+1\right)(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2} \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{\left(x^2-x+1\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\left(x^2-x+1\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{-2(x-1)(x+1)}{\left(x^2-x+1\right)^2} \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\frac{3+(2x+1)^2}{3}} + \frac{1}{\frac{3+(2x-1)^2}{3}}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} + \frac{1}{4\left(x^2+x+1\right)} + \frac{1}{4\left(x^2-x+1\right)} \\ &= \frac{1}{x^4+x^2+1} \end{aligned}$$

(g)

$$f(x) = \left(x^{x^x}\right)^{x^x}, \quad x > 0$$

Rješenje. Znamo $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$ te $\left(x^{x^x}\right)' = \left(x^{x^x}\right)\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right)$ pa imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^{x^x}\right)^{x^x} && /\ln \\ \ln f(x) &= x^x \ln x^{x^x} && /\frac{d}{dx} \\ \frac{f'(x)}{f(x)} &= x^x(\ln x + 1) + x^x\left(x^x(\ln x + 1) + x^{x-1}\right) \\ f'(x) &= \left(x^{x^x}\right)^{x^x}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x^{x^x} + x^x\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right)\right) \end{aligned}$$

(h)

$$f(x) = (\sin x - 1)^{\cos x + 1} + (\sin x + 1)^{1 - \cos x}$$

Rješenje. Definirajmo $g(x) = (\sin x + 1)^{\cos x + 1}$ te $h(x) = (\sin x + 1)^{1 - \cos x}$. Računamo posebno derivaciju funkcije g i h te će derivacija funkcije f biti zbroj derivacija dviju definiranih funkcija.

$$\begin{aligned} g(x) &= (\sin x - 1)^{\cos x + 1} && /\ln x \\ \ln g(x) &= (\cos x + 1)\ln(\sin x - 1) && /\frac{d}{dx} \\ \frac{g'(x)}{g(x)} &= -\sin x \ln(\sin x - 1) + \frac{\cos x(\cos x + 1)}{\sin x - 1} \\ g'(x) &= (\sin x - 1)^{\cos x + 1}\left(-\sin x \ln(\sin x - 1) + \frac{\cos x(\cos x + 1)}{\sin x - 1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (\sin x + 1)^{1 - \cos x} && /\ln x \\ \ln h(x) &= (1 - \cos x)\ln(\sin x + 1) && /\frac{d}{dx} \\ \frac{h'(x)}{h(x)} &= \sin x \ln(\sin x + 1) + \frac{\cos x(1 - \cos x)}{\sin x + 1} \\ h'(x) &= (\sin x + 1)^{1 - \cos x}\left(\sin x \ln(\sin x + 1) + \frac{\cos x(1 - \cos x)}{\sin x + 1}\right) \end{aligned}$$

Konačno je rješenje $f'(x) = g'(x) + h'(x)$ po linearnosti derivacije.

(i)

$$f(x) = \sqrt{\ln \cos \arcsin x}$$

Rješenje. Znamo da je $\cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}$. Tada je

$$f(x) = \sqrt{\ln \cos \arcsin x} = \sqrt{\ln \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln(1 - x^2)}$$

pa je f' jednaka

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln\left(1-x^2\right)}}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{2}\left(1-x^2\right)\sqrt{\ln\left(1-x^2\right)}}$$

Zadatak 1.7. Derivirajte sljedeće funkcije.

(a)

$$f(x)=e^{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
f'(x)&=e^{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\cdot\frac{-\cos x\,(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2}\\
&=-\frac{e^{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\cos x}{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\,(1+\sin x)^2}
\end{aligned}$$

(b)

$$f(x)=\ln\left(2+e^{-x}+\sqrt{e^x+e^{-x}+4}\right)$$

Rješenje.

$$f'(x)=\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2\sqrt{e^x+e^{-x}+4}}-e^{-x}}{2+e^{-x}+\sqrt{e^x+e^{-x}+4}}$$

(c)

$$f(x)=(\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
f(x)&=(\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x} && /\ln\\
\ln f(x)&=\operatorname{arctg} x\ln\arcsin x && /\frac{d}{dx}\\
\frac{f'(x)}{f(x)}&=\frac{\ln\arcsin x}{1+x^2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\\
f'(x)&=(\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{\ln\arcsin x}{1+x^2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right)
\end{aligned}$$

(d)

$$f(x) = x\sin^2 2x\cos^3\frac{x}{2}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sin^2 3x\cos^3\frac{x}{2} + x\left(\sin^2 3x\cos^3\frac{x}{2}\right)' \\ &= \sin^2 3x\cos^3\frac{x}{2} + x\left(-\frac{3}{2}\sin^2 3x\cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + 6\sin 3x\cos 3x\cos^3\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

(e)

$$f(x) = \ln\frac{x+\cos\sqrt{\pi x}}{x-\cos\sqrt{\pi x}} + \frac{1}{3}\arcsin\ln 2x$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}f'(x) = &\frac{x-\cos\sqrt{\pi x}}{x+\cos\sqrt{\pi x}}\frac{\left(1-\sin\sqrt{\pi x}\frac{\pi}{2\sqrt{\pi x}}\right)(x-\cos\sqrt{\pi x})-(x+\cos\sqrt{\pi x})\left(1+\sin\sqrt{\pi x}\frac{\pi}{2\sqrt{\pi x}}\right)}{(x-\cos\sqrt{\pi x})^2} \\ &+\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 2x}}\frac{1}{2x}\cdot 2 \\ =&\frac{1}{x+\cos\sqrt{\pi x}}\frac{\left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sin\sqrt{\pi x}}{\sqrt{x}}\right)(x-\cos\sqrt{\pi x})-(x+\cos\sqrt{\pi x})\left(1+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sin\sqrt{\pi x}}{\sqrt{x}}\right)}{x-\cos\sqrt{\pi x}} \\ &+\frac{1}{3x\sqrt{1-\ln^2 2x}} \\ =&-\frac{2\cos\sqrt{\pi x}+\sqrt{\pi x}\sin\sqrt{\pi x}}{x^2-\cos^2\sqrt{\pi x}}+\frac{1}{3x\sqrt{1-\ln^2 2x}}\end{aligned}$$

Zadatak 1.8. Za koji $a \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x) = \frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ zadovoljava jednakost

$$2x^2 f'(x) - x^2 f^2(x) = a?$$

Rješenje. Derivirajmo funkciju f te ubacimo tu derivaciju u zadanu jednakost.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(1+\ln x)'(x-x\ln x)-(1+\ln x)(x-x\ln x)'}{(x-x\ln x)^2} \\ &= \frac{1-\ln x-(1+\ln x)(-\ln x)}{x^2-2x^2\ln x+x^2\ln^2 x} \\ &= \frac{1-\ln x-\left(-\ln x-\ln^2 x\right)}{x^2-2x^2\ln x+x^2\ln^2 x} \\ &= \frac{\ln^2 x+1}{x^2-2x^2\ln x+x^2\ln^2 x}\end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
2x^2 f'(x) - x^2 f^2(x) &= a \\
2\left(\frac{\ln^2 x + 1}{1 - 2\ln x + \ln^2 x}\right) - x^2\left(\frac{1 + \ln x}{x - x\ln x}\right)^2 &= a \\
\frac{2\left(\ln^2 x + 1\right)}{1 - 2\ln x + \ln^2 x} - \frac{\ln^2 x + 2\ln x + 1}{1 - 2\ln x + \ln^2 x} &= a \\
\frac{2\ln^2 x + 2 - \ln^2 x - 2\ln x - 1}{1 - 2\ln x + \ln^2 x} &= a \\
1 &= a
\end{aligned}$$

Vidimo da funkcija f zadovoljava danu jednakost za $a = 1$.

Zadatak 1.9. Pokažite da funkcija $f(x) = \frac{1}{1+x+\ln x}$ zadovoljava jednakost

$$xf'(x) = f(x)\left(f(x)\ln x - 1\right).$$

Rješenje. Deriviranjem funkcije dobijemo

$$f'(x) = -\frac{1 + \frac{1}{x}}{(1 + x + \ln x)^2}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
xf'(x) - f(x)\left(f(x)\ln x - 1\right) &= 0 \\
-\frac{x+1}{(1 + x + \ln x)^2} - \frac{1}{1 + x + \ln x}\left(\frac{\ln x}{1 + x + \ln x} - 1\right) &= 0 \\
-\frac{x+1}{(1 + x + \ln x)^2} - \frac{1}{1 + x + \ln x}\left(\frac{-1 - x}{1 + x + \ln x}\right) &= 0 \\
-\frac{x+1}{(1 + x + \ln x)^2} + \frac{x+1}{(1 + x + \ln x)^2} &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Dakle, funkcija f zadovoljava danu jednakost.

1.2 Derivacija inverznih i implicitno zadanih funkcija

Zadatak 1.16. Ako je $x\ln y - y\ln x = 1$, izračunajte $y'(1)$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} x\ln y - y\ln x &= 1 \qquad /\frac{d}{dx} \\ \ln y + \frac{xy'}{y} - y'\ln x - \frac{y}{x} &= 0 \\ y'\left(\frac{x}{y} - \ln x\right) &= \frac{y}{x} - \ln y \\ y' &= \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x} \end{aligned}$$

Za $x = 1$ imamo $1\ln y - y\ln 1 = 1 \implies \ln y = 1 \implies y = e$. Dakle, vrijedi

$$y'(1) = \frac{\frac{y(1)}{1} - \ln y(1)}{\frac{1}{y(1)} - \ln 1} = \frac{e - \ln e}{\frac{1}{e}} = e^2 - e.$$

Zadatak 1.17. Ako je $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$, izračunajte y'.

Rješenje.

$$\begin{aligned} y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} &= 1 \qquad /\frac{d}{dx} \\ \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} &= 0 \\ y' &= -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \end{aligned}$$

Zadatak 1.18. Izračunajte $y'(0)$ ako je funkcija $y = y(x)$ implicitno zadana jednadžbom.

(a)

$$\ln y + \frac{x}{y} = 1$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\ln y + \frac{x}{y} &= 1 \qquad / \frac{d}{dx} \\
\frac{y'}{y} + \frac{x'y - y'x}{y^2} &= 0 \\
\frac{y'y + y - y'x}{y^2} &= 0 \\
y'(y - x) &= -y \\
y' &= -\frac{y}{y - x}
\end{aligned}$$

Za $x = 0$ imamo $\ln y + \frac{0}{y} = 1 \implies \ln y = 1 \implies y = e$. Dakle, imamo

$$y'(0) = -\frac{y(0)}{y(0) - 0} = -\frac{e}{e} = -1.$$

(b)

$$x^3y^5 + y^4 \sin x + y^3 \cos x + y^2 \operatorname{ch} x + y - 3e^x = 0$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
x^3y^5 + y^4 \sin x + y^3 \cos x + y^2 \operatorname{ch} x + y - 3e^x &= 0 \\
3x^2y^5 + 5x^3y^4y' + y^4 \cos x + 4 \sin x y^3 y' - \sin x y^3 + 3 \cos x y^2 y' + \operatorname{sh} x y^2 + 2 \operatorname{ch} x y y' + y' - 3e^x &= 0
\end{aligned}$$

Prebacujemo sve što sadrži y' na lijevu stranu.

$$\begin{aligned}
y'\left(5x^3y^4 + 4y^3 \sin x + 3y^2 \cos x + 2y \operatorname{ch} x + 1\right) &= -3x^2y^5 - y^4 \cos x + y^3 \sin x - y^2 \operatorname{sh} x + 3e^x \\
y' &= \frac{-3x^2y^5 - y^4 \cos x + y^3 \sin x - y^2 \operatorname{sh} x + 3e^x}{5x^3y^4 + 4y^3 \sin x + 3y^2 \cos x + 2y \operatorname{ch} x + 1}
\end{aligned}$$

Za $x = 0$ imamo $y^3 + y^2 + y - 3 = 0 \implies y = 1$. Dakle, uvrštavanjem $x = 1$ imamo

$$y'(0) = \frac{1}{3}.$$

Zadatak 1.19. Izračunajte derivaciju funkcije $y(x)$ implicitno zadane jednadžbom.

(a)

$$ye^y = e^{x+1} \quad \text{u točki} \quad x = 0, y = 1$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} ye^y - e^{x+1} &= 0 \quad / \frac{d}{dx} \\ y'e^y + ye^y y' - e^{x+1} &= 0 \\ y'\left(e^y + ye^y\right) &= e^{x+1} \\ y' &= \frac{e^{x+1}}{e^y\left(1+y\right)} \\ &= \frac{e^{x-y+1}}{1+y} \end{aligned}$$

Sada je

$$y'(0) = \frac{e^{0-y(0)+1}}{1+y(0)} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$y^2 = x + \ln\frac{y}{x} \quad \text{u točki} \quad x=1, y=1$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} y^2 &= x + \ln y - \ln x \quad / \frac{d}{dx} \\ 2yy' &= 1 + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} \\ 2xy^2y' &= xy + xy' - y \\ 2xy^2y' - xy' &= y\left(x-1\right) \\ y' &= \frac{y\left(x-1\right)}{x\left(2y^2-1\right)} \end{aligned}$$

Sada je

$$y'(1) = \frac{1-1}{1\left(2-1\right)} = 0.$$

Zadatak 1.20. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zadovoljava

$$e^{f(x)} + x^2 f(x) - e^{-x} = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Izračunajte f' i f'' [tj. izrazite ih pomoću f]. Specijalno, koliko je $f'(0)$ i $f''(0)$?

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} e^{f(x)} + x^2 f(x) - e^{-x} &= 0 \quad / \frac{d}{dx} \\ e^{f(x)} f'(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x) + e^{-x} &= 0 \\ f'(x)\left(e^{f(x)} + x^2\right) &= -e^{-x} - 2xf(x) \\ f'(x) &= \frac{-e^{-x} - 2xf(x)}{e^{f(x)} + x^2} \end{aligned}$$

Za $x = 0$ imamo $e^y = 1 \implies y = \ln 1 = 0$. Dakle, vrijedi

$$y'(0) = \frac{-1}{1} = -1.$$

Odredimo drugu derivaciju. Imamo

$$\begin{aligned} e^{f(x)} f'(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x) + e^{-x} &= 0 \quad / \frac{d}{dx} \\ e^{f(x)} f'(x) f'(x) + e^{f(x)} f''(x) + 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) - e^{-x} &= 0 \end{aligned}$$

Sve što sadrži f'' prebacujemo na lijevu stranu.

$$\begin{aligned} f''(x)\left(e^{f(x)} + x^2\right) &= -e^{f(x)}\left(f'(x)\right)^2 - 2f(x) - 4xf'(x) + e^{-x} \\ f''(x) &= \frac{-e^{f(x)}\left(f'(x)\right)^2 - 2f(x) - 4xf'(x) + e^{-x}}{e^{f(x)} + x^2} \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$y''(0) = \frac{-1+1}{1} = 0.$$

Zadatak 1.21. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(x) = x + x^3 + e^{x^3}.$$

Pokažite da je f injekcija i da je $10 + e^8 \in \mathcal{R}_f$ te odredite $\left(f^{-1}\right)'\left(10 + e^8\right)$.

Rješenje. Vidimo da je f strogo rastuća funkcija kao zbroj tri strogo rastuće funkcije pa je injektivna. Također, vidimo da je $f(2) = 2 + 8 + e^8 = 10 + e^8$, pa je $10 + e^8 \in \mathcal{R}_f$. Također vrijedi

$$\left(f^{-1}\right)'\left(10 + e^8\right) = \left(f^{-1}\right)'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\left.\left(1 + 3x^2\left(1 + e^{x^3}\right)\right)\right|_{x=2}} = \frac{1}{13 + 12e^8}.$$

1.3 Derivacije višeg reda

Zadatak 1.32. Dokažite da funkcija $y(x) = \frac{e^{5x}+2}{e^x}$ zadovoljava jednakost

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

Rješenje. Pronađimo izraze za prvu, drugu i treću derivaciju te ih uvrstimo u početnu jedankost.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(e^{5x}+2\right)' e^x - e^x\left(e^{5x}+2\right)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{4e^{5x}-2}{e^x} \\ y'' &= \frac{\left(4e^{5x}-2\right)' e^x - e^x\left(4e^{5x}-2\right)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{16e^{5x}+2}{e^x} \\ y''' &= \frac{\left(16e^{5x}+2\right)' e^x - e^x\left(16e^{5x}+2\right)}{\left(e^x\right)^2} = \frac{64e^{5x}-2}{e^x} \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} y''' - 13y' - 12y &= 0 \\ 64e^{5x} - 2 - 13\left(4e^{5x}-2\right) - 12\left(e^{5x}+2\right) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dakle, funkcija y zadovoljava početnu jednakost.

Zadatak 1.33. Odredite derivaciju.

(a)

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}, \qquad f^{(8)}(x) = ?$$

Rješenje. Zapišemo funkciju f kao $f(x) = x^2 \cdot \frac{1}{1-x}$. Sada je jasnije da možemo koristiti Leibnizovu formulu za $n-$tu derivaciju funkcije f te iz nje uvrštavanjem $n = 8$ dobiti osmu derivaciju. Znamo da x^2 "preživi" za $k = 0, 1, 2$ pa za $n \geqslant 2$ vrijedi

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \left(x^2\right)^{(k)} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n-k)}.$$

Znamo da s vježbi da je za funkciju $g(x) = \frac{1}{ax+n}$ $n-$ta derivacija dana s

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Sada je

$$f^{(n)}(x) = \frac{x^2 n!}{(1-x)^{n+1}} + \binom{n}{1} \frac{2x(n-1)!}{(1-x)^n} + \binom{n}{2} \frac{2(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}.$$

Uvrštavanjem $n = 8$ slijedi tvrdnja.

(b)

$$f(x) = x \ln x, \qquad f^{(5)}(x) = ?$$

Rješenje. Ponovno koristimo Leibnizovu formulu. x "preživi" za $k = 0, 1$ pa za $n \geqslant 1$ vrijedi

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0}(x)^{(0)}(\ln x)^{(n)} + \binom{n}{1}(x)^{(1)}(\ln x)^{(n-1)}.$$

Znamo da je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pa je

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Sada imamo

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!n}{x^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}$$

pa je

$$f^{(5)}(x) = \frac{(-1)^{5-2}(5-2)!}{x^{5-1}} = -\frac{6}{x^4}.$$

(c)

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}, \qquad f^{(5)}(x) = ?$$

Rješenje. Ručno tražimo derivacije. Vrijedi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \\
f''(x) &= \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \\
f'''(x) &= \frac{\ln^2 x - 6}{x^2 \ln^4 x} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{2\left(\ln^3 x + \ln^2 x - 6\ln x - 12\right)}{x^3 \ln^5 x} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{2\left(3\ln^4 x + 5\ln^3 x - 15\ln^2 x - 60\ln x - 60\right)}{x^4 \ln^6 x}
\end{aligned}$$

(d)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad f''(x) = ?$$

Rješenje. Ručno tražimo prvu i drugu derivaciju.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^4} - \frac{x}{2\sqrt{1-x^4}}\left(-4x^3\right)}{\left(\sqrt{1-x^4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^4} + \frac{2x^4}{\sqrt{1-x^4}}}{1-x^4} \\ &= \frac{1+x^4}{\sqrt{(1-x^4)^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4x^3\left(1-x^4\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+x^4\right)\frac{3}{2}\left(1-x^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(-4x^3\right)}{(1-x^4)^3} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^4}\left(4x^3\left(1-x^4\right) + 6x^3\left(1+x^4\right)\right)}{(1-x^4)^3} \\ &= \frac{2x^7+10x^3}{\sqrt{(1-x^4)^5}} \end{aligned}$$

(e)

$$f(x) = x\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right), \qquad f''(x) = ?$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin\ln x + \cos\ln x + \cos\ln x - \sin\ln x \\ &= 2\cos\ln x \end{aligned}$$

Dakle, druga je derivacija jednaka

$$f''(x) = -\frac{2\sin\ln x}{x}$$

Zadatak 1.34.

(a) Pokažite da funkcija $y = C_1\cos x + C_2\sin x$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y = 0.$$

Rješenje. Računamo ručno prvu i drugu derivaciju te uvrštavamo u danu diferencijalnu jednadžbu.

$$\begin{aligned} y' &= -C_1\sin x + C_2\cos x \\ y'' &= -C_1\cos x - C_2\sin x \end{aligned}$$

te uvrštavanjem imamo da diferencijalna jednadžba zaista vrijedi.

(b) Pokažite da funkcija $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - y = 0.$$

Rješenje. Računamo ručno prvu i drugu derivaciju te uvrštavamo u danu diferencijalnu jednadžbu.

$$\begin{aligned} y' &= C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x \\ y'' &= C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x \end{aligned}$$

te uvrštavanjem imamo da diferencijalna jednadžba zaista vrijedi.

Zadatak 1.35. Dokažite Leibnizovu formulu. [Uputa: matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.]

Rješenje. Dokažimo da baza indukcije vrijedi. Za $n = 1$ imamo

$$(uv)^{(1)} = u'v + uv' = \binom{1}{1} u^{(1)} v^{(1-1)} + \binom{1}{0} u^{(0)} v^{(1-0)}.$$

Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne u, v vrijedi Leibnizova formula. Sada za $n+1$ vrijedi

$$\begin{aligned} (uv)^{(n+1)} &= \left((uv)^{(n)}\right)' \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}\right)' && \text{[pretpostavka indukcije]} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(u^{(k)} v^{(n-k)}\right)' && \text{[lineranost derivacijes]} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n-k+1)}\right) && \text{[derivacija produkta]} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{(k)} v^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)} && \text{[pomicanje indeksa]} \\ &= u^{(n+1)} v + u v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) u^{(k)} v^{(n-k+1)} \\ &= u^{(n+1)} v + u v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)} && \text{[Pascalova formula]} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)} \end{aligned}$$

Zadatak 1.36. Neka je $f(x) = x^3 \operatorname{sh} x$. Odredite $f^{(n)}(x)$.

Rješenje. Koristimo se Leibnizovom formulom. x^3 "preživi" za $k = 0, 1, 2, 3$ pa za $n \geqslant 3$ imamo

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} \left(x^3\right)^{(k)} (\operatorname{sh} x)^{(n-k)}.$$

Dakle, vrijedi

$$f^{(n)}(x) = x^3 (\operatorname{sh} x)^{(n)} + 3x^2 n (\operatorname{sh} x)^{(n-1)} + 3n(n-1)x(\operatorname{sh} x)^{(n-2)} + n(n-1)(n-2)(\operatorname{sh} x)^{(n-3)}$$

Znamo po tabličnim derivacijama da je $n-$ta derivacija sinusa hiperbolnog jednaka $\operatorname{sh} x$ ako je n paran i $\operatorname{ch} x$ ako je n neparan. Dakle, imamo dva slučaja.

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x \operatorname{sh} x \left(x^2 + 3n(n-1)\right) + n \operatorname{ch} x \left(3x^2 + (n-1)(n-2)\right), & n \equiv 0 \pmod 2 \\ n \operatorname{sh} x \left(3x^2 + (n-1)(n-2)\right) + x \operatorname{ch} x \left(x^2 + 3n(n-1)\right), & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}.$$

Zadatak 1.37. Neka je $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$. Odredite $f^{(n)}(x)$.

Rješenje. Vidimo da se radi o primjeni Leibnizove formule. x "preživi" za $k = 0, 1$ pa za $n \geqslant 1$ imamo

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (x)^{(k)} \left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n-k)} \\ &= x \left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n)} + n \left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n-1)} \end{aligned}$$

Računamo dalje:

$$\begin{aligned} \left((1+x)^{-\frac{1}{3}}\right)^{(n)} &= \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}-(n-1)\right)(1+x)^{-\frac{1}{3}-n} \\ &= \frac{(-1)^n (3-2n)!!!}{3^n} (1+x)^{-\frac{1}{3}-n} \end{aligned}$$

Dakle, konačno rješenje jest

$$f^{(n)}(x) = x\frac{(-1)^n (3-2n)!!!}{3^n} (1+x)^{-\frac{1}{3}-n} + n\frac{(-1)^{n-1} (5-2n)!!!}{3^{n-1}} (1+x)^{-\frac{1}{3}-(n-1)}$$

Zadatak 1.38. Neka je $y(x) = \arcsin x$. Odredite $y^{(n)}(0)$. [Uputa: $\left(1-x^2\right) y'' = xy'$.]

Rješenje. Uzimanjem $n-2$ derivacije gornje diferencijalne jednakosti dobivamo sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
\left(1-x^2\right)y'' &= xy' \qquad /^{(n-2)}\\
\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(1-x^2\right)^{(k)}y^{(n-k)} &= \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^{(k)}y^{(n-k-1)}\\
\left(1-x^2\right)y^{(n)}+(n-2)\left(-2x\right)y^{(n-1)}-\frac{2\left(n-2\right)\left(n-3\right)}{2}y^{(n-2)} &= xy^{(n-1)}+(n-2)\,y^{(n-2)}
\end{aligned}$$

pri čemu zadnja tvrdnja vrijedi jer $1-x^2$ preživi za $k=0,1,2$ a x preživi za $k=0,1$. Uvrštavanjem $x=0$ dobivamo

$$y^{(n)}\left(0\right)=\left(n-2\right)^2y^{(n-2)}$$

što vrijedi za $n\geqslant 4$. Rastavimo na dva slučaja: kada je n paran i kada je n neparan.

- $n=2k-1$

$$\begin{aligned}
y^{(2k-1)}\left(0\right) &= \left(2k-3\right)^2y^{(2k-3)}\left(0\right)\\
&= \left(2k-3\right)^2\left(2k-5\right)^2y^{(2k-5)}\left(0\right)\\
&= \dots\\
&= \left(2k-3\right)^2\left(2k-5\right)^2\dots3^2y^{(3)}\left(0\right)\\
&= \left(2k-3\right)^2\left(2k-5\right)^2\dots3^21^2
\end{aligned}$$

- $n=2k$

$$\begin{aligned}
y^{(2k)}\left(0\right) &= \left(2k-2\right)^2y^{(2k-2)}\left(0\right)\\
&= \left(2k-2\right)^2\left(2k-4\right)^2y^{(2k-4)}\left(0\right)\\
&= \dots\\
&= \left(2k-2\right)^2\left(2k-4\right)^2\dots2^2y^{(2)}\left(0\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Zadatak 1.39. Neka je $y\left(x\right)=\cos\left(3\arcsin x\right)$. Odredite $y^{(n)}\left(0\right)$. [Uputa: $\left(1-x^2\right)y''-xy'+9y=0$]

Rješenje. Iz gornje diferencijalne jednakosti koristeći Leibnizovu formulu dobivamo

$$\begin{aligned}
\left(1-x^2\right)y''-xy'+9y &= 0 \qquad /^{(n-2)}\\
\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(1-x^2\right)^{(k)}y^{(n-k)}+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(-x\right)^{(k)}y^{(n-k-1)}+9y^{(n-2)} &= 0
\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da član x "preživi" za $k = 0, 1$ te $1 - x^2$ "preživi" za $k = 0, 1, 2$ i uvrštavajući $x = 0$ imamo

$$y^{(n)}(0) = (n+1)(n-5)\, y^{(n-2)}(0).$$

Rastavimo na dva slučaja: kada je n paran i kada je n neparan.

- $n = 2k - 1$

$$\begin{aligned} y^{(2k-1)}(0) &= 2k\,(2k-6)\, y^{(2k-3)}(0) \\ &= 2k\,(2k-6)\,(2k-2)\,(2k-8)\, y^{(2k-5)}(0) \\ &= \dots \\ &= 2k\,(2k-6)\,(2k-2)\,(2k-8)\dots y^{(3)}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $n = 2k$

$$\begin{aligned} y^{(2k)}(0) &= (2k+1)(2k-5)\, y^{(2k-2)}(0) \\ &= (2k+1)(2k-5)(2k-1)(2k-7)\, y^{(2k-4)}(0) \\ &= \dots \\ &= (2k+1)(2k-5)(2k-1)(2k-7)\dots y^{(8)}(0) \\ &= (2k+1)(2k-5)(2k-1)(2k-7)\dots 9\cdot 4 y^{(6)}(0) \\ &= (2k+1)(2k-5)(2k-1)(2k-7)\dots 9\cdot 4\cdot 7\cdot 1 y^{(4)}(0) \\ &= (2k+1)(2k-5)(2k-1)(2k-7)\dots 9\cdot 4\cdot 7\cdot 1\cdot 5\cdot(-1)\, y^{(2)}(0) \\ &= (2k+1)(2k-5)(2k-1)(2k-7)\dots 9\cdot 4\cdot 7\cdot 1\cdot 5\cdot(-1)\cdot(-9) \\ &= (2k+1)(2k-5)(2k-1)(2k-7)\dots 9\cdot 4\cdot 7\cdot 1\cdot 5\cdot 3\cdot 3 \\ &= 3\cdot(2k+1)!!\,(2k-5)!! \end{aligned}$$

Zadatak 1.40. Izračunajte $f^{(100)}(0)$ i $f^{(101)}(0)$ ako je funkcija f zadana formulom.

(a)

$$f(x) = (x \sin 2x)^3$$

Rješenje. Imamo $f(x) = x^3 \left(\sin^3 2x\right)$. Po Leibnizovoj formuli imamo

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^3\right)^{(k)} \left(\sin^3 2x\right)^{(n-k)}.$$

Želimo izračunati $\left(\sin^3 2x\right)^n$. Preko formula za dvostruke kuteve itd. imamo

$$\begin{aligned}\left(\sin^3 2x\right)^{(n)} &= \left(\frac{3\sin 2x - \sin 6x}{4}\right)^{(n)} \\ &= \frac{1}{4}\left(3\left(\sin 2x\right)^{(n)} - \left(\sin 6x\right)^{(n)}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(3\cdot 2^n \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) - 6^n \sin\left(6x + \frac{n\pi}{2}\right)\right) \\ &= 3\cdot 2^{n-2}\left(\sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) - 3^{n-1}\sin\left(6x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Kad uzmemo u obzir da x^3 iz Leibnizove formule "preživi" za $k = 0, 1, 2, 3$ te uvrštavanjem $x = 0$, imamo

$$\begin{aligned}f^{(n)}(0) &= n(n-1)(n-2)\cdot 3\cdot 2^{n-5}\left(\sin\frac{(n-3)\pi}{2} - 3^{n-4}\sin\frac{(n-3)\pi}{4}\right) \\ &= 3\cdot 2^{n-5}\cdot n(n-1)(n-2)\left(1 - 3^{n-4}\right)\sin\frac{(n-3)\pi}{2}\end{aligned}$$

iz čega uvrštavanjem $n = 100$ i $n = 101$ te uzimavši u obzir da je $\sin\frac{(100-3)\pi}{2} = 1$ te $\sin\frac{(101-3)\pi}{2} = 0$ imamo

$$\begin{aligned}&f^{(100)}(0) = 3\cdot 2^{95}\cdot 100\cdot 99\cdot 98\cdot\left(1 - 3^{96}\right) \\ &f^{(101)}(0) = 0.\end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = \operatorname{Arsh} x$$

Rješenje. Želimo pronaći neku diferencijalnu jednadžbu za ovu funkciju. Deriviranjem imamo

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad y'' = -\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

iz čega je očita diferencijalna jednadžba dana s

$$\left(1+x^2\right)y'' = -xy'.$$

Uzimanjem $n-2$ derivacije po Leibnizu za $n \geqslant 2$ imamo

$$\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left(1+x^2\right)^{(k)} y^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-x)^{(k)} y^{(n-k-1)}.$$

Deriviranjem funkcija te uvrštavanjem $x = 0$ krate se svi sumandi koji imaju x za faktor pa nam preostaje

$$y^{(n)}(0) = -(n-2)^2 y^{(n-2)}(0).$$

Odmah vidimo da će stota derivacija u točki 0 biti jednaka 0 jer, iteriranjem gornje jednakosti doći ćemo do $n = 2$, a direktnim uvrštavanjem imamo da je $y''(0) = 0$. Tada će i čitav produkt biti jednak 0. Za stoprvu derivaciju imamo

$$y^{(101)}(0) = -99^2 y^{(99)}(0) = 99^2 97^2 y^{(97)}(0) = \cdots = -99^2 97^2 \ldots 3^2 = (99!!)^2 .$$

(c)

$$f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2x-3}$$

Rješenje. Rastavimo funkciju na parcijalne razlomke. Imamo

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+1}$$

pri čemu sada imamo dvije poznate $n-$te derivacije. Vrijedi

$$f^{(n)}(x) = 2 \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Sada uvrštavanjem $n = 100, x = 0$ te $n = 101, x = 0$ dobivamo konačna rješenja:

$$f^{(100)}(0) = 2 \cdot \frac{(-1)^{100} 100!}{(-3)^{101}} + \frac{(-1)^{100} 100!}{1^{101}} = 100! \left(1 - \frac{2}{3^{101}}\right),$$

tj.

$$f^{(101)}(0) = 2 \cdot \frac{(-1)^{101} 101!}{(-3)^{102}} + \frac{(-1)^{101} 101!}{1^{102}} = -101! \left(1 + \frac{2}{3^{102}}\right).$$

(d) Autori nisu bili uspješni pri rješavanju ovog zadatka metodama kolegija MA2. Ako uspijete riješiti, molimo Vas da nam se javite s rješenjem na jedan od mailova navedenih u uvodu.

(e)

$$f(x) = \sqrt[3]{(1-2x)^2}$$

Rješenje. Zapišemo li ovu funkciju kao $f(x) = (1-2x)^{\frac{2}{3}}$ vidimo da smo se već susreli s ovakvim derivacijama. Vrijedi

$$f^{(n)}(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - 1\right) \ldots \left(\frac{2}{3} - n + 1\right)(-2)^n (1-2x)^{\frac{2}{3}-n}$$

tj. koristeći !!! notaciju imamo

$$f^{(n)}(x) = -\frac{2^{n+1}(3n-5)!!!\,(1-2x)^{\frac{2}{3}-n}}{3^n}$$

pa uvrštavanjem $n = 100, x = 0$ i $n = 101, x = 0$ dobivamo

$$\begin{aligned} f^{(100)}(0) &= -\frac{2^{101} \cdot 295!!!}{3^{100}} \\ &= -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{100} 295!!! \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} f^{(101)}(0) &= -\frac{2^{102} \cdot 298!!!}{3^{101}} \\ &= -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{101} 298!!! \end{aligned}$$

Zadatak 1.41. Neka je $f(x) = x^n$. Dokažite

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n.$$

Rješenje. Po binomnom teoremu vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n,$$

pa je

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

No, po definiciji funkcije f vidimo da je gornji izraz, zadan u zadatku, jednak

$$1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots + \frac{n!}{n!} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n},$$

čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 1.42. Funkcija $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$P(x) = e^{x^2} \cdot \left(e^{-x^2}\right)^{(2006)}.$$

Dokažite da je P polinom, odredite mu stupanj i vodeći koeficijent.

Rješenje. Želimo naći polinom $P_n(x)$ za koji bi vrijedilo

$$P_n(x) = e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

To je ekvivalentno s uvjetom

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} = P_n\left(x\right)e^{-x^2},$$

tj. deriviranjem dobijemo

$$\left(e^{-x^2}\right)^{(n+1)} = \left[P_n'\left(x\right) - 2xP_n\left(x\right)\right]e^{-x^2}.$$

Uočimo da je, jer je P_n polinom, tada je i $P_n' - 2xP_n$ polinom.

Za svaki $n \in N_0$ postoji polinom P_n oblika

$$P_n\left(x\right) = \left(-2\right)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

takav da vrijedi

$$P_n\left(x\right) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}.$$

Dokaz. Indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $\left(e^{x^2}\right)\left(e^{-x^2}\right)^{(0)} = 1$. Dakle, $P_0\left(x\right) = 1$. Uočimo da ovaj polinom doista ima dobar oblik, vodeći koeficijent je $\left(-2\right)^0 = 1$, a stupanj je $n = 0$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. da postoji polinom

$$P_n\left(x\right) = \left(-2\right)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

takav da vrijedi

$$P_n\left(x\right) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}.$$

Treba dokazati da je izraz

$$e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n+1)}$$

polinom oblika

$$\left(-2\right)^{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Iz pretpostavke indukcije slijedi

$$\begin{aligned}
P_n\left(x\right) &= e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \\
\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} &= P_n\left(x\right)e^{-x^2} \\
\left(e^{-x^2}\right)^{(n+1)} &= e^{-x^2}\left[P_n'\left(x\right) - 2xP_n\left(x\right)\right]
\end{aligned}$$

Postavimo $P_{n+1} = P_n'\left(x\right) - 2xP_n\left(x\right)$. Dakle, vrijedi

$$P_{n+1}\left(x\right) = e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n+1)}.$$

Uistinu, dobili smo polinom. Za taj polinom vrijedi

$$\deg\left(P_n'(x)\right) = n-1$$
$$\deg\left(2xP_n(x)\right) = n+1$$

pa je $\deg\left(P_{n+1}(x)\right) = \max\{n-1, n+1\} = n+1$. Vodećem koeficijentu doprinosi samo $-2xP_n(x)$, i to je onda

$$-2x\left((-2)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = (-2)^{n+1} x^{n+1} - 2a_{n-1}x^n + \cdots - 2a_1 x^2 - 2a_0 x$$

Dakle, tvrdnja vrijedi. Uvrštavanjem $n = 2006$ slijedi tvrdnja zadatka te je stupanj polinoma 2006, a vodeći koeficijent je $(-2)^{2006} = 2^{2006}$.

Zadatak 1.43. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaku n puta derivabilnu funkciju f vrijedi jednakost

$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

[Uputa: matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.]

Rješenje. Definiramo

$$g_n(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Tada preostaje dokazati

$$g_{n-1}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Indukcijom po n. Za $n = 1$ imamo

$$\begin{aligned} g_0'(x) &= \left(x^0 f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= \frac{(-1)^1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

pa baza indukcije vrijedi. Prepostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$g_{n-1}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Treba dokazati

$$g_n^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Iz definicije od g_n imamo $g_n(x) = xg_{n-1}(x)$. Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}
g_n^{(n+1)}(x) &= \left(xg_{n-1}(x)\right)^{(n+1)} \\
&= xg_{n-1}^{(n+1)}(x) + (n+1)\, g_{n-1}^{(n)}(x) \\
&= x\left(\left(g_{n-1}^{(n)}(x)\right)'\right) + (n+1)\, g_{n-1}^{(n)}(x) \\
&= x\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' + (n+1)\, \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= x(-1)^n\left[(-n-1)\, x^{-n-2} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) + x^{-n-1} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-x^{-2}\right)\right] + (n+1)\, \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi.

1.4 Tangenta i normala

Zadatak 1.54. Nađite sve pravce koji prolaze kroz ishodište i sijeku hiperbolu $xy = a^2$ pod pravim kutem.

Rješenje. Za takav pravac mora vrijediti da je $(0,0)$ na tom pravcu. Vrijedi

$$\begin{aligned} xy &= a^2 \qquad /\frac{d}{dx} \\ y + xy' &= 0 \\ y' &= \frac{-y}{x} \end{aligned}$$

Dakle, takvi pravci su svi pravci oblika $y - y_0 = \frac{x}{y}(x - x_0)$, tj. uvrštavanjem $(0,0)$ dobivamo $y^2 = x^2$. Također, kako je a^2 pozitivan broj, mora i xy biti pozitivan, a to će vrijediti $\iff$ $x > 0, y > 0$ ili $x < 0, y < 0$, dakle u prvom i trećem kvadrantu. Dakle, traženi je pravac zapravo oblika $y = x$.

Zadatak 1.55. Zadana je krivulja

$$y = \frac{x-4}{x-2}.$$

Pokažite da su tangente na tu krivulju u točkama presjeka s koordinatnim osima paralelne.

Rješenje. Točke presjeka s koordinatnim osima su one gdje je $x = 0$ ili $y = 0$. Presjek ove krivulje s y osi je točka $(0,2)$, a s x osi točka $(4,0)$. Derivacija ove funkcije je

$$y' = \frac{2}{(x-2)^2}$$

pa uvrštavanjem $x = 0$ i $x = 4$ dobivamo isti koeficijent smjera za obje tangente, jednak $\frac{1}{2}$, što znači da su tangente paralelne.

Zadatak 1.56. Odredite općenitu formulu za jednadžbu tangente na krivulju implicitno zadanu s

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Rješenje. Pronađimo tangentu u točki (A, B). Derivirajmo ovu implicitno zadanu krivulju da bismo odredili koeficijent smjera.

$$\begin{aligned} \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} &= 1 \qquad /\frac{d}{dx} \\ \frac{2(x-x_0)}{a^2} + \frac{2y'(y-y_0)}{b^2} &= 0 \\ y' &= \frac{b^2(x_0 - x)}{a^2(y-y_0)} \end{aligned}$$

Tada je jednadžba tangente u točki (A, B) dana formulom

$$t \ldots \qquad y - B = \frac{b^2 (x_0 - A)}{a^2 (B - y_0)} (x - A).$$

Zadatak 1.57. Odredite sve vrijednosti parametra $b \in \mathbb{R}$ za koje je pravac $y = x + b$ tangenta krivulje

$$y = \frac{x}{x+4}.$$

Rješenje. Odredimo tangentu na ovu krivulju u nekoj točki $(a, y(a))$. Imamo

$$y' = \frac{4}{(x+4)^2}$$

pa je tangenta u točki $(a, y(a))$ dana formulom

$$\begin{aligned} y - \frac{a}{a+4} &= \frac{4}{(a+4)^2}(x-a) \\ y &= \frac{4}{(a+4)^2}x - \frac{4a}{(a+4)^2} + \frac{a}{a+4} \end{aligned}$$

Iz činjenice da je koeficijent smjera pravca zadanog u zadatku 1 zaključujemo da mora vrijediti

$$\begin{aligned} \frac{4}{(a+4)^2} &= 1 \\ (a+4)^2 &= 4 \\ a^2 + 8a + 16 &= 4 \\ a^2 + 8a + 12 &= 0 \end{aligned}$$

iz čega dobivamo vrijednosti parametra $a = -6$ i $a = -2$. Također, moraju se poklapati i odsječci na osi y tangente iz zadatka i tangente koju smo dobili u proizvoljnoj točki pa mora vrijediti

$$b = \frac{-4a}{(a+4)^2} + \frac{a}{a+4}$$

iz čega dobivamo da parametar b može biti ili 1 ili 9.

Zadatak 1.58. Na krivulji $y = \frac{1}{1+x^2}$ nađite točku u kojoj je tangenta paralelna s osi apscisa.

Rješenje. "Jednadžba" x osi jest $y = 0$, što znači da je koeficijent smjera jednak 0. Dakle, ideja je za našu krivulju y naći tangentu u proizvoljnoj točki $(a, y(a))$ te provjeriti za koji $a \in \mathbb{R}$ se dobije da je koeficijent smjera te tangente jednak 0. Deriviramo krivulju i dobijemo

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Tangenta je sada oblika

$$y - \frac{1}{1+a^2} = -\frac{2a}{(1+a^2)^2}(x-a)$$

pa izjednačavanjem koeficijenta smjera s 0 dobivamo $a = 0$. Dakle, točka na krivulji y u kojoj je tangenta paralelna s osi apscisa jest $(0,1)$.

Zadatak 1.59. Pokažite da se krivulje familija

$$\begin{aligned} y^2 &= 4a^2 - 4ax, \qquad a > 0 \\ y^2 &= 4b^2 + 4bx, \qquad b > 0 \end{aligned}$$

sijeku pod pravim kutem.

Rješenje. Pronađimo točke presjeka ovih dviju krivulja.

$$\begin{aligned} 4a^2 - 4ax &= 4b^2 + 4bx \\ a^2 - ax &= b^2 + bx \\ bx + ax &= a^2 - b^2 \\ x &= \frac{a^2 - b^2}{a+b} \\ &= a - b \end{aligned}$$

Dakle, točka presjeka ima x koordinatu $a - b$, a y koordinatu dobit ćemo uvrštavanjem $x = b - a$ u jednu od dviju jednadžbi.

$$y^2(b-a) = 4a^2 - 4a(b-a) = 4ab$$

Dakle, točka presjeka jest $\left(a - b, 2\sqrt{ab}\right)$. Računanjem derivacija obje krivulje dobijemo $y' = \frac{-2a}{y}$ za prvu te $y' = \frac{2b}{y}$ za drugu. Uvrštavanjem $y = 2\sqrt{ab}$ dobivamo $y'(a-b) = \frac{-a}{\sqrt{ab}}$ te $y'(a-b) = \frac{b}{\sqrt{ab}}$ te množenjem ova dva koeficijenta smjera tangenti dobivamo

$$\frac{-a}{\sqrt{ab}}\frac{b}{\sqrt{ab}} = -\frac{ab}{ab} = -1,$$

pa zaključujemo da se krivulje sijeku pod pravim kutem.

Zadatak 1.60. Pokažite da parabola

$$y = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad a \neq 0, x_1 < x_2$$

presijeca os apscisa u dvije točke pod jednakim kutem.

Rješenje. Točke presijeka su $(x_1, 0)$ te $(x_2, 0)$. Vrijedi

$$\begin{aligned} y &= a(x-x_1)(x-x_2) \qquad / \frac{d}{dx} \\ y' &= a(x-x_2) + a(x-x_1) \end{aligned}$$

Vrijedi $y'(x_1) = a(x_1 - x_2)$ te $y'(x_2) = a(x_2 - x_1)$ pa imamo

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}|a(x_1 - x_2)| = \operatorname{arctg}|a(x_2 - x_1)| = \varphi_2$$

pa su kutevi jednaki.

Zadatak 1.61. Pod kojim se kutem sijeku krivulje?

(a)
$$y = x^2 \qquad \text{i} \qquad x = y^2$$

Rješenje. Točke presjeka ove dvije krivulje dobijemo iz $y^2 = x^4, x = y^2$ pa imamo $x = x^4$. Dakle, točke presjeka su $(0,0)$ i $(1,1)$. Deriviranjem ovih jednakosti dobivamo

$$y_1' = 2x$$

i

$$y_2' = \frac{1}{2},$$

pa imamo dva slučaja za dvije točke presjeka.

- $y_1'(0) = 0, y_2'(0) = \frac{1}{2}$
$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left|\frac{0 - \frac{1}{2}}{1 + 0 \cdot \frac{1}{2}}\right| = \operatorname{arctg}\left|\frac{1}{2}\right|$$
- $y_1'(1) = 2, y_2'(1) = \frac{1}{2}$
$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left|\frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}}\right| = \operatorname{arctg}\left|\frac{3}{4}\right|$$

(b)
$$y = \sin x \qquad \text{i} \qquad y = \cos x$$

Rješenje. Točke presjeka su one gdje je $\sin x = \cos x$, tj. svi $x-$evi takvi da je

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}.$$

Znamo da je derivacija sinusa kosinus, a derivacija kosinusa $-$ sinus, a vrijednost derivacija tih dviju funkcija u već navedenim $x-$evima presjeka jest

$$y_1'(x) = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

te

$$y_2'(x) = -\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dakle, tada je kut jednak

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right| = \operatorname{arctg}\left|2\sqrt{2}\right|.$$

Zadatak 1.62. Uz koje uvjete na koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ je os apscisa tangenta na krivulju

$$y = ax^2 + bx + c?$$

Rješenje. Os apscisa ima "jednadžbu" $y = 0$. Taj će pravac biti tangenta na traženu parabolu ako i samo ako ta parabola ima jednu nultočku, te će os apscisa biti tangenta na to točku. Znamo da parabola ima jednu nultočku ako i samo ako joj je diskriminanta jednaka nuli. Dakle, mora vrijediti $b^2 - 4ac = 0$, tj. $b^2 = 4ac$.

Zadatak 1.63. Nađite pravac koji je tangenta na krivulju

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 6$$

u barem dvije točke.

Rješenje. Uzmimo dvije točke na ovoj krivulji: $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$. Provucimo tangente kroz te dvije točke. One će biti jednake

$$\begin{aligned} t_1 \ldots y - f(a) = f'(a)(x-a) &\implies y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \\ t_2 \ldots y - f(b) = f'(b)(x-b) &\implies y = f'(b)x + f(b) - bf'(b) \end{aligned}$$

To će biti pravci s koeficijentima smjera $f'(a)$ i $f'(b)$ i odsječcima na osi y $f(a) - af'(a)$ i $f(b) - bf'(b)$. Dva pravca su jednaka ako i samo ako su im jednaki odsječci na osi y i koeficijenti smjera pa, uzimavši u obzir da je $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 5$, dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 4a^3 - 6a^2 - 6a + 5 &= 4b^3 - 6b^2 - 6b + 5 \\ -3a^4 + 4a^3 + 3a^2 + 6 &= -3b^4 + 4b^3 + 3b^2 + 6 \end{aligned}$$

iz čega dobivamo da je jedino rješenje gdje je $a \neq b$ jednako $a = 2, b = -1$. Tada je tangenta dana s

$$y = x + 2.$$

Kako su točke $(-1,1)$ i $(2,4)$ lokalni minimumi ove funkcije, a vrijedi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

slijedi da neće postojati niti jedan par točaka osim $(a,b) = (2,-1)$ sa traženim svojstvom.

Zadatak 1.64. Dana je krivulja $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

(a) Nađite jednadžbi tangente na tu krivulju u točki s apscisom $a > 0$.

Rješenje. Vrijedi $y(a) = ae^{\frac{1}{a}}$. Derivacija ove funkcije jest

$$y'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Tada je jednadžba tangente jednaka

$$\begin{aligned} y - ae^{\frac{1}{a}} &= e^{\frac{1}{a}}\left(1 - \frac{1}{a}\right)(x-a) \\ y &= e^{\frac{1}{a}}\left(1 - \frac{1}{a}\right)x + e^{\frac{1}{a}} \end{aligned}$$

(b) Što se događa s tangentom kada $a \to +\infty$?

Rješenje. Vrijedi

$$\lim_{a\to+\infty} y = \lim_{a\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{a}}\left(1 - \frac{1}{a}\right)x + e^{\frac{1}{a}}\right) = x + 1$$

Dakle, kad $a \to +\infty$ tada tangenta teži obliku $y = x + 1$.

Zadatak 1.65. Nađite zajedničke tangente na krivulje

$$\begin{aligned} y + x^2 &= -4 \\ x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

Rješenje. Definirajmo funkcije $f(x) = -4 - x^2$ i $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Neka je $D_1 = \left(a, -4 - a^2\right)$ točka dirališta tangente i funkcije f, a $D_2 = \left(b, \sqrt{4 - b^2}\right)$ točka dirališta tangente i funkcije g. Derivacije funkcija su očito $f'(x) = -2x$ te $g'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Provlačenjem tangente kroz točku D_1 i D_2 za odgovarajuće funkcije dobijemo

$$\begin{aligned} t_1 \ldots y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ t_2 \ldots y &= g'(b)(x-b) + g(b) \end{aligned}$$

Kako bi ta tangenta ležala na obje funkcije, trebaju se podudarati koeficijenti smjerova i odsječci na osi y obje tangente. Dakle, imamo sustav

$$\begin{aligned} f'(a) &= g'(b) \\ f(a) - af'(a) &= g(b) - bg'(b) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem a i b i rješavanjem sustava dobivamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{b}{2\sqrt{4-b^2}} \\ a^2 - 4 &= \sqrt{4-b^2} + \frac{b^2}{\sqrt{4-b^2}} \end{aligned}$$

iz čega dobivamo rješenja

$$a_{1,2} = \pm\sqrt{2\left(6+\sqrt{33}\right)}, \qquad b_{1,2} = \pm\left(\frac{4\sqrt{33}-16}{17}\right)\sqrt{2\left(6+\sqrt{33}\right)}.$$

Dakle, tražene su tangente oblika

$$t \ldots y + 2\left(8+\sqrt{33}\right) = \pm 2\sqrt{2\left(6+\sqrt{33}\right)}\left(x \pm \sqrt{2\left(6+\sqrt{33}\right)}\right).$$

Zadatak 1.66. Odredite kut pod kojim se krivulje

$$\begin{aligned} y^2 - 3x^2 + x + 1 &= 0 \\ xy^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

sijeku u prvom kvadrantu.

Rješenje. Odredimo prvo u kojoj točki se te dvije krivulje sijeku. Iz jednadžbe druge krivule imamo $x = \frac{1}{y^2}$ pa uvrštavanjem u jednadžbu prve krivulje imamo

$$\begin{aligned} y^2 - 3\left(\frac{1}{y^2}\right)^2 + \frac{1}{y^2} + 1 &= 0 \\ y^2 - \frac{3}{y^4} + \frac{1}{y^2} + 1 &= 0 \\ y^6 + y^4 + y^2 + 3 &= 0 \\ (y+1)(y-1)\left(y^4 + 2y^2 + 3\right) &= 0 \end{aligned}$$

iz čega slijedi da se krivulje sijeku u dvije točke, te da jedna točka presjeka za y koordinatu ima -1, a druga 1. No, kako je uvjet zadatka sjecište u prvom kvadrantu, gledamo rješenje $y = 1$ te lako dobijemo da je točka presjeka $(1,1)$. Deriviranjem ovih dvaju funkcija i uvrštavanjem $x = y = 1$ dobivamo da su koeficijenti smjera tangenti u točki $(1, 1)$ na svaku krivulju jednaki

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{6x-1}{2y} \implies y_1'(1) = \frac{5}{2} \\ y_2' &= \frac{-y}{2x} \implies y_2'(1) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u formulu dobivamo da je kut jednak $\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}}\right| = \operatorname{arctg} 12.$

1.5 L'Hopitalovo pravilo

Zadatak 1.71. Izračunajte.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

Rješenje. Bitno je napomenuti da se ovdje radi o jednostranom limesu - nema smisla promatrati limes kad $x \to 0-$ jer je domena prirodnog logaritma $x > 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) &\overset{\text{L'H}}{=} - \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \\ &\overset{\text{L'H}}{=} - \lim_{x\to 0+} \frac{2\sin x\cos x}{1} = 0\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7} = \frac{3}{5}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x}$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x}{\cos x} = 1$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{ctg} x$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{ctg} x = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \sin x\cos^2 x = 0$$

Zadatak 1.72. Izračunajte.

(a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{\ln x\,(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}$$
$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$$

Rješenje. Definirajmo $y\,(x)=x^{\frac{3}{4+\ln x}}$. Sada imamo

$$\ln y\,(x)=\frac{3\ln x}{4+\ln x}.$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y\,(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln x}{4+\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}=3$$

Sada je zbog neprekidnosti

$$\lim_{x\to 0}y\,(x)=\lim_{x\to 0}e^{\ln y(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y(x)}=e^3.$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{x\left(x^{\frac{1}{n}-1}\right)}=0$$

(d)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{n\ln^{n-1} x}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n\ln^{n-1} x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{n(n-1)\ln^{n-2} x}{x}}{1}\\ &\dots\end{aligned}$$

Iteriranjem dok ne "iscrpimo" n dobijemo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{x} = 0.$$

Zadatak 1.73. Izračunajte.

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^x$$

Rješenje. Definirajmo $y(x) = \left(\cos\frac{1}{x}\right)^x$. Sada imamo

$$\ln y(x) = x\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \ln y(x) &= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sin\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}} = 0\end{aligned}$$

Sada zbog neprekidnosti imamo

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln y(x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln y(x)} = e^0 = 1.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

Rješenje. Definirajmo $y(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. Sada imamo

$$\ln y(x) = \operatorname{tg} x \ln\sin x$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln y(x) &= \lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x\ln\sin x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} -\sin x\cos x = 0\end{aligned}$$

Sada zbog neprekidnosti imamo

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} e^{\ln y(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y(x)} = e^0 = 1.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin x}$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-\cos x} = +\infty$$

(d)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin\pi x}$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin\pi x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\pi\cos\pi x} = \frac{1}{\pi\cos\pi} = -\frac{1}{\pi}$$

Zadatak 1.74. Izračunajte.

(a)

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\operatorname{arctg} x}{x^3+x^2+x}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\operatorname{arctg} x}{x^3+x^2+x} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+2}{(1+x^2)(3x^2+2x+1)}\\ &= \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+2}{3x^4+2x^3+4x^2+2x+1}\\ &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{12x^3+6x^2+8x+2}\\ &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{36x^2+12x+8} = 0\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x-x^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\sin x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x}{\frac{-2x+2}{2\sqrt{2x-x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}\sqrt{1-\sin x}}}{\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x-x^2}\cos x}{2\sqrt{\sin x}\sqrt{1-\sin x}\,(1-x)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{\sin x}}}_{(?)}$$

Računamo nepoznati limes.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{2x-x^2}{\sin x}}$$
$$= \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x}{\sin x}(2-x)}$$
$$= \sqrt{2}$$

Konačni limes jednak je

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(c)

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\pi}\frac{\frac{-1}{1}}{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}} = 2\lim_{x\to\pi}\sin^2\frac{x}{2} = 2$$

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+x}{e^x-\cos x}$$

Rješenje.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+x \quad /:e^x}{e^x-\cos x \quad /:e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\ln(1+x)-\frac{x^2e^{-x}}{2}+xe^{-x}}{1-\cos x e^{-x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\ln(1+x)\right)-\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2e^{-x}}{2}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\cos x e^{-x}\right)}$$

Računamo limese brojnika i nazivnika redom.

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \cos xe^{-x}\right) = 1 - \lim_{x\to+\infty} \cos xe^{-x} = 1 - \lim_{x\to+\infty} \cos x \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x(1+x)} = 0$$

Sad je konačni limes jednak

$$\frac{0-0+0}{1} = 0.$$

Zadatak 1.75. Može li se primijeniti L'Hôpitalovo pravilo na

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}?$$

Izračunajte gornji limes.

Rješenje. Dajemo dva načina rješavanja ovog limesa.

- teorem o sendviču

$$0 \leqslant \left|\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}\right| \leqslant \left|\frac{x}{\sin x} \cdot x\right| \to 0$$

  pa je dani limes jednak 0.

- tablični limesi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}}_{1} = 0$$

  pa je dani limes jednak 0.

Limes se ne može izračunati L'Hospitalovim pravilom jer limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

ne postoji. Naime, za nizove

$$\begin{aligned}(x_n)_n &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \to 0 \\ (y_n)_n &= \frac{1}{(2k+1)\pi} \to 0\end{aligned}$$

vrijedi $\cos(x_n) = 0$, a $\cos(y_n) = -1$, pa vrijednosti limesa za ta dva niza neće biti jednaka.

Zadatak 1.76. Izračunajte.

(a)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x + x^2\cos x} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x + 2x\cos x - x^2\sin x + 2x\cos x} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6\cos x - 6x\sin x + x^2\cos x} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Rješenje. Definirajmo $y(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. Tada imamo

$$\ln y(x) = \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}{\ln x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\ln y(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{(1+x^2)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}}{\frac{1}{x}} \\ &= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+x^2)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) - 1} \\ &= -\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) - 1\right)}\end{aligned}$$

Računamo nepoznati limes u nazivniku.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)-1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{2x}-1 = \left(\frac{0}{0}\right) \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 \quad /:x^2}{1+x^2 \quad /:x^2}-1 \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2}+1}-1=-1
\end{aligned}$$

Sada zbog neprekidnosti imamo

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln y(x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln y(x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2\ln\frac{ex}{x+1}}-x\right)$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2\ln\frac{ex}{x+1}}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+x^2\ln\frac{ex}{x+1}}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2\ln\frac{ex}{x+1}}+x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2\ln\frac{ex}{x+1}}+x\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2\ln\frac{ex}{x+1}-x^2 \quad /:x}{\sqrt{1+x^2\ln\frac{ex}{x+1}}+x \quad /:x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}+x\ln\frac{ex}{x+1}-x}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\ln\frac{ex}{+1}}+1} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\ln\frac{ex}{x+1}}+1} \cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+x\ln\frac{ex}{x+1}-x\right)
\end{aligned}$$

Računamo limes nazivnika prvog faktora. Koristimo se neprekidnosti korijena i logaritma.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\ln\frac{ex}{x+1}}+1\right) &= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{ex}{x+1}}+1 \\
&= \sqrt{\ln e}+1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Računamo limes drugog faktora.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+x\ln\frac{ex}{x+1}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{ex}{x+1}-x\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln\frac{ex}{x+1}-1\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{ex}{x+1}-1}{\frac{1}{x}}\\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e}{ex(x+1)}}{-\frac{1}{2}}\\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = -1
\end{aligned}$$

Konačni limes jednak je

$$\frac{1}{2}\cdot(-1) = -\frac{1}{2}.$$

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \frac{-\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}\\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} -\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x(x+1)^2}}{\frac{-2}{x^3}}\\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{-2x\left(x^2+2x+1\right)}\\
&= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{-2x^3-4x^2-2x} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

1.6 Neprekidnost i derivabilnost

Zadatak 1.87. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ 1 + x, & x > 0 \end{cases}$$

bude neprekidna. Je li f diferencijabilna?

Rješenje. f je trivijalno neprekidna na $x < 0$ i $x > 0$ kao zbroj/razlika polinoma. Provjerimo je li neprekidna u $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \left(1 - x^2\right) = 1$$
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (1 + x) = 1$$

Kako bi f bila neprekidna u točki 0 limesi s lijeva i zdesna u točki $x = 0$ i funkcijska vrijednost moraju se poklapati pa mora vrijediti $\lambda = 1$. Također, funkcija je trivijalno diferencijabilna na $x < 0$ i $x > 0$ kao zbroj/razlika polinoma. Vrijedi $f'(x) = -2x$ na $x < 0$ i $f'(x) = 1$ na $x > 0$. Provjerimo je li diferencijabilna u $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} -x = 0$$
$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

Vidimo da se limesi slijeva i zdesna ne poklapaju po vrijednosti pa funkcija po definiciji nije diferencijabilna u $x = 0$.

Zadatak 1.88. Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije f definirane s

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 8, & x \leqslant 3 \\ x^2 - 2x + 1, & x > 3 \end{cases}.$$

Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$?

Rješenje. f je trivijalno neprekidna i diferencijabilna na $x < 3$ i $x > 3$ kao polinom. Provjerimo prvo je li f neprekidna u $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} (4x - 8) = 4$$
$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} \left(x^2 - 2x + 1\right) = 4$$

Vidimo da se limesi slijeva i zdesna i funkcijska vrijednost u točki $x = 3$ poklapaju pa je f neprekidna u $x = 3$. Provjerimo sada derivabilnost u $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3-} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3-} \frac{4x-12}{x-3} = 4$$
$$\lim_{x\to 3+} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3+} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = 4$$

Limesi slijeva i zdesna se poklapaju pa derivacija u točki $x = 3$ po definiciji postoji i jednaka je 4. Tada je funkcija f' definirana s

$$f'(x) = \begin{cases} 4, & x \leqslant 3 \\ 2x-2 & x > 3 \end{cases}.$$

f je kao polinom/konstanta neprekidna na $x < 3$ i $x > 3$, pa provjeravamo je li neprekidna u $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3-} f'(x) = 4$$
$$\lim_{x\to 3+} f'(x) = \lim_{x\to 3+} (2x-2) = 4$$

Limesi slijeva i zdesna i funkcijska vrijednost se poklapaju pa je f' neprekidna na $\mathbb{R}$. Dakle, f je doista $C^1(\mathbb{R})$.

Zadatak 1.89. Ispitajte neprekidnost funkcije f definirane na $x \geqslant -1$ formulom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}.$$

U kojim točkama je f derivabilna, a u kojim neprekidno derivabilna?

Rješenje. Očito je jedino upitna neprekidnost u $x = 0$. Računamo

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}$$

Vrijednost limesa i funkcijska vrijednost se poklapaju pa je f doista neprekidna na cijeloj domeni ove funkcije. Također, funkcija je trivijalno derivabilna na $\mathcal{D}_f \setminus \{0\}$ i vrijedi

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1} + 1}{x^2} = \frac{-x-2+2\sqrt{x+1}}{2x^2\sqrt{x+1}}$$

Provjerimo je li f diferencijabilna u $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{x+1}-2-x}{2x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}}{4} = -\frac{1}{8}$$

Vidimo da derivacija po definiciji postoji i vrijedi $f'(0) = -\frac{1}{8}$. Također, uočimo da je f neprekidna u točki $x = 1$ [u njoj je definirana pa možemo direktno izračunati vrijednost], ali derivacija funkcije općenito nije definirana za segmente, tj. funkcija f ne može biti derivabilna u rubu segmenta. Dakle, f je diferencijabilna na $\langle -1, +\infty\rangle$ ..

Zadatak 1.90. Neka je $f(x) = |x|^3$. Dokažite da je $f \in C^2(\mathbb{R})$, ali da $f'''(0)$ ne postoji.

Rješenje. f je trivijalno [kao polinom] neprekidna na $x < 0$ i $x > 0$. Računamo neprekidnost u $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -x^3 = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^3 = 0$$

Vidimo da se limesi slijeva i zdesna i funkcijska vrijednost poklapaju pa je f neprekidna na $\mathbb{R}$. Također, f je očito diferencijabilna na $x < 0$ i $x > 0$. Računamo po definiciji derivabilnost u $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x^3}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^3}{x} = 0$$

Dakle, po definiciji je f diferencijabilna u 0 i vrijedi $f'(0) = 0$. Tada je f' definirana s

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2, & x < 0 \\ 3x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Očito je neprekidna [polinom] na $x < 0$ i $x > 0$. Računamo neprekidnost u $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} -3x^2 = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} 3x^2 = 0$$

Limesi i funkcijska vrijednost se poklapaju pa je f' neprekidna na $\mathbb{R}$. f' je očito diferencijabilna na $x < 0$ i $x > 0$. Ispitujemo derivabilnost u $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} -3x = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} 3x = 0$$

Po definiciji je f' diferencijabilna u $x = 0$. Sada je f'' zadana s

$$f''(x) = \begin{cases} -6x, & x < 0 \\ 6x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Odmah vidimo da će funkcija f'' biti neprekidna u 0, no da neće biti diferencijabilna u $x = 0$ jer će limes slijeva biti -6, a zdesna 6.

Zadatak 1.91. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x\right), & |x| \leqslant 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\pi}{3}\operatorname{sgn} x - \frac{\sqrt{3}}{4}, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Ispitajte.

(a) neprekidnost funkcije f

Rješenje. Funkcija f zadana je formulom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}, & x < -1 \\ \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x\right), & x \in [-1, 1] \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}, & x > 1 \end{cases}.$$

Očito je f neprekidna na otvorenim intervalima $x < -1, x > 1$ i $x \in \langle -1, 1\rangle$ te su jedine "problematične" točke $x = -1$ i $x = 1$.

- za $x = -1$ imamo

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$$
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

  Zaključujemo da f ima prekid u točki $x = -1$, pa niti nema smisla provjeravati derivabilnost.

- za $x = 1$ imamo

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x\right) = \frac{\pi}{3}$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \frac{\pi}{3}$$

  Vidimo da se limesi i funkcijska vrijednost poklapaju te je f neprekidna u točki $x = 1$.

Dakle, f je neprekidna na $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. f je trivijalno derivabilna na otvorenim intervalima $x < -1, x > 1$ i $x \in \langle -1, 1\rangle$. Preostaje ispitati točku $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1-} \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x\right) - \frac{\pi}{3}}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{3}}{1 + 3x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{4}}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Po definiciji je f derivabilna u $x = 1$.

(b) diferencijabilnost funkcije f. Je li f klase C^1 tamo gdje je diferencijabilna?

Rješenje. Iz prvog podzadatka imamo da je f' definirana s

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4}, & x < -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{1+3x^2}, & x \in \langle -1, 1] \\ \frac{\sqrt{3}}{4}, & x > 1 \end{cases}.$$

f' je očito neprekidna na $x \in \langle -\infty, -1\rangle, x \in \langle 1, +\infty\rangle$ i $x \in \langle -1, 1\rangle$. Provjeravamo neprekidnost u $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{3}}{1+3x^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\lim_{x\to 1+} f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

f' je neprekidna u točki $x = 1$ pa je funkcija $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{-1\})$.

Zadatak 1.92. Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 (x-b)^2, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Je li f derivabilna? Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$?

Rješenje. Ispitajmo neprekidnost ove funkcije. Jedine točke koje predstavljaju problem su rubovi segmenta gdje je funkcija različita od nule pa provjeravamo.
Za $x = a$ imamo

$$\lim_{x\to a-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} (x-a)^2 (x-b)^2 = 0$$

Limesi i funkcijska vrijednost se poklapaju pa je f neprekidna u točki $x = a$. Provjerimo još derivabilnost.

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a-} \frac{0}{x-a} = 0$$
$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+} (x-a)(x-b)^2 = 0$$

f je po definiciji derivabilna u $x = a$ i vrijedi $f'(a) = 0$. Analognim zaključivanjem za b dobivamo da je f i neprekidna i derivabilna u točki $x = b$. Sada je funkcija f' definirana pravilom pridruživanja

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)^2 + 2(x-a)^2(x-b), & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Očito je f neprekidna svugdje osim potencijalno na rubovima segmenta. $[a, b]$. Provjeravamo za točku $x = b$ te će analogni zaključci sljediti za $x = a$. Imamo

$$\lim_{x\to b-} f'(x) = \lim_{x\to b-} \Big(2(x-a)(x-b)^2 + 2(x-a)^2(x-b)\Big) = 0$$
$$\lim_{x\to b+} f'(x) = 0$$

Zaključujemo da je f' neprekidna na $\mathbb{R}$, pa je $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Zadatak 1.93. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Dokažite da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}$. Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$? Je li $f \in C^2(\mathbb{R})$?

Rješenje. Očito nam jedino predstavlja problem točka $x = 0$. Iz činjenice da je sinus odozgo omeđena funkcija imamo

$$0 \leqslant \left| x^4 \sin\frac{1}{x} \right| \leqslant \left| x^4 \right|$$

pa primjenom teorema o sendviču imamo $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, što nam govori da je f neprekidna u točki $x = 0$. Preostaje ispitati diferencijabilnost u $x = 0$. Imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^3 \sin\frac{1}{x} = 0$$

što dobivamo istim argumentom teorema o sendviču, samo za x^3. Dakle, f je diferencijabilna u $x = 0$, pa time na cijelom $\mathbb{R}$. Tada je funkcija f' definirana s

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Provjerimo neprekidnost i diferencijabilnost u točki $x = 0$. Za neprekidnost imamo

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 4x^3 \sin\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$$

što dobivamo iz teorema o sendviču za

$$0 \leqslant \left| 4x^3 \sin\frac{1}{x} \right| \leqslant \left| 4x^3 \right|$$

i

$$0 \leqslant \left| x^2 \cos\frac{1}{x} \right| \leqslant \left| x^2 \right|.$$

Dakle, f' je neprekidna na $\mathbb{R}$, pa je $f \in C^1(\mathbb{R})$. Provjerimo diferencijabilnost f' u točki $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3 \sin\frac{1}{x} - x^2 \cos\frac{1}{x}}{x} = 0$$

ponovnom primjenom teorema o sendviču. Tada je funkcija f'' definirana s

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 \sin\frac{1}{x} - 6x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Ova funkcija nije neprekidna u točki $x = 0$ jer $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ ne postoji. Naime, za nizove

$$x_k = \frac{1}{2k\pi} \quad \text{i} \quad y_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

imamo

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = 0 = \lim_{k\to+\infty} y_k,$$

no vrijedi

$$\lim_{k\to+\infty} \sin\frac{1}{x_k} = \lim_{k\to+\infty} \sin(2k\pi) = 0$$
$$\lim_{k\to+\infty} \sin\frac{1}{y_k} = \lim_{k\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$$

pa f'' ne može biti neprekidna. Dakle, $f \notin C^2(\mathbb{R})$.

Zadatak 1.94. Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije

$$f(x) = \left| \left|x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right| + \left|x^2 + x - 6\right| \right|.$$

Rješenje. Funkcija f [koja je neprekidna kao kompozicija apsolutne vrijednosti i polinoma] definirana je s

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^3 + (x-2)(x+3), & x < -3 \\ -(x+1)^3 - (x-2)(x+3), & -3 \leqslant x < -1 \\ (x+1)^3 - (x-2)(x+3), & -1 \leqslant x < 2 \\ (x+1)^3 + (x-2)(x+3), & x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Treba provjeriti diferencijabilnost u točkama $x = -3, x = -1$ i $x = 2$.

- za $x = -3$ vrijedi

$$\lim_{x\to -3-} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3-} \frac{-(x+1)^3 + (x-2)(x+3) - 8}{x+3} = -17$$
$$\lim_{x\to -3+} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3+} \frac{-(x+1)^3 - (x-2)(x+3) - 8}{x+3} = -7$$

  Dakle, f nije derivabilna u $x = -3$.

- za $x = -1$ vrijedi

$$\lim_{x\to -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1-} \frac{-(x+1)^3 - (x-2)(x+3) - 6}{x+1} = 1$$
$$\lim_{x\to -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1+} \frac{(x+1)^3 - (x-2)(x+3) - 6}{x+1} = 1$$

f je derivabilna u $x = 1$.

- za $x = 2$ vrijedi

$$\lim_{x\to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{(x+1)^3 - (x-2)(x+3) - 27}{x-2} = 22$$
$$\lim_{x\to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{(x+1)^3 + (x-2)(x+3) - 27}{x-2} = 32$$

f nije derivabilna u $x = 2$.

Zadatak 1.95. Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \sin x, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Je li $f \in C^2(\mathbb{R})$?

Rješenje. Provjeravamo neprekidnost u točki $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \left(x + e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0-} + e^{\overbrace{\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x}}^{\to -\infty}} = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sin x = 0$$

Dakle, f je neprekidna na $\mathbb{R}$. Provjeravamo diferencijabilnost u $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x + e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1 + \lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

pri čemu računamo

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x} \\ u \to -\infty \end{bmatrix} = \lim_{u\to -\infty} u e^{-u} = \lim_{u\to -\infty} \frac{u}{e^{-u}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to -\infty} \frac{1}{-e^{-u}} = 0$$

Dakle, f je derivabilna na $\mathbb{R}$. Funkcija f' definirana je s

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}, & x < 0 \\ \cos x, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Provjerimo je li f' neprekidna u $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = 1 - \lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 1$$
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \cos x = 1$$

pri čemu računamo

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x} \\ u \to -\infty \end{bmatrix} = \lim_{u\to -\infty} u^2 e^{-u} = \lim_{u\to -\infty} \frac{u^2}{e^{-u}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to -\infty} \frac{2u}{-e^{-u}}$$
$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to -\infty} \frac{2}{e^{-u}} = 0$$

Dakle, f' je neprekidna na $\mathbb{R}$, pa je klase C^1 na $\mathbb{R}$. Provjerimo diferencijabilnost u točki $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} -\sin x = 0$$

pri čemu računamo analogno kao prije

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x} \\ u \to -\infty \end{bmatrix} = \lim_{u\to -\infty} u^3 e^{-u} = 0$$

Dakle, f je derivabilna na $\mathbb{R}$. Tada je funkcija f'' definirana s

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}, & x < 0 \\ -\sin x, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Preostaje provjeriti neprekidnost u $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-} f''(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4} = 0$$
$$\lim_{x\to 0+} f''(x) = \lim_{x\to 0+} -\sin x = 0$$

Dakle, f'' je neprekidna na $\mathbb{R}$, pa je $f \in C^2(\mathbb{R})$.

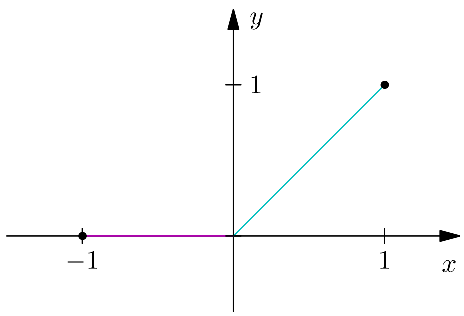
Zadatak 1.96. Navedite primjer funkcije f neprekidne na $[-1,1]$ za koju vrijedi

$$f(0) = 0, \quad f'_-(0) = 0 \quad \text{i} \quad f'_+(0) = 1.$$

Skicirajte njen graf i zapišite formulu.

Rješenje. Definirajmo $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0 \\ x, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases}.$$



Tada je $f(0) = 0$ te vrijedi

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{0-0}{x-0} = 0$$

te

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{x-0}{x-0} = 1.$$

Zadatak 1.97. Skicirajte primjer grafa funkcije f neprekidne na $[-2,2]$ koja zadovoljava uvjete

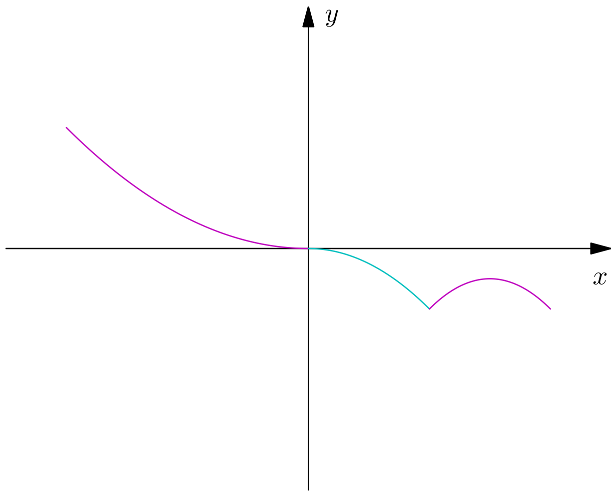
$$f(-2) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'_-(1) = -1,$$

$$f'_+(1) = 1 \quad \text{i} \quad f'_-(2) = -1.$$

Rješenje. Definirajmo $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & -2 \leqslant x < 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x^2 + 3x - \frac{5}{2}, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}.$$

Dokažite da su sva tražena svojstva zadovoljena.



Zadatak 1.99. Dokažite da za funkciju zadanu s

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ niti jednostrani limesi, ali f ima derivaciju u 0.

Rješenje. Po definiciji derivabilnosti u 0 vrijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0.$$

No, kako je

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

vidimo da $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ ne postoji jer limes $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ ne postoji.

Zadatak 1.100. Je li f definirana s

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{\frac{2}{3}}, & x \leqslant 0 \\ (x+1)^{\frac{2}{3}}, & x > 0 \end{cases}$$

derivabilna u 0?

Rješenje. Vrijedi

$$\lim_{x\to 0-} \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0-} -\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{-1}{3}} = -\frac{2}{3}$$

te
$$\lim_{x\to0+}\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}-1^{\frac{2}{3}}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to0+}\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3}.$$
Kako se navedene vrijednosti ne poklapaju, funkcija nije derivabilna u 0.

Zadatak 1.101. Za
$$f(x)=(1-x)^{\frac{3}{2}}$$
odredite $f'_{-}(1)$ ako postoji.

Rješenje. Vrijedi
$$f'_{-}(1)=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{x-1}=-\lim_{x\to1-}\sqrt{1-x}=0.$$

1.7 Rast i pad. Ekstremi

Zadatak 1.120. Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije zadane formulom.

(a)

$$f\left(x\right)=x^2+\frac{1}{x^2-4}$$

Rješenje. Prva derivacija ove funkcije jest

$$f'\left(x\right)=x\left(2-\frac{2}{\left(x^2-4\right)^2}\right)$$

pa su stacionarne točke oni $x-$evi za koje vrijedi $f'\left(x\right)=0$. Računanjem

$$x\left(2-\frac{2}{\left(x^2-4\right)^2}\right)=0$$

vidimo da su je skup stacionarnih točaka jednak $\left\{0,\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{5}\right\}$. Tablično ispitujemo ponašanje derivacije.

$-\infty \quad -\sqrt{5} \quad -\sqrt{3} \quad 0 \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{5} \quad +s\infty$

f'	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dakle, funkcija pada na $\left\langle-\infty,-\sqrt{5}\right\rangle$, $\left\langle-\sqrt{3},0\right\rangle$, $\left\langle\sqrt{3},\sqrt{5}\right\rangle$ a raste na $\left\langle-\sqrt{5},-\sqrt{3}\right\rangle$, $\left\langle 0,\sqrt{3}\right\rangle$ te $\left\langle\sqrt{5},+\infty\right\rangle$ te sve stacionarne točke ujedno točke ekstrema, pri čemu su točke $\left(-\sqrt{5},6\right)$, $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ te $\left(\sqrt{5},6\right)$ točke lokalnog minimuma, a $\left(-\sqrt{3},2\right)$ i $\left(\sqrt{3},2\right)$ točke lokalnog maksimuma.

(b)

$$f\left(x\right)=\ln\left(x^4-6x^2+10\right)-2\operatorname{arctg}\left(x^2-3\right)$$

Rješenje. Prva derivacija ove funkcije jest

$$f'\left(x\right)=\frac{4x\left(x^2-4\right)}{x^4-6x^2+10}$$

pa su stacionarne točke oni $x-$evi za koje vrijedi $f'\left(x\right)=0$. Računanjem

$$\frac{4x\left(x^2-4\right)}{x^4-6x^2+10}=0$$

vidimo da su je skup stacionarnih točaka jednak $\left\{0,\pm2\right\}$. Tablično ispitujemo ponašanje derivacije.

	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$	
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Dakle, funkcija pada na $\langle -\infty, 2\rangle, \langle 0, 2\rangle$ a raste na $\langle -2, 0\rangle, \langle 2, +\infty\rangle$ te su sve stacionarne točke ujedno točke ekstrema, pri čemu su točke $\left(-2, \ln 2 - \frac{\pi}{2}\right)$ te $\left(2, \ln 2 - \frac{\pi}{2}\right)$ točke lokalnog minimuma, a $(0, \ln 10 + 2 \operatorname{arctg} 3)$ točka lokalnog maksimuma.

Zadatak 1.121. Odredite sliku funkcija.

(a)

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x \qquad \text{na segmentu } \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

Rješenje. Derivacija ove funkcije jest

$$f'(x) = 6\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

te je ona jednaka nuli za $x = 1$ i $x = 2$. Tražimo globalne ekstreme ove funkcije.

	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{5}{2}$
f'	$+$	$-$	$+$	
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Vidimo da se globalni minimum postiže u točkama $x = \frac{1}{2}$ i $x = 2$ i jednak je 4, a globalni maksimum u točkama $x = 1$ i $x = \frac{5}{2}$ i jednak je 5. Kako je f neprekidna funkcija, po Bolzano-Weierstrassu je $f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]\right) = [4, 5]$.

(b)

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 4x + 5} \qquad \text{na segmentu } [-5, 5]$$

Rješenje. Derivacija ove funkcije jest

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 4x + 3}{\left(x^2 + 4x + 5\right)^2}$$

te je ona jednaka nuli za $x = -3$ i $x = 1$. Tražimo globalne ekstreme ove funkcije.

	-5		-3		-1		5
f'		$-$		$+$		$-$	
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Računanjem vrijednosti funkcije u točkama iz tablice slijedi da je točka $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ globalni maksimum, a $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ globalni minimum ove funkcije. Kako je f neprekidna, slijedi da je $f\left([-5,5]\right) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

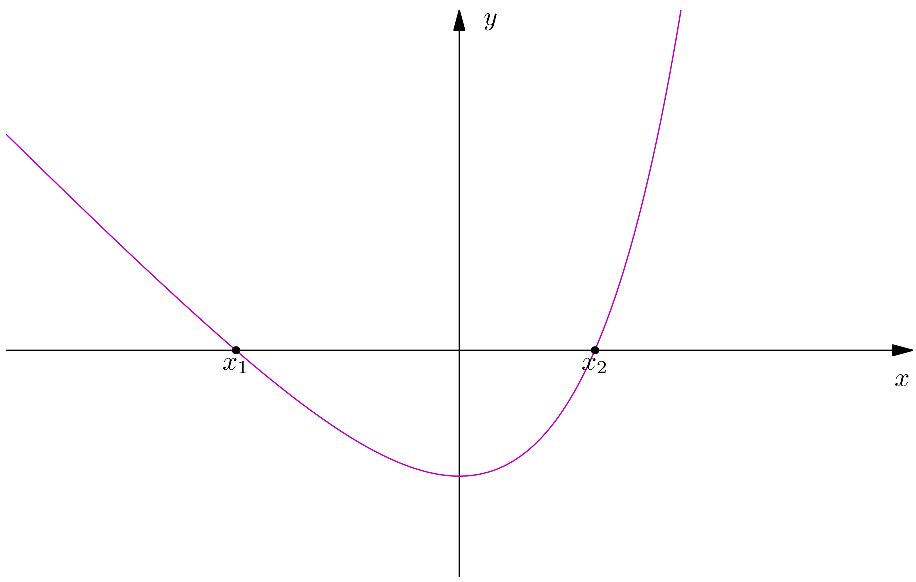
Zadatak 1.122. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x) = e^x - x - a.$$

Rješenje. Prva derivacija ove funkcije jest $f'(x) = e^x - 1$ te joj je stacionarna točka jednaka $x = 0$. Ova funkcija je strogo padajuća na $\langle -\infty, 0\rangle$ te strogo rastuća na $\langle 0, +\infty\rangle$. Za $x = 0$ imamo $f(0) = 1 - a$, pa dijelimo na slučajeve.

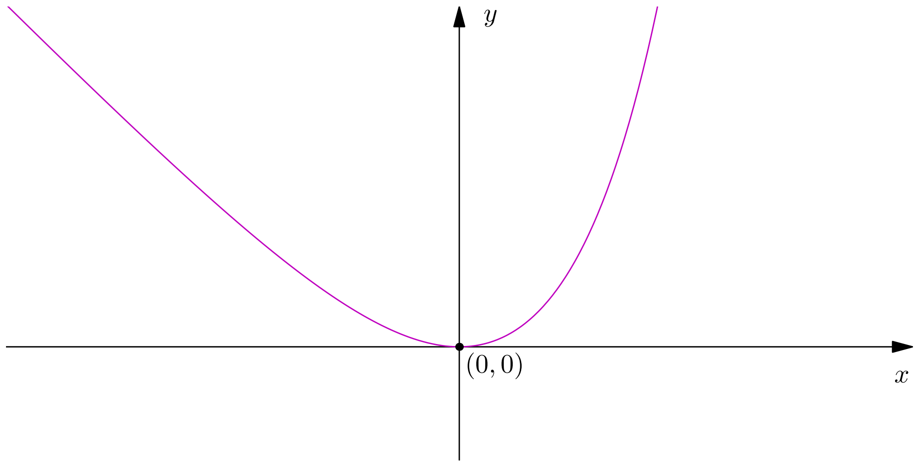
	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
		$\searrow$		$\nearrow$	

- $1 - a < 0 \iff 1 < a$



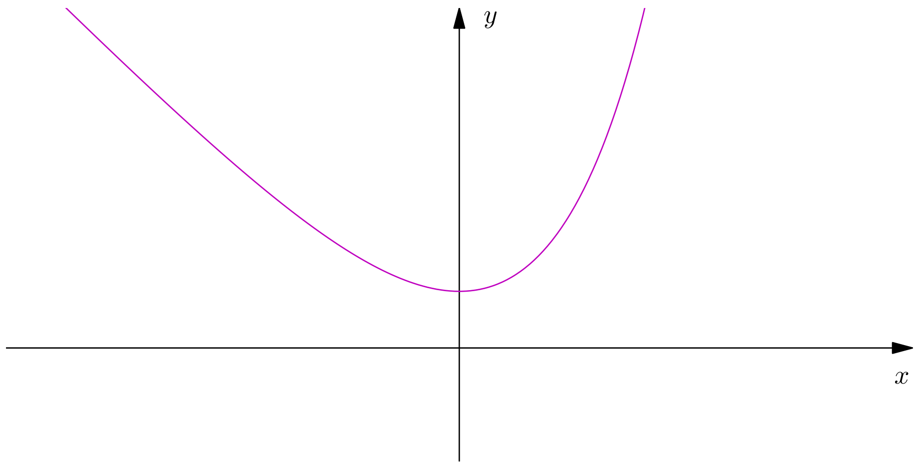
Funkcija ima dvije nultočke: jednu na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$, a drugu na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$.

- $1 - a = 0 \iff 1 = a$



Funkcija ima jednu nultočku, i to $(0, 0)$.

- $1 - a > 0 \iff 1 > a$



Funkcija nema nultočaka.

Zadatak 1.123. Dokažite nejednakosti.

(a)

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}, \qquad \text{za svaki } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Rješenje. Definirajmo funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$. Tada vrijedi

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2$$

što nema nultočaka na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Dakle, funkcija nema stacionarnih točaka. Želimo dobiti da f raste na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, a to će slijediti iz rasta druge derivacije. Vrijedi

$$f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} - 2x.$$

Ovo ne možemo eksplicitno riješiti pa se služimo trećom derivacijom

$$f'''(x) = \frac{\overbrace{7 + \cos 2x}^{>0}}{\underbrace{\cos^2 x}_{>0}} \cdot \underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{>0} > 0 \qquad \text{na } \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Dakle, f''' je pozitivna na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, pa f'' raste na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Vrijedi

$$f''(x) > f''(0) = 0, \qquad \forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Tada, jer je f'' pozitivna na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, vrijedi da f' raste na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Zaključujemo

$$f'(x) > f'(0) = 0, \qquad \forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Iz pozitivnosti prve derivacije slijedi rast funkcije f. Kako je $f(0) = 0$, slijedi

$$f(x) > f(0) = 0, \qquad \forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

odnosno

$$\operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3} > 0, \qquad \forall x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

što smo i htjeli dokazati.

(b)

$$2x \operatorname{arctg} x \geqslant \ln\left(1 + x^2\right), \qquad \text{za svaki } x > 0$$

Rješenje. Definirajmo funkciju $f(x) = 2x \operatorname{arctg} x - \ln\left(1 + x^2\right)$. Želimo pokazati $f(x) \geqslant 0, \forall x > 0$. Vrijedi

$$f'(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{2x}{1 + x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$$

te $f'(x) = 0 \iff \operatorname{arctg} x = 0 \iff x = 0$. Vrijedi $f'(x) > 0$ za sve $x \in \langle 0, +\infty \rangle$. Dakle, f strogo raste na $[0, +\infty\rangle$, tj. $f(x) \geqslant f(0) = 0, \forall x > 0$.

(c)

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}, \qquad \text{za svaki } x > 1$$

Rješenje. Definirajmo funkciju $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$. Želimo pokazati $f(x) > 0, \forall x > 1$. Vrijedi

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$$

te $f'(x) = 0 \iff x = 1$. Vrijedi $f'(x) > 0$ na $x > 0$. Dakle, f strogo raste na $\langle 0, +\infty\rangle$, tj. $f(x) > f(0) = 0, \forall x > 1$.

(d)

$$5x + \frac{1}{x^5} \geqslant 6, \qquad \text{za svaki } x > 0$$

Rješenje. Definirajmo funkciju $f(x) = 5x^6 - 6x^5 + 1$. Želimo pokazati $f(x) \geqslant 0, \forall x > 0$. Vrijedi

$$f'(x) = 30x^5 - 30x^4 = 30x^4(x-1)$$

te $f'(x) = 0 \iff x = 0, x = 1$. Ispitujemo tablicom predznaka ponašanje funkcije.

	0		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
		$\searrow$		$\nearrow$	

Dakle, kako je točka $(1, f(1))$ lokalni minimum, slijedi $f(x) \geqslant f(1) = 0, \forall x > 0$.

(e)

$$\operatorname{arctg} x > \arcsin \frac{x^2}{x^2+1}, \qquad \text{za svaki } x > 0$$

Rješenje. Definirajmo funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} x - \arcsin \frac{x^2}{x^2+1}$. Želimo pokazati $f(x) > 0, \forall x > 0$. Vrijedi

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(1 - \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}\right)$$

te $f'(x) = 0 \iff \sqrt{2x^2+1} - 2x = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ispitujemo tablicom predznaka ponašanje funkcije.

	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'	$+$	$-$	
	$\nearrow$	$\searrow$	

Za sve $x \in \left\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ vrijedi $f(x) > f(0) = 0$.
Za sve $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right\rangle$ vrijedi $f(x) > \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} x - \arcsin \frac{x^2}{1+x^2} \right) = 0$. Dakle, $f(x) > 0, \forall x > 0$.

(f)

$$\ln \frac{b}{a} < \frac{b^2 - a^2}{2ab}, \qquad \text{za svaki } 0 < a < b$$

Rješenje. Uzimanjem $x = \frac{b}{a}$ vidimo da gornju nejednakost možemo napisati kao

$$\ln x < \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right).$$

Definirajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) - \ln x$. Želimo pokazati $f(x) > 0, \forall x > 1$. Vrijedi

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{2x^2}$$

te $f'(x) = 0 \iff x = 1$. Vrijedi $f'(x) > 0$ za sve $x \in \langle 0, +\infty \rangle$. Dakle, f strogo raste na $\langle 1, +\infty \rangle$, tj. $f(x) > f(1) = 0, \forall x > 1$.

(g)

$$\left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right)^{\frac{8}{3}} + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} \right)^{\frac{8}{3}} \geqslant 9 \sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \qquad \text{za svaki } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Rješenje. Definirajmo funkciju s

$$f(x) = \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right)^{\frac{8}{3}} + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} \right)^{\frac{8}{3}} - 9 \sqrt[3]{\frac{9}{2}}.$$

Vrijedi

$$f'(x) = \frac{8}{3} \left(\sin x \operatorname{tg}^2 x \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} \right)^{\frac{5}{3}} - \cos x \operatorname{ctg}^2 x \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) \right).$$

Tražimo stacionarnu točku ovog izraza.

$$\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{5}{3}}\cos x\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{5}{3}}\sin x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{5}{3}}\cos^5 x=\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{5}{3}}\sin^5 x$$

$$\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)^{5}\cos^{15} x=\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right)^{5}\sin^{15} x$$

$$\frac{\left(1+\sin^2 x\right)^5}{\sin^5 x}\cos^{15} x=\frac{\left(1+\cos^2 x\right)^5}{\cos^5 x}\sin^{15} x$$

$$\left(1+\sin^2 x\right)^5\cos^{20} x=\left(1+\cos^2 x\right)^5\sin^{20} x$$

$$\left(1+\sin^2 x\right)^5\left(1-\sin^2 x\right)^{10}=\left(1-\sin^2 x+1\right)^5\sin^{20}$$

Uvrštavanjem supstitucije $t=\sin^2 x$ svodimo zadatak na

$$(1+t)\,(1-t)\,(1-t)=(2-t)\,t^2,$$

iz čega vidimo tri rješenja: $t_1=\frac{1}{2}, t_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Kako je $t=\sin^2 x$, odbacujemo rješenja $t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ [jer je negativno, a kvadrat nijednog realnog broja ne može biti negativan] i $t_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [jer je veći od 1, a sinus je ograničen s 1] te je

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\implies x=\frac{\pi}{4}$$

jedino rješenje na intervalu $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$.Tada tablicom predznaka dobivamo da je

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$		$+$	
		$\searrow$		$\nearrow$	

iz čega vidimo da je $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ lokalni minimum te funkcije. Po definiciji lokalnog minimuma imamo da je $f\left(x\right)>f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ za sve $0<x<\frac{\pi}{2}$, što dokazuje tvrdnju.

Zadatak 1.124. Odredite globalne ekstreme funkcije.

(a)

$$f\left(x\right)=e^{\frac{x^2+6x+1}{x}}\qquad\text{na segmentu }\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$$

Rješenje. Derivacija ove funkcije jest

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x+1}{x+6}}\left(x^2-1\right)}{x^2}$$

te je ona jednaka nuli za $x = -1$ i $x = 0$. No, niti je funkcija definirana u $x = 0$ niti je točka $x = 0$ u segmentu koji promatramo pa nam ona nije bitna. Tražimo globalne ekstreme ove funkcije tablično.

	-2		-1		$-\frac{1}{2}$
f'		$+$		$-$	
		$\nearrow$		$\searrow$	

Računanjem vrijednosti funkcije u točkama iz tablice slijedi da su točke $\left(-2, e^{\frac{7}{2}}\right)$ i $\left(-\frac{1}{2}, e^{\frac{7}{2}}\right)$ točke globalnog minimuma, dok je točka $\left(-1, e^4\right)$ točka globalnog maksimuma.

(b)

$$f(x) = \ln\frac{x^2+1}{x^2+3x+1} \qquad \text{na segmentu } \left[\frac{1}{2}, 5\right]$$

Rješenje. Derivacija ove funkcije jest

$$f'(x) = \frac{3\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3x+1\right)}$$

te je ona jednaka nuli za $x = -1$ i $x = 1$. No, točka $x = -1$ nije u segmentu koji promatramo pa nam ona nije bitna. Tražimo globalne ekstreme ove funkcije tablično.

	$\frac{1}{2}$		1		5
f'		$-$		$+$	
		$\searrow$		$\nearrow$	

Računanjem vrijednosti funkcije u točkama iz tablice slijedi da je točka $\left(1, -\ln\frac{5}{2}\right)$ točka globalnog minimuma, dok je točka $\left(5, -\ln\frac{41}{26}\right)$ točka globalnog maksimuma.

Zadatak 1.125. Rastavite broj 1 na dva nenegativna pribrojnika tako da im zbroj korijena bude najveći.

Rješenje. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^+$. Tada je $x + y = 1$, tj. $y = 1 - x$. Želimo maksimizirati funkciju

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$$

Derivacija ove funkcije jest

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$

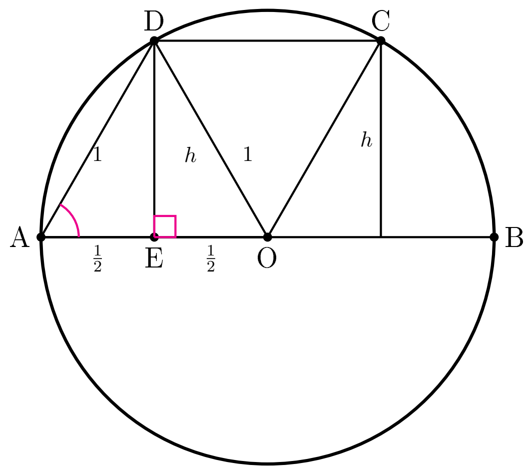
te jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = \frac{1}{2}$. Tada je i $y = \frac{1}{2}$.

	0		$\frac{1}{2}$		1
f'		$+$		$-$	
		$\nearrow$		$\searrow$	

Iz tablice predznaka vidimo da je točka $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ doista maksimum ove funkcije.

Zadatak 1.126. U polukružnicu polumjera 1 upisan je trapez čija osnovica je polumjer polukružnice. Odredite kut uz osnovicu trapeza tako da površina trapeza bude najveća.

Rješenje. Nacrtajmo skicu.



Očito je $DE \perp AB$ i $CF \perp AB$, pa vrijedi

$$EO = OF = \sqrt{1 - h^2}$$

te
$$CD = EF = 2\sqrt{1-h^2}.$$
Površina je jednaka
$$P = \frac{AB + CD}{2} \cdot h = \frac{2 + 2\sqrt{1-h^2}}{2} \cdot h = h + h\sqrt{1-h^2}.$$
Dakle, treba maksimizirati funkciju $f(x) = x + x\sqrt{1-x^2}$ na $[0,1]$. Vrijedi
$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + 1,$$
te je $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ili $x = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Prvo rješenje očito zanemarujemo. Ispitivanjem ponašanja funkcije imamo da je maksimum u točki $x = \sqrt{\frac{3}{4}}$ i da je jednak $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tada je $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ te je $EO = AE = \frac{1}{2} = 2AD$. Tada traženi kut nalazimo iz
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}.$$

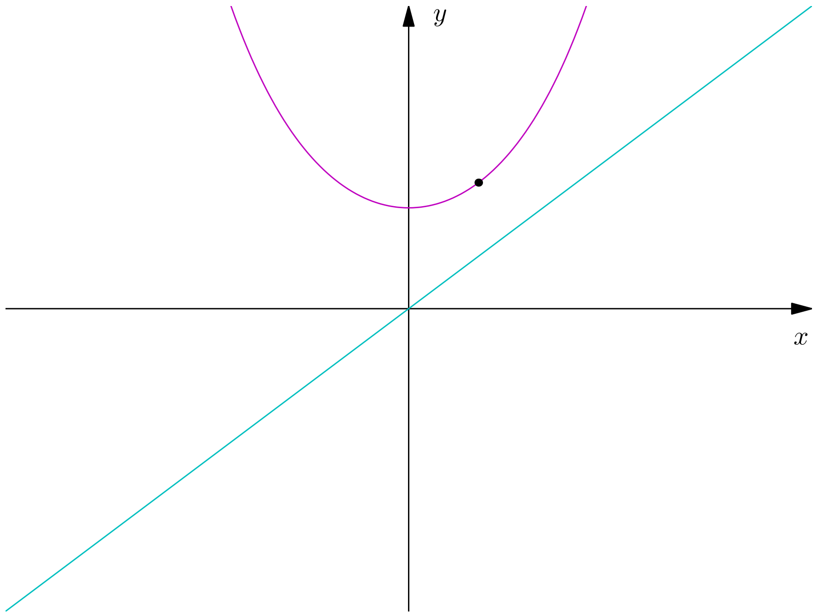
Zadatak 1.127. Na krivulji $y = \operatorname{ch} x$ nađite točku najbližu pravcu $y = \frac{3}{4}x$.

Rješenje 1. Želimo minimizirati funkciju koja modelira udaljenost dviju točki: na krivulji i pravcu. Neka je $(x_0, \operatorname{ch} x_0)$ točka na krivulji y. Tada je $f(x)$ dana s
$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{(x-x_0)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \operatorname{ch} x_0\right)^2} \\
&= \sqrt{x^2 - 2x_0x + x_0^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{2}\operatorname{ch} x_0 x + \operatorname{ch}^2 x_0} \\
&= \sqrt{\frac{25}{16}x^2 - \left(2x_0 + \frac{3}{2}\operatorname{ch} x_0\right)x + x_0^2 + \operatorname{ch}^2 x_0}
\end{aligned}$$
Derivacija ove funkcije jest
$$f'(x) = \frac{25x - 12\operatorname{ch} x_0 - 16x_0}{4\sqrt{16x_0^2 - 32x_0x - 24x\operatorname{ch} x_0 + 8\operatorname{ch} 2x_0 + 25x^2 + 8}}$$
pri čemu je $f'(x) = 0$ za $x = \frac{16}{25}x_0 + \frac{12}{25}\operatorname{ch} x_0$. Uvrštavanjem dobivenog $x-$a u početnu jednadžbu dobivamo
$$f(x_0) = \frac{3}{5}x_0 - \frac{4}{5}\operatorname{ch} x_0$$
iz koje deriviranjem dobivamo
$$f'(x_0) = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\operatorname{sh} x_0.$$

Sada rješavanjem $f'(x_0) = 0$ dobivamo $e^{x_0} = 2 \iff x_0 = \ln 2$. Dakle, tražena točka je

$$(x_0, \operatorname{ch} x_0) = (\ln 2, \operatorname{ch} \ln 2).$$

Rješenje 2. Neka je tražena točka na krivulji oblika $(x_0, \operatorname{ch} x_0)$. Kako je točka koju tražimo udaljenost do navedenog pravca, znamo da će se najmanja udaljenost postići kada ta točka leži na paralelnom pravcu pravca iz zadatka.



Sveli smo naš problem na nalaženje oblika tangente u točki $(x_0, \operatorname{ch} x_0)$ te izjednačavanja koeficijenta smjera te tangente s koeficijentom smjera danog pravca. Za $f(x) = \operatorname{ch} x$ vrijedi $f'(x) = \operatorname{sh} x$, pa je tangenta oblika

$$y = \operatorname{sh} x_0 x - x_0 \operatorname{sh} x_0 + \operatorname{ch} x_0$$

iz čega sad zaključujemo da, da udaljenost bude najmanja, mora vrijediti $\operatorname{sh} x_0 = \frac{3}{4} \iff x_0 = \operatorname{Arsh} \frac{3}{4} = \ln 2$. Dakle, točka na krivulji $y = \operatorname{ch} x$ najmanje udaljena od pravca $y = \frac{3}{4}$ jest $(\ln 2, \operatorname{ch} \ln 2)$.

Zadatak 1.128. U zemlji MathLand davno je uveden koordinatni sustav. Na obali rijeke $y = 0$ nalazi se grad $A = (-2, 0)$, a dalje od obale je grad $C = (0, 1)$. Odredite na kojem mjestu treba izgraditi pristanište $B = (b, 0), -2 \leqslant b \leqslant 0$ da bi transport od A do C preko B bio najjeftiniji. Pritom je još poznati da je cijena transporta kopnom dva puta veća nego cijena transporta rijekom.

Rješenje. Vrijedi

$$f(x) = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| = b + 2 + 2\sqrt{b^2 + 1}.$$

Derivacija ove funkcije jest

$$f'(x) = 1 + \frac{2b}{\sqrt{b^2+1}}$$

pri čemu je vrijedi

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \sqrt{b^2+1} + 2b &= 0 \\ b^2 + 1 &= 4b^2 \\ b &= \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Iz činjenice da nas u zadatku traži $b < 0$ vrijedi $b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zadatak 1.129. Odredite broj realnih rješenja jednadžbe $\left(x^2 - 3\right)e^x = a$ u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Definiramo funkciju $f(x) = \left(x^2 - 3\right)e^x - a$. Sad smo u slučaju traženja nultočaka funkcije u ovisnosti o a. Deriviramo funkciju f pa vrijedi

$$f'(x) = e^x\left(x^2 + 2x - 3\right)$$

pri čemu znamo da je $f'(x) = 0$ za $x = -3$ i $x = 1$. Za tablicu predznaka vrijedi

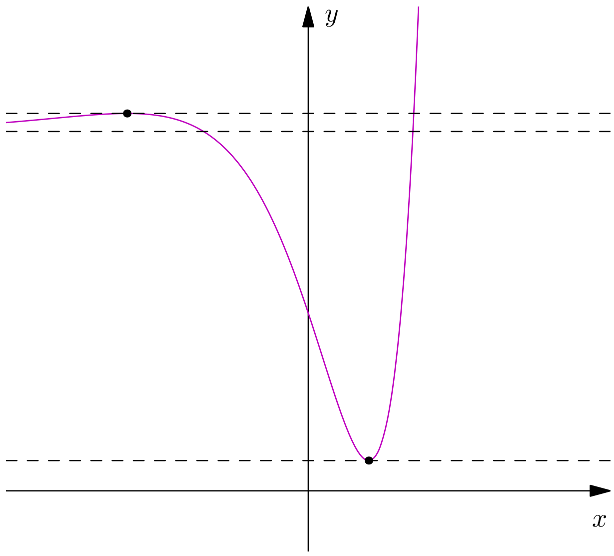
	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Dakle, funkcija ima maksimum u točki $\left(-3, \frac{6}{e^3} - a\right)$ i minimum u točki $(1, -2e - a)$. Također, direktnim računom dobijemo da je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -a$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

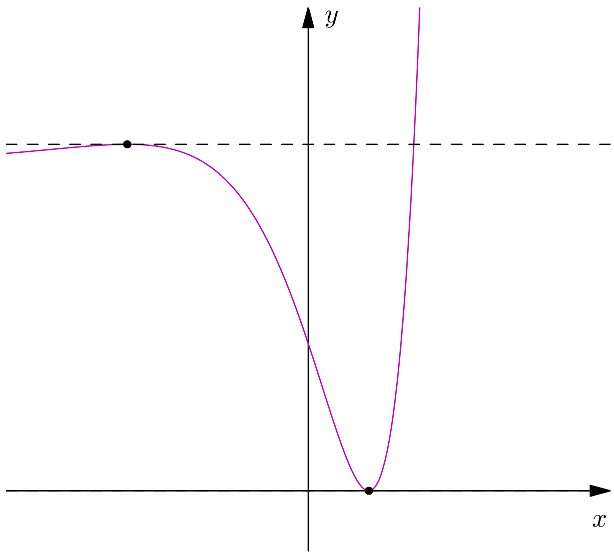
Ove tri vrijednosti na y osi su u odnosu $-2e - a < -a < \frac{6}{e^3} - a$. Zašto je ovo bitno? Zato što ćemo sada u ovisnosti o parametru a "ubacivati" $x-$os između ovih vrijednosti funkcije te gledati kako se ponaša broj nultočaka u ovisnosti o tome. Gledamo slučajeve.

- Za $-2e - a > 0$ imamo



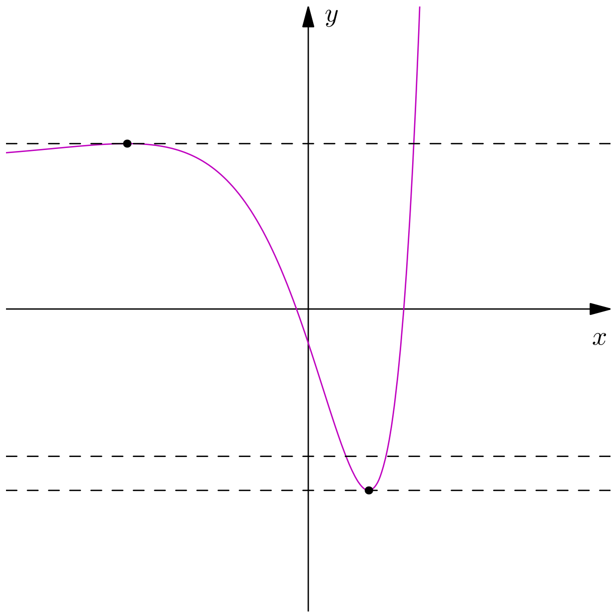
Za $a < -2e$ nema nultočaka.

- Za $-2e - a = 0$ imamo



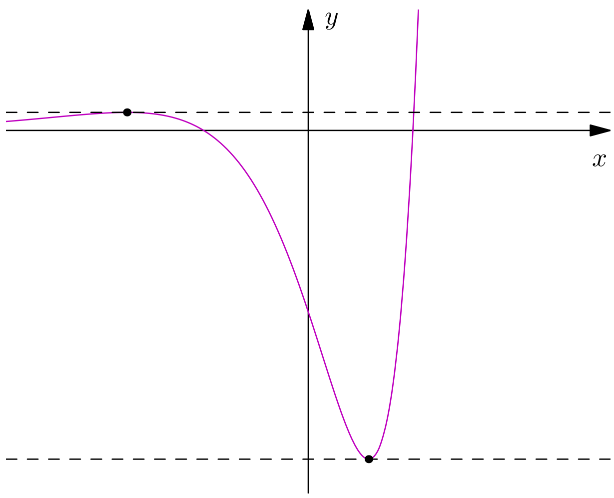
Za $a = -2e$ postoji jedna nultočka.

- Za $-2e - a < 0$ i $0 < -a$ imamo



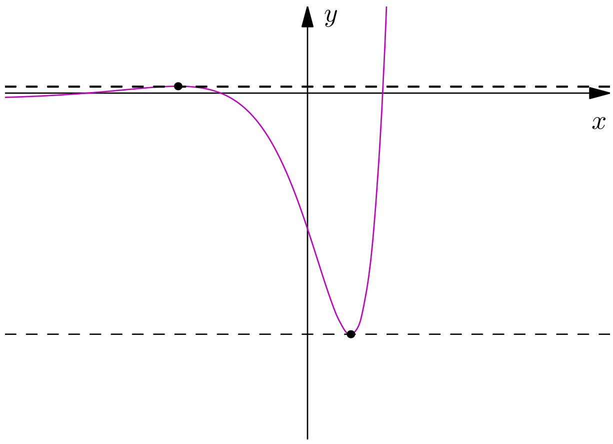
Za $a \in \langle -2e, 0 \rangle$ postoje dvije nultočke.

- Za $-a = 0$ imamo



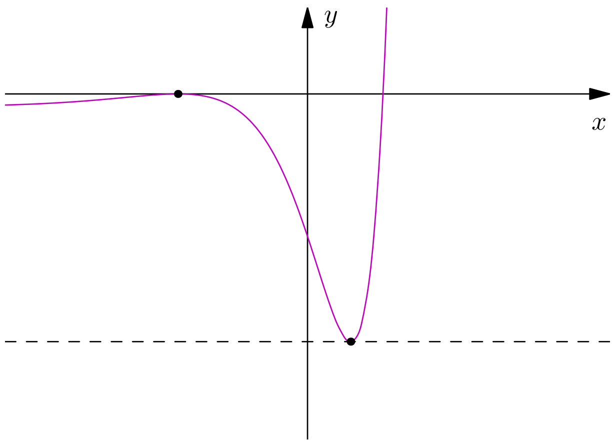
Za $a = 0$ postoji jedna nultočka.

- Za $-a < 0$ i $\frac{6}{e^3} - a > 0$ imamo



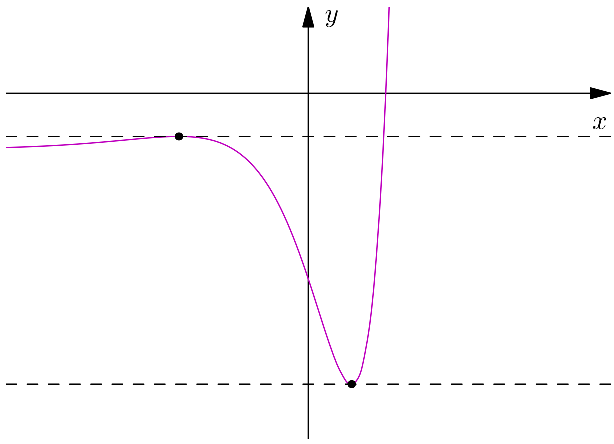
Za $a \in \left\langle 0, \frac{6}{e^3} \right\rangle$ postoje tri nultočke.

- Za $\frac{6}{e^3} - a = 0$ imamo



Za $a = \frac{6}{e^3}$ postoje dvije nultočke.

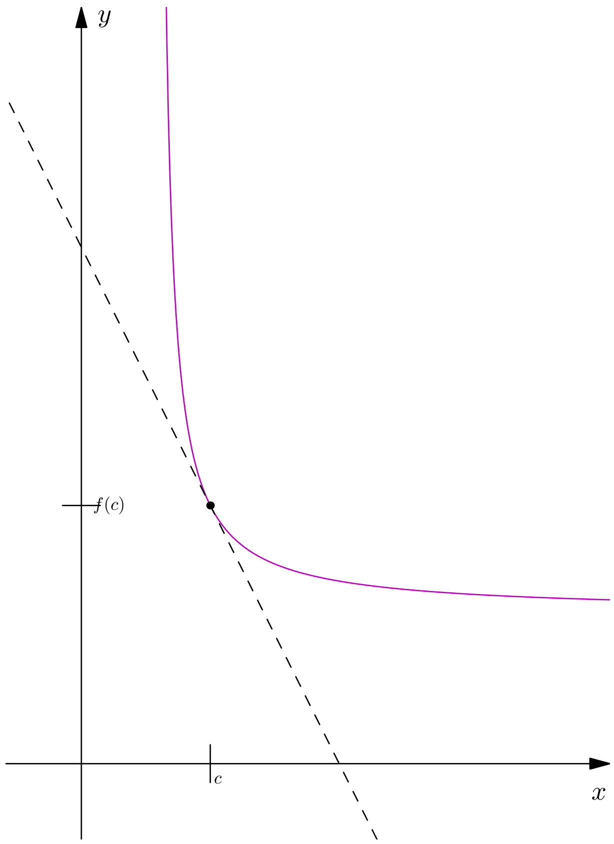
- Za $\frac{6}{e^3} - a < 0$ imamo



Za $a > \frac{6}{e^3}$ postoji jedna nultočka.

Zadatak 1.130. Na krivulju $y = \frac{2x-1}{x-1}, x > 1$ povucite tangentu takvu da površina pravokutnog trokuta omeđenog tom tangentom i koordinatnim osima bude minimalna. Kolika je najmanja vrijednost te površine?

Rješenje. Skicirajmo situaciju da lakše bude riješiti zadatak.



Očito se f može zapisati kao $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$. Vrijedi

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Tangenta u nekoj točki $c > 1$ je pravac $g(x) = f'(x)(x-c) + f(c)$, tj.

$$g(x) = -\frac{1}{(c-1)^2}(x-c) + 2 + \frac{1}{c-1}.$$

Neka je točka $A = (x_A, 0)$ točka presjeka tangente i x osi, a točka $B = (0, y_A)$ točka presjeka tangente i y osi. Vrijedi

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(c-1)^2}(x_A - C) + 2 + \frac{1}{c-1} &= 0 \\ x_A - c &= (c-1)^2 \left(2 + \frac{1}{c-1}\right) \\ x_A &= 2c^2 - 2c + 1 \end{aligned}$$

Analogno u točki B vrijedi

$$\begin{aligned} y_B &= -\frac{1}{(c-1)^2}(0-c) + 2 + \frac{1}{c-1} \\ y_B &= \frac{2c^2 - 2c + 1}{(c-1)^2} \end{aligned}$$

Površina trokuta ΔOAB, gdje je $O = (0,0)$ ishodište koordinatnog sustava iznosti

$$\frac{1}{2} x_A y_B = \frac{1}{2}\left(2c^2 - 2c + 1\right)\left(\frac{2c^2 - 2c + 1}{(c-1)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2c^2 - 2c + 1}{c-1}\right)^2.$$

Zadatak minimiziranja površine sada se svodi na minimiziranje funkcije $h(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2-2x+1}{x-1}\right)^2$ na $\langle 1, +\infty\rangle$. Vrijedi

$$h'(x) = \frac{\left(2x^2 - 2x + 1\right)\left(2x^2 - 4x + 1\right)}{(x-1)^3}$$

Vidimo da je $h'(x) = 0 \iff x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ispitivanjem [tabličnim] ponašanja derivacije dobivamo da je točka $c = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ globalni minimum pa je iznos površine za taj minimalni c jednak

$$h\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 = 6 + 4\sqrt{2}.$$

Zadatak 1.131. U elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ upišite pravokutnik najveće površine.

Rješenje. Konačna površina bit će jednaka $P = 4P_1$, gdje je P_1 površina dijela pravokutnika u prvom kvadrantu. Jer se nalazimo u prvom kvadrantu, možemo jednadžbu elipse pisati kao

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Pošto je dio pravokutnika koji se nalazi u prvom kvadrantu također pravokutnik, njegovu površinu računamo standardno.

$$P_1 = xy = x\left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) = bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Mi zapravo želimo maksimizirati funkciju definiranu s

$$f(x) = bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Vrijedi

$$f'(x) = \frac{b\left(a^2 - 2x^2\right)}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

te je $f'(x) = 0 \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. [Odbacujemo negativno rješenje jer smo u prvom kvadrantu.] Tada je $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}b$. Dakle, konačna je površina jednaka

$$P = 4P_1 = 4\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}ab = 2ab.$$

Zadatak 1.132. Tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ siječe koordinatne osi u točkama A i B. Pokažite da je

$$|AB| \geqslant a + b.$$

Rješenje. Parametriziranjem dane elipse dobivamo da je točka T na elipsi dana s $T = (a\cos t, b\sin t)$. Također, možemo danu elipsu zapisati kao

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Implicitnim deriviranjem dobijemo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}.$$

U točki T vrijedi

$$\frac{dy}{dx}(T) = -\frac{b}{a}\frac{\cos t}{\sin t},$$

pa je tangenta dana s

$$y = \left(-\frac{b}{a}\frac{\cos t}{\sin t}\right)(x - a\cos t) + b\sin t.$$

Označimo točku A kao sjecište tangente i osi y, a točku B kao sjecište tangente i osi x. Za točku $A = (0, y_A)$ vrijedi

$$y_A = b\frac{\cos^2 t}{\sin t} + b\sin t = \frac{b}{\sin t},$$

a za točku $B = (x_B, 0)$ vrijedi

$$x_B = \frac{a}{\cos t}.$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
|AB| &\geqslant a + b \\
\frac{a^2}{\cos^2 t} + \frac{b^2}{\sin^2 t} &\geqslant (a+b)^2 \\
a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t &\geqslant \left(a^2 + 2ab + b^2\right)\cos^2 t\sin^2 t \\
a^2\sin^2 t\left(1 - \cos^2 t\right) + b^2\cos^2 t\left(1 - \sin^2 t\right) &\geqslant 2ab\cos^2 t\sin^2 t \\
a^2\sin^4 t + b^2\cos^4 t - 2ab\cos^2 t\sin^2 t &\geqslant 0 \\
\left(a\sin^2 t - b\cos^2 t\right)^2 &\geqslant 0,
\end{aligned}$$

što zasigurno vrijedi jer je kvadrat u pitanju.

Zadatak 1.133. U kuglu radijusa 10 cm upišite stožac maksimalnog volumena.

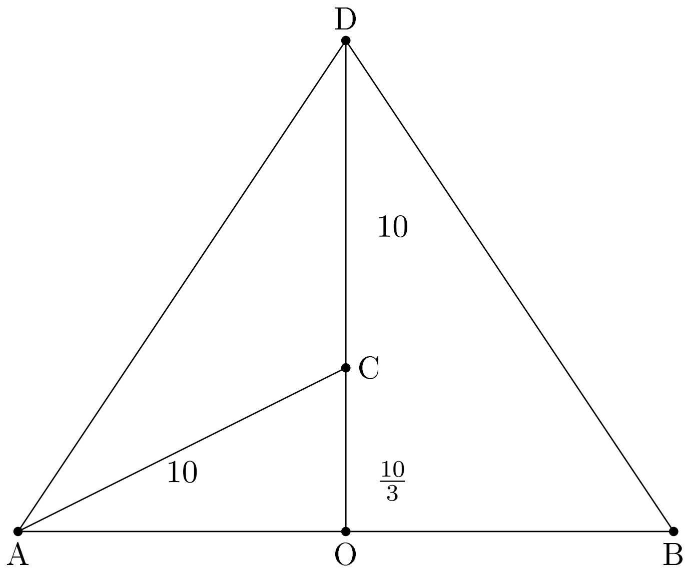
Rješenje. Neka je AB promjer kruga stošca te C vrh stošca. Označimo $OS = h$. Vrijedi $AS = \sqrt{r^2 - h^2}$ po Pitagorinom poučku, te vrijedi da je volumen stošca jednak

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi\,(\text{radijus})^2\,(\text{visina}) \\
&= \frac{1}{3}\pi AS^2 CS \\
&= \frac{1}{3}\pi\left(r^2 - h^2\right)(r + h)
\end{aligned}$$

Dakle, treba maksimizirati $f(x) = \left(r^2 - x^2\right)(r + x)$ na $[-r, r]$. Naravno, uzimamo $r = 10$. Vrijedi

$$f'(x) = -(3x - r)(x + r)$$

te je očito $f'(x) = 0 \iff x = -r, \frac{r}{3}$. Maksimum funkcije f na $[-r, r]$ je u točki $x = \frac{r}{3} \implies$ za $r = 10$ to je stožac visine $10 + \frac{10}{3}$ cm. Skica prije rotacije izgleda ovako:



Zadatak 1.134. Odredite $a \in \mathbb{R}$ takav da minimum funkcije $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a$ na segmentu $[0, 2]$ bude 1.

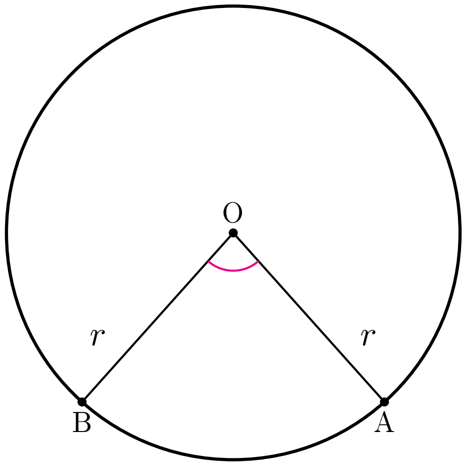
Rješenje. Derivacija ove funkcije jest $f'(x) = 8x + 4a$ te je stacionarna točka $x = -\frac{1}{2}a$. Dakle, to je jedini kandidat za ekstrem ove funkcije. Želimo da on bude jednak 1, pa imamo

$$f\left(-\frac{1}{2}a\right) = -2a = 1$$

iz čega zaključujemo da mora vrijediti $a = -\frac{1}{2}$. Uvjerite se da je to zaista minimum ove funkcije na segmentu $[0, 2]$.

Zadatak 1.135. Iz kruga je izrezan kružni isječak sa središnjim kutem α. Odredite kut α tako da volumen stošca, čiji se plašt dobije savijanjem izrezanog dijela bude najveći.

Rješenje. Crtamo skicu.



Neka je r radijus, α mjera kuta u radijanima, ρ radijus baze stošca koji dobijemo, a h visina stošca. Tražimo ρ i h. Vrijedi da je opseg baze stošca jednak duljini luka AB kad se zarola pa vrijedi

$$2\rho\pi = (2r\pi) \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \implies \rho = \frac{r\alpha}{2\pi}.$$

Iz Pitagorinog teorema imamo $h = r\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$. Volumen stošca je $\frac{\pi\rho^2 h}{3}$, pa treba maksimizirati izraz $\rho^2 h$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \rho^2 h &= \frac{r^2\alpha^2}{4\pi^2} \cdot r\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}} \\ &= \underbrace{\frac{r^3}{4\pi^2}}_{const.} \cdot \alpha^2\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}} \end{aligned}$$

Zapravo treba maksimizirati dio izraza koji je ovisan o kutu α, tj. funkciju $f(\alpha) = \alpha^2\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$ za $\alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Vrijedi

$$f'(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}} \left(2\left(1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right) - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right).$$

Jedina nultočka ove funkcije na $\langle 0, 2\pi\rangle$ je $\frac{\alpha}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ te ispitivanjem ponašanja ove funkcije preko tablica predznaka dobivamo da se globalni maksimum postiže za kut $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Zadatak 1.136. U kocku duljine stranice a upišite valjak maksimalnog volumena, tako da mu prostorna dijagonala kocke prolazi središtem.

Rješenje. Stožac je radijusa baze $\frac{a}{2}$, pa je volumen $\frac{a^3\pi}{4}$. Središte valjka i kocke se ovdje podudaraju pa prostorna dijagonala kocke uistinu prolazi središtem valjka.

Zadatak 1.137.

(a) Pokažite da za $x > 0$ vrijedi

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0, \qquad 0 < \alpha < 1$$
$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geqslant 0, \qquad \alpha < 0 \text{ ili } \alpha > 1$$

Rješenje. Definirajmo $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$. Tada je

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\left(x^{\alpha-1} - 1\right)$$

te je $f'(x) = 0 \iff x = 1$. Također vrijedi $f(1) = 0$. Treba provjeriti ponašanje f' prije i nakon $x = 1$.

- Za $0 < x < 1$ je $x^{\alpha-1} < 1 \implies x^{\alpha-1} - 1 < 0$, pa je

$$f'(x) = \underbrace{\alpha}_{>0}\left(\underbrace{x^{\alpha-1} - 1}_{<0}\right) < 0$$

  te je f' padajuća.
- Za $x > 1$ je $x^{\alpha-1} > 1 \implies f'(x) > 0$ te je f' rastuća.

Dakle, točka $(1, 0)$ je globalni minimum ove funkcije pa za svaki $x > 0$ imamo

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geqslant 0.$$

Analogno drugi slučaj.

(b) Koristeći prošli podzadatak dokažite Youngove nejednakosti: za $a, b > 0$ i $p, q \neq 0, 1$, te $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1$ vrijedi

$$\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \qquad p > 1$$
$$\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \geqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \qquad p < 1$$

Rješenje. Neka su a, b, p, q brojevi kao u uvjetu zadatka. Definirajmo $T = \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} - \frac{a}{p} - \frac{b}{p}$. Tada je

$$\begin{aligned} T &= a^{\frac{1}{p}} b^{1-\frac{1}{p}} - \frac{a}{p} - \frac{b}{q} \\ &= b\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{a}{p}b\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= b\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}\right) - 1 + \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

Definirajmo $x := \frac{a}{b}, \alpha := \frac{1}{p}$. Tada je $T = b\left(x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1\right)$ te zbog $b > 0$ vrijedi

$$T \geqslant 0 \iff x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \geqslant 0.$$

Uočimo da zbog $a, b > 0$ vrijedi $x = \frac{a}{b} > 0$ te $\alpha = \frac{1}{p}$ za $p \neq 0, 1$ znači $\alpha \notin \{0, 1\}$. Dakle, možemo primijeniti *a* dio zadatka.

$$\begin{aligned}
\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} &\iff T \leqslant 0 \\
&\iff x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0 \\
&\iff 0 < \alpha < 1 \\
&\iff 0 < \frac{1}{p} < 1 \\
&\iff p > 1
\end{aligned}$$

Drugi slučaj analogno.

1.8 Asimptote. Konveksnost i konkavnost. Infleksija

Zadatak 1.146. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Pokažite da je $-f$ konkavna funkcija.

Rješenje. Po definiciji konveksnosti za funkciju f slijedi

$$(\forall x_1, x_2 \in I)\,(\forall \lambda \in [0,1])\,(f\,((1-\lambda)\,x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)\,f\,(x_1) + \lambda f\,(x_2))\,.$$

Ako gornju nejednakost podijelimo s -1 dobivamo

$$(\forall x_1, x_2 \in I)\,(\forall \lambda \in [0,1])\,(-f\,((1-\lambda)\,x_1 + \lambda x_2) \geqslant -\,(1-\lambda)\,f\,(x_1) - \lambda f\,(x_2))$$

odnosno

$$(\forall x_1, x_2 \in I)\,(\forall \lambda \in [0,1])\,(-f\,((1-\lambda)\,x_1 + \lambda x_2) \geqslant (1-\lambda)\,(-f)\,(x_1) + \lambda\,(-f)\,(x_2))\,.$$

Dakle, $-f$ je konkavna.

Zadatak 1.147. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije za funkcije.

(a)

$$f\,(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$$

Rješenje. Druga derivacija ove funkcije je

$$f''\,(x) = \frac{6x^2\left(x^3 + 2\right)}{\left(x^3 - 1\right)^3}$$

te vrijedi $f''\,(x) = 0$ za $x = 0$ i $x = -\sqrt[3]{2}$.

	$-\infty$ do $-\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{2}$ do 0	0 do 1	1 do $+\infty$
f''	$+$	$-$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Funkcija je konveksna na $\left\langle -\infty, -\sqrt[3]{2}\right\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, a konkavna na $\left\langle -\sqrt[3]{2}, 0\right\rangle$ i $\langle 0, 1\rangle$, pa su točke $\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ i $x = 1$ točke infleksije.

(b)

$$f(x) = e^{-2x^2+x+1}$$

Rješenje. Druga derivacija ove funkcije je

$$f''(x) = e^{-2x^2+x+1}\left(16x^2 - 8x - 3\right)$$

te vrijedi $f''(x) = 0$ za $x = -\frac{1}{4}$ i $x = \frac{3}{4}$.

	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$	
	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

Funkcija je konveksna na $\left\langle -\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{3}{4}, +\infty\right\rangle$, a konkavna na $\left\langle -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\rangle$ pa su točke $\left(-\frac{1}{4}, e^{\frac{5}{8}}\right)$ i $\left(\frac{3}{4}, e^{\frac{5}{8}}\right)$ točke infleksije.

Zadatak 1.148. Dokažite da na grafu funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ postoje tri točke infleksije i da sve leže na jednom pravcu. Odredite jednadžbu toga pravca.

Rješenje. Druga derivacija ove funkcije je

$$f''(x) = -\frac{2\left(x^3 + 3x^2 - 3x - 1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

te očito vrijedi $f''(x) = 0 \iff x \in \left\{1, -2 \pm \sqrt{3}\right\}$. Vrijedi

$$f(1) = 1$$
$$f\left(-2-\sqrt{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$
$$f\left(-2+\sqrt{3}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

te, ako provučemo pravac kroz prvu i treću točku, dobivamo $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. Uvrštavanjem se pokaže da i druga točka pripada tome istome pravcu.

Zadatak 1.149. Dokažite nejednakosti.

(a)

$$\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \cdots + \operatorname{tg} 44^\circ \geqslant 44\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Rješenje. Uvijek nam je lakše raditi s radijanima pa zapišimo ovu nejednakost koristeći radijane. Znamo da je α stupnjeva jednakost $\frac{\alpha\pi}{180}$ radijana pa imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{180} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{180} + \cdots + \operatorname{tg}\frac{44\pi}{180} \geqslant 44\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Definirajmo funkciju $f : \left[\frac{\pi}{180}, \frac{44\pi}{180}\right]$ pravilom pridruživanja $f(x) = \operatorname{tg} x$. Vrijedi $f''(x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$ te je $f''(x) > 0$ na domeni ove funkcije. Dakle, ona je konveksna pa vrijedi

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\frac{\pi}{180} + \frac{2\pi}{180} + \cdots + \frac{44\pi}{180}}{44}\right) &\leqslant \frac{f\left(\frac{\pi}{180}\right) + f\left(\frac{2\pi}{180}\right) + \cdots + f\left(\frac{44\pi}{180}\right)}{44} \\
\operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{180} + \frac{2\pi}{180} + \cdots + \frac{44\pi}{180}}{44}\right) &\leqslant \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{180}\right) + \cdots + \operatorname{tg}\left(\frac{44\pi}{180}\right)}{44} \\
\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} &\leqslant \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{180}\right) + \cdots + \operatorname{tg}\left(\frac{44\pi}{180}\right)}{44} \\
44\left(\sqrt{2}-1\right) &\leqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{180}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{180}\right) + \cdots + \operatorname{tg}\left(\frac{44\pi}{180}\right)
\end{aligned}$$

iz čega slijedi tvrdnja.

(b)

$$\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \cdots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{44}$$

Rješenje. Znamo da je α stupnjeva jednakost $\frac{\alpha\pi}{180}$ radijana pa imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{180} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{180} \cdot \cdots \cdot \operatorname{tg}\frac{44\pi}{180} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^{44}.$$

Produkt ćemo kraće označavati velikom pi notacijom. Logaritmiramo li obje strane jednakosti, dobivamo

$$\begin{aligned}
\ln\left(\prod_{i=1}^{44} \operatorname{tg}\frac{i\cdot\pi}{180}\right) &\leqslant \ln\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^{44}\right) \\
\sum_{i=1}^{44} \ln\operatorname{tg}\frac{i\cdot\pi}{180} &\leqslant 44\ln\left(\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}$$

Definirajmo funkciju $f : \left[\frac{\pi}{180}, \frac{44\pi}{180}\right]$ pravilom pridruživanja $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$. Vrijedi $f''(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$ te je $f''(x) < 0$ na domeni ove funkcije. Dakle, ona je konkavna pa vrijedi

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\sum_{i=1}^{44} \frac{i\cdot\pi}{180}}{44}\right) &\geqslant \frac{\sum_{i=1}^{44} f\left(\frac{i\cdot\pi}{180}\right)}{44} \\
\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\sum_{i=1}^{44} \frac{i\cdot\pi}{180}}{44}\right) &\geqslant \frac{\sum_{i=1}^{44} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{i\cdot\pi}{180}\right)}{44} \\
\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} &\geqslant \frac{\sum_{i=1}^{44} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{i\cdot\pi}{180}\right)}{44} \\
44 \ln\left(\sqrt{2}-1\right) &\geqslant \sum_{i=1}^{44} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{i\cdot\pi}{180}\right) \\
\ln\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^{44}\right) &\geqslant \ln\left(\prod_{i=1}^{44} \operatorname{tg} \frac{i\cdot\pi}{180}\right) \\
\left(\sqrt{2}-1\right)^{44} &\geqslant \prod_{i=1}^{44} \operatorname{tg} \frac{i\cdot\pi}{180}
\end{aligned}
$$

što smo i htjeli dokazati. Uočimo za kraj da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{44} \frac{i\cdot\pi}{180} = \frac{\pi}{180\cdot 2\cdot 44} \sum_{i=1}^{44} i = \frac{\pi\cdot 44\cdot 45}{180\cdot 44} = \frac{\pi}{8}.$$

1.9 Ispitivanje toka

Ispitivanje toka svake funkcije koja nas zanima u zadatku obavit ćemo točnim postupkom navedenim u dijelu skripte.

Zadatak 1.157. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

Rješenje.

1. **DOMENA FUNKCIJE**
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

2. **PARNOST**
$$f(-x) = -\frac{2x^3}{x^2 - 4} = -f(x)$$
pa je funkcija neparna.

3. **INTERVALI MONOTONOSTI I EKSTREMI**
$$f'(x) = \frac{2x^4 - 24x^2}{(x^2 - 4)^2}, \qquad f'(x) = 0 \iff x = 0, x = \pm 2\sqrt{3}$$

	$-\infty$ to $-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$ to -2	-2 to 0	0 to 2	2 to $2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$ to $+\infty$
f'	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Lokalni maksimum je $\left(-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3}\right)$, a lokalni minimum je $\left(2\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right)$.

4. **TOČKE INFLEKSIJE**
$$f''(x) = \frac{16x\left(x^2 + 12\right)}{(x^2 - 4)^3}, \qquad f''(x) = 0 \iff x = 0$$

	$-\infty$ to -2	-2 to 0	0 to 2	2 to $+\infty$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

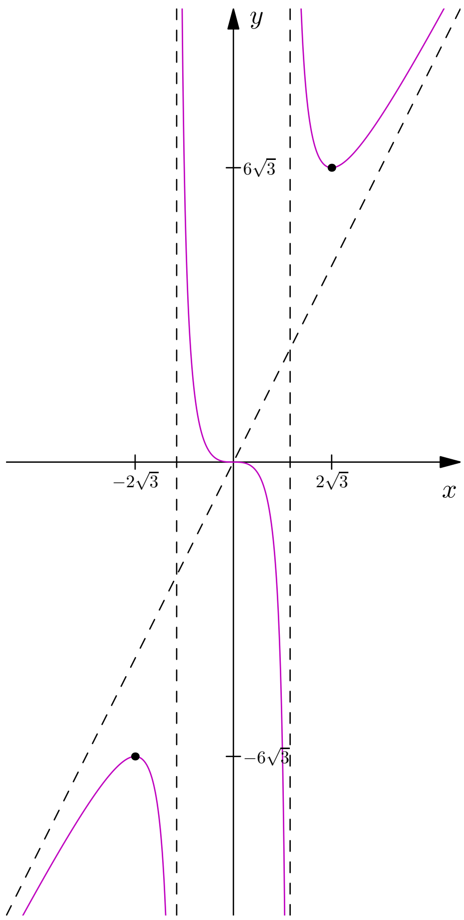
Točka $(0,0)$ je točka infleksije.

5. **ASIMPTOTE**

Vrijedi

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x)=0$$
$$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=+\infty$$

pa je $y=2x$ kosa, a $x=-2$ i $x=2$ vertikalne asimptote ove funkcije.



Zadatak 1.158. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \left(x^2 + 2\right) e^{-x^2}.$$

Rješenje.

1. **DOMENA FUNKCIJE**

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

2. **PARNOST**

Nije niti parna niti neparna.

3. **INTERVALI MONOTONOSTI I EKSTREMI**

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}\left(x^2 + 1\right), \qquad f'(x) = 0 \iff x = 0$$

	$-\infty$ do 0	0 do $+\infty$
f'	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

Lokalni maksimum je $(0, 2)$.

4. **TOČKE INFLEKSIJE**

$$f''(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^4 - x^2 - 1\right), \qquad f''(x) = 0 \iff x = -1, 1$$

	$-\infty$ do -1	-1 do 1	1 do $+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

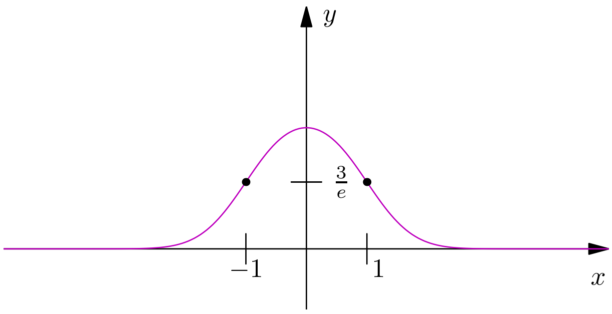
Točke $\left(-1, \frac{3}{e}\right)$ i $\left(1, \frac{3}{e}\right)$ su točke infleksije.

5. **ASIMPTOTE**

Vrijedi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

pa je $y = 0$ horizontalna asimptota ove funkcije.



Zadatak 1.159. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$$

Rješenje.

1. **DOMENA FUNKCIJE**

$$\mathcal{D}_f = \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{e^{-1}\}$$

2. **PARNOST**

Funkcija nije niti parna niti neparna.

3. **INTERVALI MONOTONOSTI I EKSTREMI**

$$f'(x) = -\frac{2}{x(1 + \ln x)^2}, \qquad f'(x) = 0 \text{ nema rješenja}$$

	0 – e^{-1}	e^{-1} – $+\infty$
f'	$-$	$-$
	↘	↘

Funkcija nema lokalnih ekstrema.

4. **TOČKE INFLEKSIJE**

$$f''(x) = \frac{2(\ln x + 3)}{x^2(1 + \ln x)^3}, \qquad f''(x) = 0 \iff x = e^{-3}$$

	0 – e^{-3}	e^{-3} – e^{-1}	e^{-1} – $+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

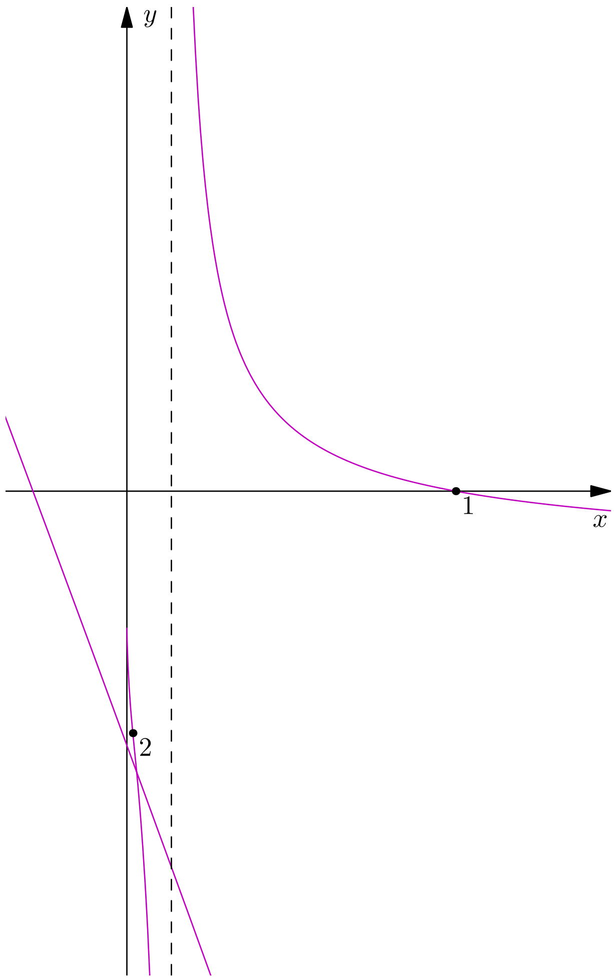
Točka $\left(e^{-3}, -2\right)$ je točka infleksije.

5. **ASIMPTOTE**

Vrijedi

$$\lim_{x \to e^{-1}-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to e^{-1}+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

pa je $y = -1$ horizontalna, a $x = e^{-1}$ vertikalna asimptota.



Zadatak 1.160. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}.$$

Rješenje.

1. **DOMENA FUNKCIJE**

$$\mathcal{D}_f = [-8, 8]$$

2. **PARNOST**

$$f(-x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x} = -\left(\sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}\right) = -f(x)$$

pa je funkcija neparna.

3. **INTERVALI MONOTONOSTI I EKSTREMI**

$$f'(x) = \frac{\sqrt{8-x}+\sqrt{8+x}}{2\sqrt{64-x^2}}, \qquad f'(x) = 0 \text{ nema rješenja}$$

	-8		8	
f'		$+$		
		$\nearrow$		

Funkcija nema lokalnih ekstrema.

4. **TOČKE INFLEKSIJE**

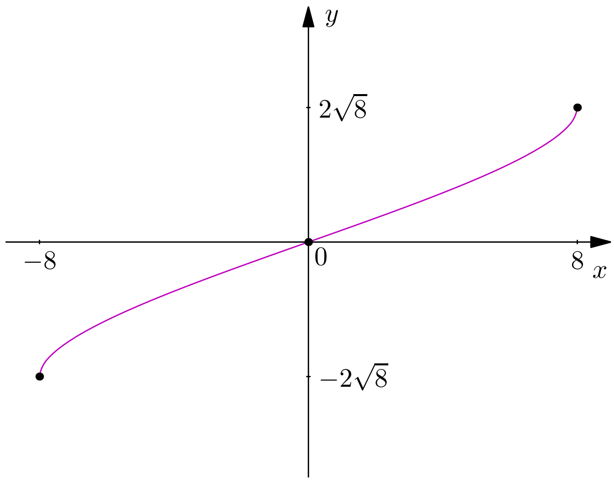
$$f''(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(8-x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(8+x)^{\frac{3}{2}}}\right), \qquad f''(x) = 0 \iff x = 0$$

	-8		0		8	
f''		$-$		$+$		
		$\cap$		$\cup$		

Točka $(0,0)$ je točka infleksije.

5. **ASIMPTOTE**

Funkcija nema asimptota.



Zadatak 1.161. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\ln x.$$

Rješenje.

1. **DOMENA FUNKCIJE**

$$\mathcal{D}_f=\langle 0,+\infty\rangle$$

2. **PARNOST**

   Funkcija nije niti parna niti neparna.

3. **INTERVALI MONOTONOSTI I EKSTREMI**

$$f'\left(x\right)=\frac{x^2+1}{x},\qquad f'\left(x\right)=0 \text{ nema rješenja}$$

	0		+∞
f'		+	
		↗	

   Funkcija nema lokalnih ekstrema.

4. **TOČKE INFLEKSIJE**

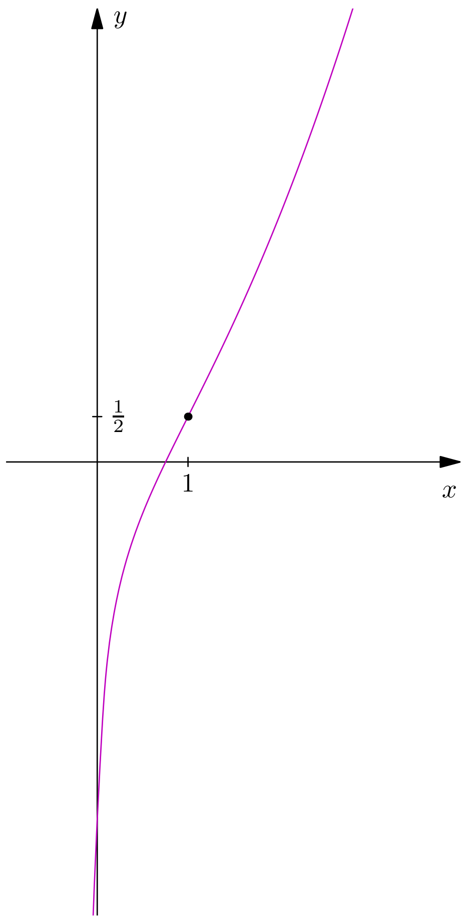
$$f''\left(x\right)=\frac{x^2-1}{x^2},\qquad f''\left(x\right)=0 \iff x=\pm 1$$

	0		1		$+\infty$
f''		$-$		$+$	
		$\cap$		$\cup$	

Točka $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ je točka infleksije.

5. **ASIMPTOTE**

Funkcija nema asimptota.



Zadatak 1.162. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f\left(x\right)=x^{\frac{1}{x}}.$$

Rješenje. Ispitivanje toka ove funkcije nećemo napraviti standardnim postupkom iz razloga što nalaženje stacionarnih točaka nije jednostavno i moraju se primijeniti numeričke metode. No, znamo reći neke stvari o ovoj funkciji. Domena ove funkcije jest $\langle 0,+\infty\rangle$ te funkcija nije niti parna niti neparna. Derivacija ove funkcije jest

$$f'\left(x\right)=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$

te vidimo da je $f'\left(x\right)=0 \iff 1-\ln x=0 \iff x=e$. Ispitujemo prvu derivaciju tablicom predznaka.

	0		e		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
		$\nearrow$		$\searrow$	

Dakle, točka $(e,\sqrt[e]{e})$ je lokalni maksimum ove funkcije. Ispitajmo kako se funkcija ponaša u okolini točke 0. Imamo

$$\lim_{x\to 0+}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}}.$$

Za $x<1$ vrijedi $\frac{1}{x}>1$ pa je

$$\left|\ln x\right|<\left|\frac{\ln x}{x}\right|.$$

Kako $\left|\ln x\right|\to+\infty$ kad $x\to 0+$, tada i $\left|\frac{\ln x}{x}\right|\to+\infty$ kad $x\to 0+$. Micanjem apsolutnih zagrada vidimo da izraz ide u $-\infty$ jer je prirodni logaritam negativan na $\langle 0,1\rangle$. Dakle,

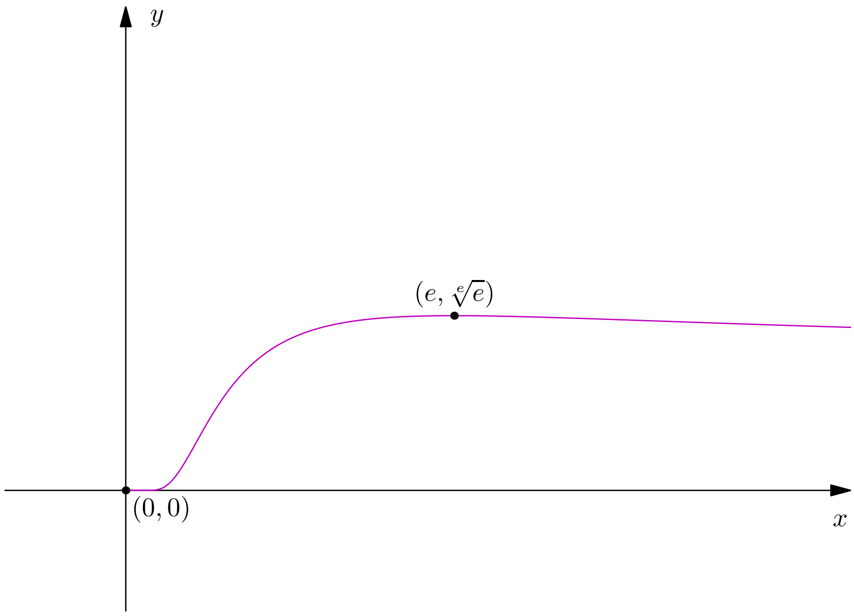
$$\lim_{x\to 0+}x^{\frac{1}{x}}=0.$$

Preostaje ispitati ponašanje funkcije kad $x\to+\infty$. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}.$$

Limes u eksponentu se lako L'Hôspitalovim pravilom dobije da je jednak 0, pa je konačni limes

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1.$$



Zadatak 1.163. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}.$$

Rješenje.

1. **DOMENA FUNKCIJE**

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$$

2. **PARNOST**

$$f(-x) = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = f(x)$$

pa je funkcija parna.

3. **INTERVALI MONOTONOSTI I EKSTREMI**

$$f'(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}} \right) x \ln 2, \qquad f'(x) = 0 \iff x = 0$$

	$-\infty$, -1	-1, 1	1, $+\infty$
f'	$+$		$-$
	$\nearrow$		$\searrow$

Funkcija nema lokalnih ekstrema.

4. **TOČKE INFLEKSIJE**

$$f''(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \left(\frac{x^2 \left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}\right)^2 \ln^2 2}{(x^2-1)(x^2+1)} + \frac{\ln 2}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\ln 2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$f''(x) = 0 \text{ nema rješenja}$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f''	$+$		$+$	
	$\cup$		$\cup$	

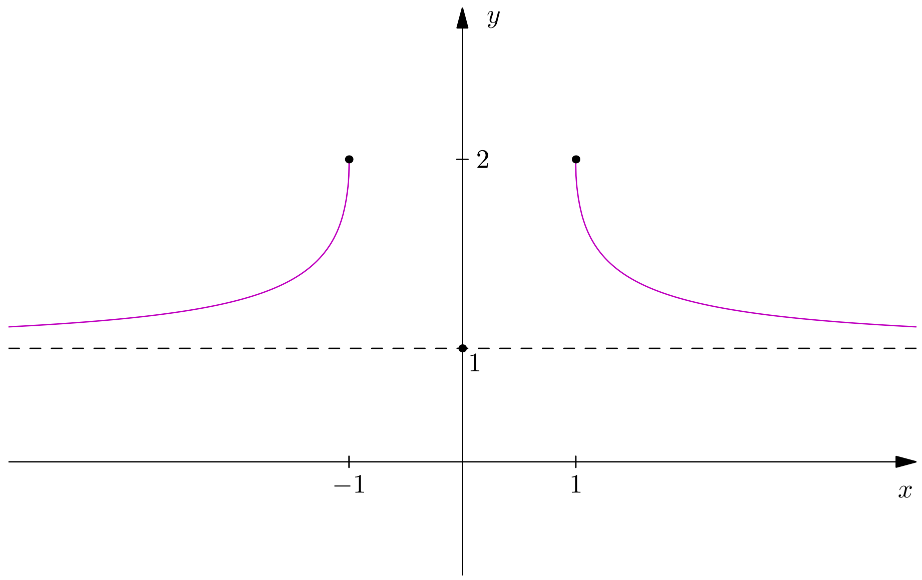
Funkcija nema točaka infleksije.

5. **ASIMPTOTE**

Vrijedi

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = 2^{\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 2^{\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

pa je $y = 1$ horizontalna asimptota ove funkcije.



Zadatak 1.164. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = x + \sin x.$$

Rješenje.

1. **DOMENA FUNKCIJE**

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

2. **PARNOST**

$$f(-x) = -x + \sin(-x) = -x - \sin x = -(x + \sin x) = -f(x)$$

pa je funkcija neparna.

3. **INTERVALI MONOTONOSTI I EKSTREMI**

$$f'(x) = 1 + \cos x, \qquad f'(x) = 0 \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}$$

	$-\infty$		$\cdots$		-2π		$-\pi$		0		π		$\cdots$		$+\infty$
f'						$+$		$+$		$+$					
						$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$					

Funkcija nema lokalnih ekstrema.

4. **TOČKE INFLEKSIJE**

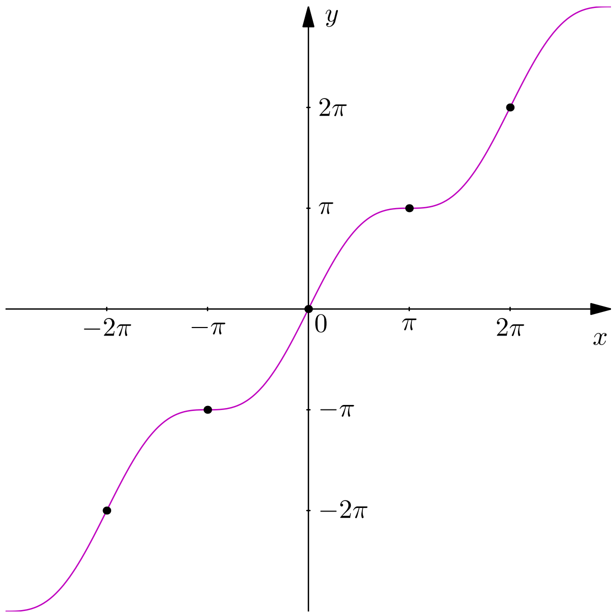
$$f''(x) = -\sin x, \qquad f''(x) = 0 \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}$$

	$-\infty$		$\cdots$		-2π		$-\pi$		0		π		$\cdots$		$+\infty$
f'						$-$		$+$		$-$					
						$\cap$		$\cup$		$\cap$					

Točke $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}$ su točke infleksije.

5. **ASIMPTOTE**

Funkcija nema asimptota.



Zadatak 1.165. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f\left(x\right) = x \sin x.$$

Rješenje. Ispitivanje toka ove funkcije nećemo napraviti standardnim postupkom iz razloga što nalaženje stacionarnih točaka nije jednostavno i moraju se primijeniti numeričke metode. No, znamo reći neke stvari o ovoj funkciji. Domena ove funkcije je $\mathbb{R}$ te vrijedi

$$f\left(-x\right) = -x \sin\left(-x\right) = -x\left(-\sin x\right) = x \sin x = f\left(x\right)$$

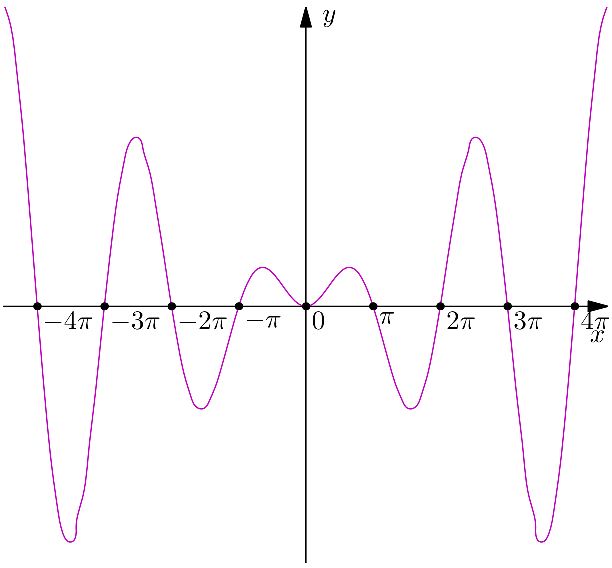
što nam govori da je funkcija parna. Također, ova funkcija nije ništa drugo nego sinusoida čija amplituda raste. Vrijedi

$$\lim_{x \to 0} f\left(x\right) = 0.$$

Također, vidimo da je ta funkcija "usendvičena" između pravaca $y = \pm x$:

$$|\sin x| \leqslant 1$$
$$|x \sin x| \leqslant |x|$$

Nultočke ove funkcije su u svim nultočkama funkcije $\sin x$.



Zadatak 1.166. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

$$f(x) = x - \ln\left(\left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2\right).$$

Rješenje.

1. **DOMENA FUNKCIJE**

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

2. **PARNOST**

   Funkcija nije niti parna niti neparna.

3. **INTERVALI MONOTONOSTI I EKSTREMI**

$$f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6}, \qquad f'(x) = 0 \iff x \in \{1, 4\}$$

	0	1	2	3	4	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

   Funkcija ima lokalni maksimum u točki $(1, 1 - \ln 4)$ te lokalni minimum u točki $(4, 4 + \ln 4)$.

4. **TOČKE INFLEKSIJE**

$$f''(x) = \frac{2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}, \qquad f''(x) = 0 \iff x = \frac{5}{2}$$

	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 2, \frac{5}{2}\rangle$	$\langle \frac{5}{2}, 3\rangle$	$\langle 3, +\infty\rangle$
f'	$-$	$-$	$+$	$+$
	$\cap$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

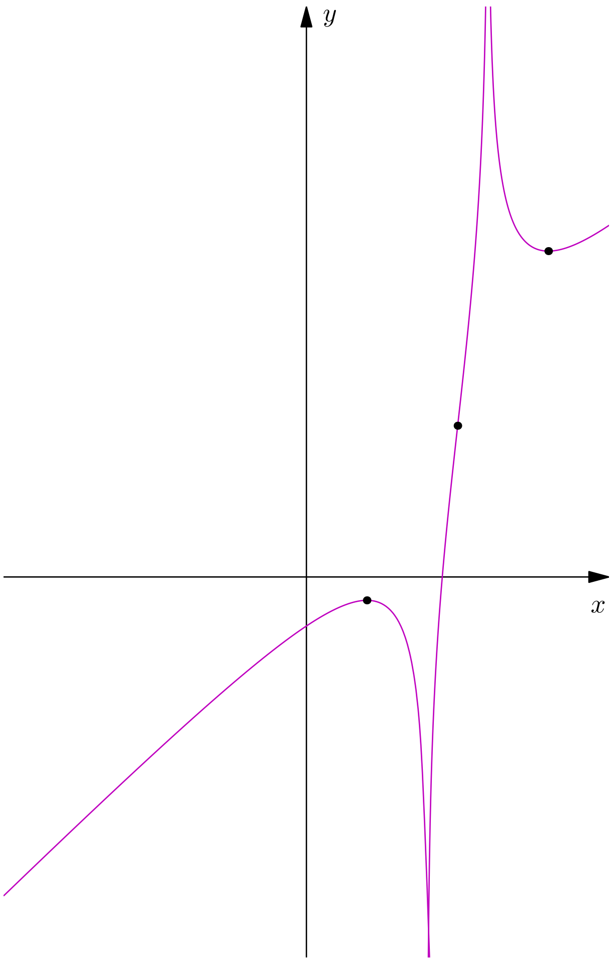
Točka $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ je točka infleksije ove funkcije.

5. **ASIMPTOTE**

Vrijedi

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$$

pa je $y = x$ kosa, a $x = 2$ i $x = 3$ vertikalne asimptote.


y
x

2 Integrali

2.1 Neodređeni i određeni integral

Zadatak 2.5. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \frac{x^2+2}{x^2+1}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{x^2+2}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = x + \operatorname{arctg} x + C$$

(b)

$$\int \left(2^x+5^x\right)^2 dx$$

Rješenje.

$$\int \left(2^x+5^x\right)^2 dx = \int \left(2^x+5^x\right)\left(2^x+5^x\right) dx = \int \left(2^{2x} + 2\cdot 2^x 5^x + 5^{2x}\right) dx$$

$$= \int 4^x dx + \int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2\cdot\frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C$$

(c)

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}dx$$

Rješenje.

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}dx = \int \sqrt{1-2\sin x\cos x}dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}dx$$

$$= \int \left(\sqrt{\sin x - \cos x}\right)^2 dx = \int \sin x dx - \int \cos x dx = -\sin x - \cos x + C$$

(d)

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}$$

Rješenje. Koristimo univerzalnu supstituciju $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{t+1}+C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}+C$$

Zadatak 2.6. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int_0^8 \left(1+\sqrt{2}x+\sqrt[3]{x}\right) dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_0^8 \left(1+\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right) dx = \int_0^8 dx + \sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}} dx + \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= x\Big|_0^8 + \sqrt{2}\cdot\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Big|_0^8 + \left(\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right)\Big|_0^8 = \frac{7}{4}+\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(b)

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int_1^4 x^{-2} dx + \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$= \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^4 + \left(\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right)\Big|_1^4 = \frac{7}{4}$$

(c)

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Rješenje. [Skica]

Uočimo da je ovo tablični integral.

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{2}$$

(d)

$$\int_{0}^{100} \lfloor x \rfloor x dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_{0}^{100} \lfloor x \rfloor x dx = \int_{0}^{1} \lfloor x \rfloor x dx + \int_{1}^{2} \lfloor x \rfloor x dx + \cdots + \int_{99}^{100} \lfloor x \rfloor x dx = \sum_{i=1}^{99} i \int_{i}^{i+1} x dx$$

$$\sum_{i=1}^{99} i \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{i}^{i+1} = \sum_{i=1}^{99} i \left(\frac{(i+1)^2}{2} - \frac{i^2}{2} \right) = \sum_{i=1}^{99} i \left(\frac{1+2i}{2} \right) = \sum_{i=1}^{99} i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{99} i$$

$$= \frac{99\,(99+1)\,(2 \cdot 99 + 1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{99\,(99+1)}{2} = 330825$$

Zadatak 2.7. Izračunajte limese.

(a)

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2} \right)$$

Rješenje. Uočimo da je S_n zapravo

$$S_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} = \frac{n}{n^2} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(1+\frac{n}{n}\right)^2} \right).$$

Dakle, S_n je integralna suma funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane formulom $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ s obzirom na $n-$tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1$$

i međutočke $\xi_{n,i} = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$. f je neprekidna na $[0,1]$ pa je i Riemann integrabilna na $[0,1]$. Dakle, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{n}{(2n)^2} \right) = \lim_{n \to +\infty} S_n = \int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

Rješenje. Definirajmo $S_n=\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$. Vrijedi

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{2}{n}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^\alpha\right).$$

Dakle, S_n je integralna suma funkcije $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definirane formulom $f(x)=x^\alpha$ s obzirom na $n-$tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$0=x_0<x_1=\frac{1}{n}<\cdots<x_n=\frac{n}{n}=1$$

i međutočke $\xi_{n,i}=\frac{i}{n}\in[x_{i-1},x_i]$. f je neprekidna na $[0,1]$ pa je i Riemann integrabilna na $[0,1]$. Dakle, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\lim_{n\to+\infty}S_n=\int\limits_0^1 x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}$$

Zadatak 2.8. Izračunajte limese.

(a)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$$

Rješenje. Definirajmo $S_n=\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right)$. Vrijedi

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{2n-1}{n}\right).$$

Dakle, S_n je integralna suma funkcije $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ definirane formulom $f(x)=x$ s obzirom na $2n-$tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,2]$

$$0=x_0<x_1=\frac{1}{n}<\cdots<s_{2n}=\frac{2n}{n}=2$$

i međutočke $\xi_{n,i}=\frac{i}{n}\in[x_{i-1},x_i]$. f je neprekidna na $[0,2]$ pa je i Riemann integrabilna na $[0,2]$. Dakle, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{2n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}S_n=\int\limits_0^2 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=2.$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n^2+n-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2+n\cdot n-n^2}}\right)$$

Rješenje. Definirajmo $S_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2n^2+n-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2+2n-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n^2+n\cdot n-n^2}}\right)$. Vrijedi

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\frac{2}{n}-\frac{2^2}{n^2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2+\frac{n}{n}-\frac{n^2}{n^2}}}\right).$$

Dakle, S_n je integralna suma funkcije $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definirane formulom $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2+(x-x^2)}}$ s obzirom na $n-$tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$0=x_0<x_1=\frac{1}{n}<\cdots<x_n=\frac{n}{n}=1$$

i međutočke $\xi_{n,i}=\frac{i}{n}\in[x_{i-1},x_i]$. f je neprekidna na $[0,1]$ pa je i Riemann integrabilna na $[0,1]$. Dakle, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2}}$$

$$=\begin{bmatrix}t=\frac{1}{2}-x & 0\mapsto\frac{1}{2}\\ dt=-dx & 1\mapsto-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\frac{9}{4}-t^2}}=\left(\arcsin\left(\frac{2}{3}t\right)\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=2\arcsin\frac{1}{3}$$

Zadatak 2.9. Izračunajte limese.

(a)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1^2}{n^2}}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{2^2}{n^2}}\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{n^2}{n^2}}}$$

Rješenje. Vrijede sljedeće jednakosti:

$$S_n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1^2}{n^2}}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{2^2}{n^2}}\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{n^2}{n^2}}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^3}}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{2^2}{n^3}}\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{n^2}{n^3}}$$

pa vidimo da je pametno logaritmirati S_n kako bismo pojednostavili izraz. Znamo da je logaritam neprekidna funkcija pa je logaritam limesa jednak limesu logaritma.

$$\begin{aligned}
\ln S_n &= \left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^3} + 2^2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2} + \cdots + n^2\frac{\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n^2}}\right) + \ln\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{2^2}{n^2}}\right) + \cdots + \ln\left(\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{n^2}{n^2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Dakle, $\ln S_n$ je integralna suma funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane formulom $f(x) = \ln\left((1+x)^{x^2}\right)$ s obzirom na $n-$tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1$$

i međutočke $\xi_{n,i} = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$. f je neprekidna na $[0,1]$ pa je i Riemann integrabilna na $[0,1]$. Dakle, $(\ln S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \ln S_n = \int_0^1 \ln\left((1+x)^{x^2}\right) dx = \int_0^1 x^2 \ln(1+x)\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln(1+x) & du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = x^2 dx & v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\ln(1+x)\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x}dx = \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3}\left(\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \int_0^1 dx\right)$$

$$= \frac{2\ln 2}{3} - \frac{5}{18}$$

Dakle, konačni limes jednak je $e^{\frac{2\ln 2}{3} - \frac{5}{18}}$.

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + 4kn + 5n^2}$$

Rješenje. Vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + 4kn + 5n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k^2 + 4kn + 5n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{k}{n}\right) + 5}$$

Dakle, S_n je integralna suma funkcije $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane formulom $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$ s obzirom na $n-$tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1$$

i međutočke $\xi_{n,i} = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$. f je neprekidna na $[0,1]$ pa je i Riemann integrabilna na $[0,1]$. Dakle, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+4kn+5n^2}=\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_0^1\frac{dx}{(x+2)^2+1}$$

$$=\begin{bmatrix} t=x+2 & 0\mapsto 2\\ dt=dx & 1\mapsto 3\end{bmatrix}=\int_2^3\frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t\Big|_2^3=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2.$$

Zadatak 2.10. Izračunajte

$$\int_0^1 e^x dx$$

koristeći integralne sume.

Rješenje. [Skica]

Izračunajmo limes

$$S_n=\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n}.$$

To je jednako

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}\right)\end{aligned}$$

Dakle, S_n je integralna suma funkcije $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definirane formulom $f(x)=e^x$ s obzirom na $n-$tu ekvidistantnu subdiviziju segmenta $[0,1]$

$$0=x_0<x_1=\frac{1}{n}<\cdots<x_n=\frac{n}{n}=1$$

i međutočke $\xi_{n,i} = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$. f je neprekidna na $[0,1]$ pa je i Riemann integrabilna na $[0,1]$. Dakle, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\left[x=e^{\frac{1}{n}}\right]=\frac{x+x^2+\cdots+x^n}{n}=\frac{x}{n}\left(1+x+\cdots+x^{n-1}\right)=\frac{x}{n}\cdot\frac{1-x^n}{1-x}$$

$$=\frac{x}{n}\cdot\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{\sqrt[n]{e}}{n}\cdot\frac{e-1}{\sqrt[n]{e}-1}=(e-1)\cdot\sqrt[n]{e}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

Znamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e} = 1$, pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = \begin{bmatrix} t = \frac{1}{n} \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1.$$

Konačno rješenje je dakle

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = (e-1) \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}}_{\to 1} = e - 1 = \int\limits_0^1 e^x dx.$$

2.2 Metoda supstitucije i metoda parcijalne integracije

Zadatak 2.18. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \left(3x^2-2x+1\right)\left(x^3-x^2+x-9\right)^7 dx$$

Rješenje.

$$\int \left(3x^2-2x+1\right)\left(x^3-x^2+x-9\right)^7 dx = \begin{bmatrix} t = x^3-x^2+x-9 \\ dt = \left(3x^2-2x+1\right)dx \end{bmatrix} = \int t^7 dt$$

$$= \frac{t^8}{8} + C = \frac{\left(x^3-x^2+x-9\right)^8}{8} + C$$

(b)

$$\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{e^x+1}{e^x+x}dx = \begin{bmatrix} t = e^x+x \\ dt = (e^x+1)\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x+x| + C$$

(c)

$$\int_e^{e^e} x^3 e^{x^4} dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_e^{e^e} x^3 e^{x^4} dx = \begin{bmatrix} t = e^{x^4} & e \mapsto e^{e^4} \\ dt = e^{x^4}4x^3dx & e^e \mapsto e^{e^{4e}} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int_{e^{e^4}}^{e^{e^{4e}}} \frac{dt}{t}\cdot t$$

$$= \frac{1}{4}\int_{e^{e^4}}^{e^{e^{4e}}} dt = \frac{1}{4}\cdot t\Big|_{e^{e^4}}^{e^{e^{4e}}} = \frac{1}{4}\left(e^{e^{4e}} - e^{e^4}\right)$$

(d)

$$\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int\limits_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx = \begin{bmatrix} t = x^2+9 & 0 \mapsto 9 \\ dt = 2xdx & 4 \mapsto 25 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int\limits_9^{25} \sqrt{t}dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_9^{25} = \frac{98}{3}$$

Zadatak 2.19. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^3} & v = \frac{-1}{2x^2} \end{bmatrix} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2x^2} = -\frac{1}{2x^2}\left(\frac{1}{2} + \ln x\right) + C$$

(b)

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{bmatrix} = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix}$$

$$= x \operatorname{tg} x + \int \frac{dt}{t} = x \operatorname{tg} x + \ln|t| + C = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$$

(c)

$$\int e^x \sin^2 x dx$$

Rješenje.

$$\int e^x \sin^2 x dx = \begin{bmatrix} u = \sin^2 x & du = \sin 2x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \sin^2 x - \underbrace{\int e^x \sin 2x dx}_{(\Delta)}$$

Riješimo integral koji smo označili s (Δ).

$$(\Delta) = \begin{bmatrix} u = \sin 2x & du = 2\cos 2x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = \cos 2x & du = -2\sin 2x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \sin 2x - 2\left(e^x \cos 2x + 2\underbrace{\int e^x \sin 2x dx}_{(\Delta)}\right)$$

Dobili smo linearnu jednadžbu s nepoznanicom (Δ) koju rješavamo.

$$\begin{aligned} (\Delta) &= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4(\Delta) \\ 5(\Delta) &= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x \\ (\Delta) &= \frac{e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x}{5} + C \end{aligned}$$

Sada je početni integral jednak

$$\int e^x \sin^2 x dx = e^x \sin^2 x - \frac{e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x}{5} + C$$

(d)

$$\int \frac{x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Rješenje. Označimo početni integral s (Δ).

$$(\Delta) = \begin{bmatrix} u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & du = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ dv = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx & v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{bmatrix} = \frac{x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & du = \frac{-x dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ dv = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx & v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{bmatrix} = \frac{x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - (\Delta) + C$$

Dobili smo linearnu jednadžbu s nepoznanicom (Δ) koju rješavamo.

$$\begin{aligned} (\Delta) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C \\ &= \frac{e^{\operatorname{arctg} x}(x-1)}{2\sqrt{1+x^2}} + C \end{aligned}$$

Zadatak 2.20. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = \begin{bmatrix} x = 2\sin t & 0 \mapsto 0 \\ dx = 2\cos t dt & 2 \mapsto \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)}2\cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\left(2\cos t\right)\left(2\cos t\right)dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1-\cos 4t\right)dt = 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos 4t dt\right)$$

$$= 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\left(\frac{\sin 4t}{t}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^6+2x^3+1}dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^6+2x^3+1}dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\left(x^3+1\right)^2}dx = \int_0^1 \frac{x^3+1}{\left(x^3+1\right)^2}dx - \int_0^1 \frac{dx}{\left(x^3+1\right)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} - \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x\right)\left(x^2-x+1\right)} - \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1}dx - \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1|\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\left(2x-1\right)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx - \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^2}$$

$$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{6} \underbrace{\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}_{(\Delta_1)} - \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^3)^2}}_{(\Delta_2)}$$

Integral (Δ_1) jednostavno se riješi supstitucijom

$$\begin{bmatrix} t = x - \frac{1}{2} & 0 \mapsto -\frac{1}{2} \\ dt = dx & 1 \mapsto \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

a integral (Δ_2) rastavom na parcijalne razlomke svedemo na lakši oblik. Početni integralna kraju je jednak

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^6+2x^3+1} dx = \frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \frac{x}{1+x^3} \Big|_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$$

$$= \frac{\ln 2}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \left(-\frac{\ln 2}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \right) = \frac{\ln 2}{9} + \frac{\sqrt{3}\pi}{27} - \frac{1}{6}$$

(c)

$$\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx = \begin{bmatrix} x = e^t & 1 \mapsto 0 \\ dx = e^t dt & e \mapsto 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \sin t dt = -\cos t \Big|_0^1 = 1 - \cos 1$$

(d)

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

Rješenje 1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \begin{bmatrix} x = 2t \\ dx = 2dt \end{bmatrix} = 2 \int \frac{dx}{\sin 2t} = \int \frac{dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos t} dt$$

$$= \int \frac{\cos t}{\sin t} dt + \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = \begin{bmatrix} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v = \sin t \\ dv = \cos t dt \end{bmatrix} = \int \frac{dv}{v} - \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln |v| - \ln |u| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

Rješenje 2. Koristimo univerzalnu supstituciju $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

(e)

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

Rješenje. Koristimo univerzalnu supstituciju $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left[t = \operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right] = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}\right| + C$$

Zadatak 2.21. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \sin 3x \sin 5x dx$$

Rješenje.

$$\int \sin 3x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C$$

(b)

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$$

Rješenje.

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \begin{bmatrix} x = e^t \\ dx = e^t dx \end{bmatrix} = \int \left(\frac{t}{e^t}\right)^2 e^t dt = \int \frac{t^2}{e^t} dt = \begin{bmatrix} u = t^2 & du = 2tdt \\ dv = \frac{dt}{e^t} & v = -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= -t^2 e^{-t} + \int e^{-t} 2t dt = \begin{bmatrix} u = 2t & du = 2dt \\ dv = e^{-t} dt & v = -e^{-t} \end{bmatrix} = -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} + 2\int e^{-t} dt$$

$$= -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + C = -\frac{\ln^2 x + 2\ln x + 2}{x} + C$$

(c)

$$\int \sin \ln x dx$$

Rješenje.

$$\int \sin \ln x dx = \begin{bmatrix} x = e^t \\ dx = e^t dt \end{bmatrix} = \underbrace{\int \sin t e^t dt}_{(\Delta)}$$

Riješimo integral koji smo označili s (Δ).

$$(\Delta) = \begin{bmatrix} u = \sin t & du = \cos t dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{bmatrix} = \sin t e^t - \int e^t \cos t dt = \begin{bmatrix} u = \cos t & du = -\sin t dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{bmatrix}$$

$$= \sin t e^t - e^t \cos t - (\Delta)$$

Dobili smo linearnu jednadžbu s nepoznanicom (Δ) koju rješavamo.

$$(\Delta) = \frac{e^t (\sin t - \cos t)}{2} + C$$

Sada je

$$\int \sin \ln x dx = \frac{e^{\ln x} (\sin \ln x - \cos \ln x)}{2} + C = \frac{x (\sin \ln x - \cos \ln x)}{2} + C$$

(d)

$$\int \left(x^4 + 3x\right) \cos x dx$$

Rješenje.

$$\int \left(x^4 + 3x\right) \cos x dx = \int x^4 \cos x + 3 \int x \cos x dx$$

Riješimo oba integrala s desna. Desni se integral vrlo lako riješi.

$$\int x \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{bmatrix} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Lijevi integral rješava se uzastopnom primjenom parcijalne integracije.

$$\int x^4 \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x^4 & du = 4x^3 dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{bmatrix} = x^4 \sin x - 4 \int x^3 \sin x dx$$

$$\int x^3 \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x^3 & du = 3x^2 dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^3 \cos x + 2 \int x^2 \cos x dx$$

$$\int x^2 \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{bmatrix} = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

$$\int x \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Konačni integral jednak je

$$\int \left(x^4 + 3x\right) \cos x dx = x^4 \sin x - 4 \left(-x^3 \cos x + 3 \left(x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \sin x\right)\right)\right) + 3 \left(x \sin x + \cos x\right) + C$$

odnosno nakon pojednostavljivanja je jednak

$$\left(4x^3 - 24x + 3\right) \cos x + \left(x^4 - 12x^2 + 3x + 24\right) \sin x + C.$$

Zadatak 2.22. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \arcsin^2 x dx$$

Rješenje.

$$\int \arcsin^2 x dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin^2 x & du = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \begin{bmatrix} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} = x\arcsin^2 x - 2\underbrace{\int t\sin t dt}_{(\Delta)}$$

Riješimo integral koji smo označili s (Δ).

$$(\Delta) = \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \sin t dt & v = -\cos t \end{bmatrix} = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + \sin t + C$$

Sada "povratnom supstitucijom" imamo

$$\int \arcsin^2 x dx = x\arcsin^2 x - 2t\cos t - 2\sin t + C = x\arcsin^2 x + 2\arcsin x\cos\arcsin x - 2x + C$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

(b)

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}dx$$

Rješenje.

$$\int x^2\sqrt{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} x = \operatorname{sh} t \\ dx = \operatorname{ch} t dt \end{bmatrix} = \int \operatorname{sh}^2 t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t dt = \int \operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch}^2 t dt$$

$$= \int \frac{\operatorname{sh}^2 2t}{4}dt = \frac{1}{4}\int \operatorname{sh}^2 2t dt = \frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{ch} 4t - 1}{2}dt = \frac{1}{8}\int (\operatorname{ch} 4t - 1)\, dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int \operatorname{ch} 4t dt - \int dt\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t\right) + C = \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{sh}(4\operatorname{Arsh} x)}{4} - \operatorname{Arsh} x\right) + C$$

$$= \frac{1}{8}\left(x\sqrt{1+x^2} + 2x^3\sqrt{1+x^2} - \operatorname{Arsh} x\right) + C$$

(c)

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$$

Rješenje.

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg}\sqrt{x} & du = \frac{dx}{\sqrt{x}(2x+2)} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{xdx}{\sqrt{x}\,(2x+2)}$$

$$= \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - t + \operatorname{arctg} t + C = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$$

(d)

$$\int x^2 \arccos x dx$$

Rješenje. Označimo početni integral s (Δ).

$$(\Delta) = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \arccos x dx & v = \int \arccos x dx \end{bmatrix}$$

Riješimo integral koji smo dobili za v u parcijalnoj integraciji.

$$\int \arccos x dx = \begin{bmatrix} u = \arccos x & du = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = x\arccos x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{bmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \end{bmatrix} = x\arccos x + \int \frac{dt}{-2\sqrt{t}} = x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Sad je početni integral jednak

$$(\Delta) = x^2\left(x\arccos x - \sqrt{1-x^2}\right) - 2\int x\left(x\arccos x - \sqrt{1-x^2}\right)dx$$

$$= x^2\left(x\arccos x - \sqrt{1-x^2}\right) - 2\int x^2\arccos x dx + 2\underbrace{\int x\sqrt{1-x^2}dx}_{(\Delta_1)}$$

Riješimo integral koji smo označili s (Δ_1).

$$(\Delta_1) = \begin{bmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \end{bmatrix} = \int \frac{\sqrt{u}du}{-2} = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Dakle, početni je integral jednak

$$(\Delta) = x^3\arccos x - x^2\sqrt{1-x^2} - 2\,(\Delta) - \frac{2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3\arccos x - x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right) + C$$

Zadatak 2.23. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{bmatrix} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} = \int \frac{t}{\sin^2 t} \left(1+\sin^2 t\right) dt = \underbrace{\int \frac{tdt}{\sin^2 t}}_{(\Delta_1)} + \underbrace{\int \frac{t\sin^2 t}{\sin^2 t} dt}_{(\Delta_2)}$$

Riješimo integrale koje smo označili s (Δ_1) i (Δ_2).

$$(\Delta_2) = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$$

$$(\Delta_1) = \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \frac{dt}{\sin^2 t} & v = -\operatorname{ctg} t \end{bmatrix} = -t \operatorname{ctg} t + \int \operatorname{ctg} t dt = -t \operatorname{ctg} t + \int \frac{\cos t}{\sin t} dt$$
$$= -t \operatorname{ctg} t + \ln|\sin t| + C = \ln x - \arcsin x \operatorname{ctg} \arcsin x + C$$

Sada je početni integral jednak

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \ln x - \arcsin x \operatorname{ctg} \arcsin x + \frac{\arcsin^2 x}{2} + C$$

(b)

$$\int_1^{16} \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1} dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_1^{16} \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1} dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1} & du = \frac{dx}{4x\sqrt{\sqrt{x}-1}} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix}$$

$$= x \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1} \Big|_1^{16} - \frac{1}{4} \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \begin{bmatrix} x = t^2 & 1 \mapsto 1 \\ dx = 2tdt & 16 \mapsto 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{tdt}{\sqrt{t-1}} = \begin{bmatrix} t = z^2+1 & 1 \mapsto 0 \\ dt = 2zdz & 4 \mapsto \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{16\pi}{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{z^3+z}{z} dz$$

$$= \frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

(c)

$$\int e^x \sin x \sin 3x dx$$

Rješenje.

$$\int e^x \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int e^x (\cos 2x - \cos 4x)\, dx = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\int e^x \cos 2x dx}_{(\Delta_1)} - \underbrace{\int e^x \cos 4x dx}_{(\Delta_2)} \right)$$

Riješimo integrale koje smo označili s (Δ_1) i (Δ_2).

$$(\Delta_1) = \begin{bmatrix} u = \cos 2x & du = -2 \sin 2x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = \sin 2x & du = 2 \cos 2x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \cos 2x + 2 \left(e^x \sin 2x - 2 (\Delta_1) \right)$$

Dakle, dobili smo linearnu jednadžbu gdje je traženi integral nepoznanica. Vrijedi

$$\begin{aligned} (\Delta_1) &= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4 (\Delta_1) \\ 5 (\Delta_1) &= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x \\ (\Delta_1) &= \frac{e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x}{5} + C \end{aligned}$$

Riješimo sad drugi integral.

$$(\Delta_2) = \begin{bmatrix} u = \cos 4x & du = -4 \sin 4x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \cos 4x - 4 \int e^x \sin 4x dx$$

$$= \begin{bmatrix} u = \sin 4x & du = 4 \cos 4x dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = e^x \cos 4x + 4 \left(e^x \sin 4x - 4 (\Delta_2) \right)$$

Ponovno imamo linearnu jednadžbu koju rješavamo za traženi integral. Vrijedi

$$\begin{aligned} (\Delta_2) &= e^x \cos 4x + 4e^x \sin 4x - 16 (\Delta_2) \\ 17 (\Delta_2) &= e^x \cos 4x + 4e^x \sin 4x \\ (\Delta_2) &= \frac{e^x \cos 4x + 4e^x \sin 4x}{17} + C \end{aligned}$$

Dakle, konačni je integral jednak

$$\int e^x \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x}{5} - \frac{e^x \cos 4x + 4e^x \sin 4x}{17} \right) + C$$

Zadatak 2.24. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \sqrt{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}}dx$$

Rješenje.

$$\int \sqrt{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}}dx = \int \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{2\sqrt{1+x^2}\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dt = dx \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{t}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}\cdot 2t}{t^2}dt = 2\int dt = 2t + C = 2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}} + C$$

(b)

$$\int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x}$$

Rješenje.

$$\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x} = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t\ln t} = \begin{bmatrix} u = \ln t \\ du = \frac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|\ln t| + C = \ln|\ln|\ln x|| + C$$

(c)

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$$

Rješenje. Označimo početni integral s (Δ).

$$(\Delta) = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg}\sqrt{x} & du = \frac{dx}{\sqrt{x}(2x+2)} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} & v = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} \end{bmatrix} = 2\operatorname{arctg}^2\sqrt{x} - (\Delta)$$

Iz ove jednadžbe s jednom nepoznanicom dobivamo

$$(\Delta) = \operatorname{arctg}^2\sqrt{x}.$$

(d)

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = \begin{bmatrix} t = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ dx = \frac{\left(1-x^2\right)dt}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1-x^2}\frac{\left(1-x^2\right)\cdot t}{2}dt = \frac{1}{2}\int tdt$$

$$= \frac{t^2}{4} + C = \frac{\ln^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{4} + C$$

(e)
$$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$$

Rješenje.

$$\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x} = \begin{bmatrix} x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t\left(\sqrt{t}+t\right)} = \begin{bmatrix} t = u^2 \\ dt = 2udu \end{bmatrix} = 2\int \frac{du}{u\left(u+u^2\right)}$$
$$= 2\left(\int \frac{du}{u^2} + \int \frac{du}{1+u} - \int \frac{du}{u}\right) = 2\left(-\frac{1}{u} + \ln|1+u| - \ln|u|\right) + C$$
$$= 2\left(-\frac{1}{\sqrt{t}} + \ln\left|1+\sqrt{t}\right| - \ln\left|\sqrt{t}\right|\right) + C = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{e^x}} + \ln\left|1+\sqrt{e^x}\right| - \ln\left|\sqrt{e^x}\right|\right) + C$$
$$= -2e^{-\frac{x}{2}} + \ln\left(\left(1+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2\right) + C$$

(f)
$$\int e^{x+\ln x}dx$$

Rješenje.

$$\int e^{x+\ln x}dx = \int e^x e^{\ln x}dx = \int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix}$$
$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x\left(x-1\right) + C$$

Zadatak 2.25. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokažite sljedeće jednakosti:

(a)
$$\int_a^b f\left(a+b-x\right)dx = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

Rješenje.

$$\int_a^b f\left(a+b-x\right)dx = \begin{bmatrix} t = a+b-x & a\mapsto b \\ dt = -dx & b\mapsto a \end{bmatrix} = \int_b^a -f\left(t\right)dt = \int_a^b f\left(x\right)dx$$

(b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos x\right)dx$$

Rješenje.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)dx = \begin{bmatrix} t = \frac{\pi}{2} - x & 0 \mapsto \frac{\pi}{2} \\ dt = -dx & \frac{\pi}{2} \mapsto 0 \end{bmatrix}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -f(\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

(c)

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

Rješenje. Po prvom podzadatku imamo da vrijedi

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin(\pi - x))\,dx = \int_0^{\pi} \pi f(\sin x)\,dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx$$

iz čega imamo da je

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

Zadatak 2.26. Izračunajte

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Rješenje. [Skica]

Označimo početni integral s I. Po *zadatku 2.25.* znamo da vrijedi

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx}_{I}$$

Dobili smo linearnu jednadžbu u ovisnosti o integralu.

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

Preostaje izračunati dobiveni integral. Vrijedi

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \begin{bmatrix} t=\cos x & 0\mapsto 1 \\ dt=-\sin x dx & \pi \mapsto -1 \end{bmatrix} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

Dakle, vrijednost početnog integrala je $\frac{\pi^2}{4}$.

Zadatak 2.27. Izračunajte

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\int\limits_1^t \left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}-\frac{\pi}{4}\right)dx}{\ln t}.$$

Rješenje. Dokažimo da i brojnik i nazivnik ovog razlomka divergiraju kad $t\to+\infty$. Očito, iz rasta funkcije $\ln t$, imamo da $\ln t\to+\infty$ kad $t\to+\infty$. Za brojnik koristimo granični kriterij. Definirajmo $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}-\frac{\pi}{4}$. Uočimo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{-(x^2+1)} = 1,$$

pa kako integral $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ divergira, divergira i $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Definirajmo s $F(t)$ primitivnu funkciju funkcije $f(x)$, tj.

$$F(t)=\int\limits_1^t f(x)\,dx.$$

To je funkcija sa svojstvom da je $F'(x)=f(x)$. Tada vrijedi

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{F(t)}{\ln t} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{\frac{1}{t}} = 1$$

pri čemu smo gornji limes izračunali već u zadatku.

Zadatak 2.28. Dokažite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_1^{x^2}\frac{e^t}{t}dt}{x^{-2}e^{x^2}} = 1.$$

Rješenje. Dokažimo da i brojnik i nazivnik ovog razlomka divergiraju kad $t\to+\infty$. Za nazivnik vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}2x}{2x} = +\infty.$$

Za brojnik definirajmo $f(t) = \frac{e^t}{t}$. Uočimo

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty,$$

pa kako integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ divergira, divergira i $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$. Definirajmo s $F(x)$ primitivnu funkciju funkcije $f(t)$, tj.

$$F(x) = \int\limits_1^x f(t)\,dt.$$

To je funkcija sa svojstvom da je $F'(x) = f(t)$. Tada vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x^2)}{x^{-2}e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x^2)\cdot 2x}{\frac{2e^{x^2}(x^2-1)}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1.$$

pri čemu smo gornji limes izračunali već u zadatku.

Zadatak 2.29. Odredite sve neprekidne funkcije $f : [a,b] \to [0,+\infty\rangle$ takve da je $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

Rješenje. Funkcija f je Riemann integrabilna na segmentu $[a,b]$ kao neprekidna funkcija. No, ona je integrabilna i na svakom segmentu $[a,x]$ za $a \leqslant x \leqslant b$. Stoga, možemo definirati

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

za koju vrijedi $F'(x) = f(x)$. Iz činjenice da je $f(x) \geqslant 0, \forall x$, zaključujemo da je $F'(x) \geqslant 0, \forall x$, pa je F rastuća funkcija. S druge strane, vrijedi

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)\,dt = 0$$
$$F(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt = 0$$

gdje jednakost za $F(b)$ slijedi iz pretpostavke zadatka. Dakle, $F(a) = F(b) = 0$, što uz rast od F implicira da mora vrijediti $F(x) = 0, \forall x$. Dakle, F je konstantna funkcija i time je $F'(x) \equiv 0, \forall x$, pa i $f(x) = 0$.

2.3 Integrali racionalnih funkcija

Zadatak 2.32. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \frac{xdx}{x^2+x+1}$$

Rješenje.

$$\int \frac{xdx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(b)

$$\int \frac{x^3dx}{x^2+2x+4}$$

Rješenje.

$$\int \frac{x^3dx}{x^2+2x+4} = \int (x-2)\,dx + \int \frac{8dx}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 8\int \frac{dx}{(x+1)^2+3}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(c)

$$\int \frac{dx}{x^4+4x^2+3}$$

Rješenje.

$$\int \frac{dx}{x^4+4x^2+3} = \int \frac{dx}{(x^2+3)(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

Zadatak 2.33. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} &= \int (x+4)\,dx + 7\int \frac{xdx}{x(x-1)} + \int \frac{dx}{x^2-x} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 7\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} \\ = \frac{1}{2}x^2 + 4x - \ln|x| + 8\ln|x-1| + C &= \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln\left|\frac{(x-1)^8}{x}\right| + C\end{aligned}$$

(b)

$$\int \frac{dx}{x^4-1}$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4-1} &= \int \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+1)} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\ = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C\end{aligned}$$

(c)

$$\int \frac{x^4dx}{(x+1)^3}$$

Rješenje. Rastavom na parcijalne razlomke imamo

$$\frac{x^4}{(x+1)^3} = x + \frac{6}{1+x} - \frac{4}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^3} - 3,$$

pa po linearnosti integrala vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4dx}{(x+1)^3} &= \int xdx + 6\int \frac{dx}{1+x} - 4\int \frac{dx}{(1+x)^2} + \int \frac{dx}{(1+x)^3} - 3\int dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 6\ln|1+x| + \frac{4}{1+x} - \frac{1}{2(1+x)^2} - 3x + C \\ &= 6\ln|1+x| + \frac{x(x+2)\left(x^2-6x-6\right)}{2(1+x)^2} + C\end{aligned}$$

Zadatak 2.34. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}$$

Rješenje. Označimo početni integral s (Δ).

$$\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3} = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^3} & v = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} \end{bmatrix} = -\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}\right)$$

Tražimo vrijednost zadnjeg integrala.

$$\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{xdx}{(1+x^2)^2} & v = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{bmatrix} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

Dakle, konačno rješenje početnog integrala jest

$$(\Delta) = -\frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{8(1+x^2)} + C$$

(b)

$$\int \frac{x^8-1}{x(x^8+1)}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{x^8-1}{x(x^8+1)}dx = \underbrace{\int \frac{x^7dx}{x^8+1}}_{(\Delta_1)} - \underbrace{\int \frac{dx}{x^9+x}}_{(\Delta_2)}$$

Računamo posebno gornja dva integrala.

$$(\Delta_1) = \frac{1}{8}\int \frac{8x^7dx}{x^8+1} = \begin{bmatrix} t = x^8+1 \\ dt = 8x^7dx \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{8}\ln|t| + C = \frac{1}{8}\ln\left|x^8+1\right| + C$$

$$(\Delta_2) = \frac{dx}{x^9\left(1+\frac{1}{x^8}\right)} = \begin{bmatrix} t = 1+\frac{1}{x^8} \\ dt = \frac{-8dx}{x^9} \end{bmatrix} = -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{8}\ln|t| + C = -\frac{1}{8}\ln\left|1+\frac{1}{x^8}\right| + C$$

Dakle, rješenje početnog integrala jest

$$\int \frac{x^8-1}{x(x^8+1)}dx = \frac{1}{8}\left(\ln\left|x^8+1\right| + \ln\left|1+\frac{1}{x^8}\right|\right) + C = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^{16}+2x^8+1}{x^8}\right| + C$$

(c)

$$\int \frac{1+x^4}{1+x^6}dx$$

Rješenje. Rastavom na parcijalne razlomke, dopunom do potpunog kvadrata te supstituiranjem imamo

$$\int \frac{1+x^4}{1+x^6}dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{1+x^2}{x^4-x^2+1}dx$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\left(\int \frac{dx}{2\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)} + \int \frac{dx}{2\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{6}\left(\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} + \int \frac{dx}{\left(\frac{2x-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{6}\left(2\int \frac{2dx}{\left(2x+\sqrt{3}\right)^2+1} + 2\int \frac{2dx}{\left(2x-\sqrt{3}\right)^2+1}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} t = 2x+\sqrt{3} \\ dt = 2dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u = 2x-\sqrt{3} \\ du = 2dx \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\left(\int \frac{dt}{1+t^2} + \int \frac{du}{1+u^2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} t^2 + \operatorname{arctg} u^2\right) + C = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}\left(2x+\sqrt{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(2x-\sqrt{3}\right)\right) + C$$

Zadatak 2.35. Izračunajte integrale.

(a) Autori nisu bili uspješni pri rješavanju ovog zadatka metodama kolegija MA2. Ako uspijete riješiti, molimo Vas da nam se javite s rješenjem na jedan od mailova navedenih u uvodu.

(b)

$$\int \frac{x^5+x^4-2}{x^4-4x^2+4}dx$$

Rješenje. Označimo početni integral s (Δ). Uočavamo da je stupanj polinoma u brojniku veći od stupnja polinoma u nazivniku, pa dijelimo ta dva polinoma.

$$\int \frac{x^5+x^4-2}{x^4-4x^2+4}dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{4x^3+4x^2-4x-6}{x^4-4x^2+4}dx$$

Drugi integral se lako rastavom na parcijalne razlomke svede na

$$\int \frac{4x^3+4x^2-4x-6}{x^4-4x^2+4}dx = \underbrace{\int \frac{4\,(x+1)}{x^2-2}dx}_{(\Delta_1)} + \underbrace{\int \frac{2\,(2x+1)}{\left(x^2-2\right)^2}dx}_{(\Delta_2)}$$

Posebno računamo $(\Delta_i)\,, i \in \{1,2\}$.

$$(\Delta_1) = 4\left(\int \frac{xdx}{x^2-2} + \int \frac{dx}{x^2-2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2-2} + \int \frac{dx}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x-\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x+\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\left(\ln\left|x^2-2\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|x-\sqrt{2}\right| - \ln\left|x+\sqrt{2}\right|\right)\right) + C$$

$$= 2\left(\ln\left|x^2-2\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|\right) + C = 2\ln\left|x^2-2\right| + \sqrt{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$(\Delta_2) = 2\int\frac{2xdx}{\left(x^2-2\right)^2} + 2\int\frac{dx}{\left(x^2-2\right)^2} = 2\int\frac{2xdx}{\left(x^2-2\right)^2} + 2\int\frac{dx}{\left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= 2\int\frac{2xdx}{\left(x^2-2\right)^2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{16}\int\frac{dx}{x+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{16}\int\frac{dx}{x-\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{\left(x+\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{\left(x-\sqrt{2}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{-2}{x^2-2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x+\sqrt{2}\right| - \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|x-\sqrt{2}\right| - \frac{1}{8\left(x+\sqrt{2}\right)} - \frac{1}{8\left(x-\sqrt{2}\right)}\right) + C$$

$$= \frac{-2}{x^2-2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right| - \frac{2x}{4\left(x^2-2\right)} = \frac{x+4}{4-2x^2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right| + C$$

Dakle, konačno rješenje jest

$$(\Delta) = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln\left|x^2-2\right| + \sqrt{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + \frac{x+4}{4-2x^2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{x^4+2x^3-2x^2-5x-4}{2\left(x^2-2\right)} + 2\ln\left|x^2-2\right| + \sqrt{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{x^4+2x^3-2x^2-5x-4}{2\left(x^2-2\right)} + \ln\left(\left(x^2-2\right)^2\right) + \ln\left|\left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right)^{\frac{7\sqrt{2}}{8}}\right| + C$$

(c) Autori nisu bili uspješni pri rješavanju ovog zadatka metodama kolegija MA2. Ako uspijete riješiti, molimo Vas da nam se javite s rješenjem na jedan od mailova navedenih u uvodu.

2.4 Integrali iracionalnih funkcija

Zadatak 2.39. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int x\sqrt[3]{4+3x}dx$$

Rješenje.

$$\int x\sqrt[3]{4+3x}dx = \begin{bmatrix} t = 3x+4 \\ dt = 3dx \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\int (t-4)\sqrt[3]{t}dt = \frac{1}{9}\int t^{\frac{4}{3}}dt - \frac{4}{9}\int t^{\frac{1}{3}}dt$$

$$= \frac{1}{21}t^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{21}(3x+4)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3}(3x+4)^{\frac{4}{3}} + C$$

(b)

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$$

Rješenje.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{bmatrix} = 2\int \frac{t^2dt}{1+t} = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t}dt = 2\int \frac{(t-1)(t+1)}{1+t}dt + 2\int \frac{dt}{1+t}$$

$$= 2\int tdt - 2\int dt + 2\ln|1+t| + C = t^2 - 2t + 2\ln|1+t| + C = x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$$

(c)

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}dx = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = 2\int \frac{t(t+1)}{t-1}dt = 2\int \frac{t^2+t}{t-1}dt = 2\int \frac{(t-1)(t+2)+2}{t-1}dt$$

$$= 2\int (t+2)dt + 4\int \frac{dt}{t-1} = t^2 + 4t + 4\ln|t-1| + C = x + 4\sqrt{x} + 4\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + C$$

Zadatak 2.40. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$$

Rješenje.

$$\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \\ dx = \frac{4tdt}{(1+t^2)^2} \end{bmatrix} = 4\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)^2} = \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \frac{tdt}{(1+t^2)^2} & v = -\frac{1}{2(1+t^2)} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{2t}{1+t^2} + 2\int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{2t}{1+t^2} + 2\operatorname{arctg} t + C = -\frac{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}{1+\frac{x}{2-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C$$

$$= -\sqrt{2x-x^2} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{2-x}} + C$$

(b)

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

Rješenje.

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x = \operatorname{ch} t \\ dx = \operatorname{sh} tdt \end{bmatrix} = \int \frac{\operatorname{sh} tdt}{\operatorname{ch} t - \sqrt{\operatorname{sh}^2 t}} = \int \frac{\operatorname{sh} tdt}{\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t}$$

$$= \int \operatorname{sh} t\,(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)\,dt = \int \operatorname{sh} t \operatorname{ch} tdt + \int \operatorname{sh}^2 tdt$$

Izračunajmo ova dva integrala.

$$\int \operatorname{sh} t \operatorname{ch} tdt = \begin{bmatrix} u = \operatorname{sh} t \\ du = \operatorname{ch} tdt \end{bmatrix} = \int udu = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 t + C$$

$$\int \operatorname{sh}^2 tdt = \int \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}dt = \frac{1}{2}\int \operatorname{ch} 2tdt - \frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t - \frac{1}{2}t + C$$

Sad je početni integral jednak

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}} &= \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 t + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t - \frac{1}{2}t + C \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 \operatorname{Arch} x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2\operatorname{Arch} x - \frac{1}{2}\operatorname{Arch} x + C \\ &= \frac{(x-1)(x+1) + x\sqrt{x-1}\sqrt{x+1} - \operatorname{Arch} x}{2} + C\end{aligned}$$

(c)

$$\int \frac{1}{1-2x}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{1}{1-2x}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} \\ dx = \frac{2tdt}{(t^2+1)^2} \end{bmatrix} = \int \frac{t^2dt}{t^2+1} = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{t^2+1} = t - \operatorname{arctg} t + C = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\right) + C$$

Zadatak 2.41. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}}$$

Rješenje.

$$\int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x = \frac{1}{\cos t} \\ dx = \operatorname{tg} t \frac{dt}{\cos t} \end{bmatrix} = \int \frac{\cos^6 t}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} \operatorname{tg} t \frac{dt}{\cos t} = \int \cos^5 t dt$$

a na vježbama je izvedeno da je

$$\int \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx + \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x.$$

Dakle, konačan integral jednak je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^6\sqrt{x^2-1}} &= \frac{8}{15}\sin t + \frac{1}{5}\cos^4 t \sin t + \frac{4}{15}\cos^2 t \sin t + C \\ &= \left[t = \arccos \tfrac{1}{x}\right] \left[\sin \arccos x = \sqrt{1-x^2}\right] \left[\cos \arccos x = x\right] \\ &= \frac{\left(8x^4 + 4x^2 + 3\right)\sqrt{x^2-1}}{15x^5} + C \end{aligned}$$

(b)

$$\int \sqrt{2-x-x^2} dx$$

Rješenje.

$$\int \sqrt{2-x-x^2} dx = \int \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} dx = \begin{bmatrix} t = x + \frac{1}{2} \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \sqrt{\frac{9}{4} - t^2} dt = \begin{bmatrix} t = \frac{3}{2}\sin u \\ dt = \frac{3}{2}\cos u du \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} \int \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{4}\sin^2} \cos u du = \frac{9}{4} \int \cos^2 u du = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}\int du + \frac{\cos u \sin u}{2}\right) + C$$

$$= \frac{9}{8}\left(\arcsin\left(\frac{2t}{3}\right) + \cos \arcsin\left(\frac{2t}{3}\right) \cdot \sin \arcsin\left(\frac{2t}{3}\right)\right) + C$$

$$= \frac{9}{8}\left(\arcsin\left(\frac{2x+1}{3}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{2x+1}{3}\right)^2} \cdot \frac{2x+1}{3}\right) + C$$

$$= \frac{9}{8}\left(\arcsin\left(\frac{2x+1}{3}\right) + \frac{2}{9}\sqrt{2-x-x^2}\,(2x+1)\right) + C$$

(c)

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt[3]{2+x} \\ dx = 3t^2dt \end{bmatrix} = 3\int \frac{t^3\left(t^3-2\right)}{t^3+t-2}dt = 3\int \left(t^3-t\right)dt + 3\int \frac{t^2-2t}{t^3+t-2}dt$$

$$= 3\frac{t^4}{4} - 3\frac{t^2}{2} + 3\int \frac{t^2-2t}{t^3+t-2}dt = 3\frac{t^4}{4} - 3\frac{t^2}{2} + 3\int \frac{t^2-2t}{(t-1)\left(t^2+2+2\right)}dt$$

$$= 3\frac{t^4}{4} - 3\frac{t^2}{2} - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{3}{4}\int \frac{5t-2}{t^2+t+2}dt$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{15}{8}\int \frac{2t+1}{t^2+t+2}dt - \frac{27}{8}\int \frac{dt}{t^2+t+2} = \begin{bmatrix} u = t^2+t+2 \\ du = (2t+1)\,dt \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{15}{8}\int \frac{du}{u} - \frac{27}{8}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$= \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{15}{8}\ln|u| - \frac{27}{8}\frac{2\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C$$

Konačno je rješenje jednako

$$\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{2+x}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{2+x}\right)^2 - \frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[3]{2+x}-1\right| + \frac{15}{8}\ln\left|\left(\sqrt[3]{2+x}\right)^2 + \sqrt[3]{2+x}+2\right|$$
$$- \frac{27\sqrt{7}}{28}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{2+x}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C$$

Zadatak 2.42 Izračunajte integrale.

(a)

$$\int\limits_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int\limits_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1} & du = \frac{dx}{4x\sqrt{\sqrt{x}-1}} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix}$$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\Big|_1^{16} - \frac{1}{4}\int\limits_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \begin{bmatrix} x = t^2 & 1 \mapsto 1 \\ dx = 2tdt & 16 \mapsto 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \frac{tdt}{\sqrt{t-1}} = \begin{bmatrix} t = z^2+1 & 1 \mapsto 0 \\ dt = 2zdz & 4 \mapsto \sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{16\pi}{3} - \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{z^3+z}{z}dz$$
$$= \frac{16\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

(b) Autori nisu bili uspješni pri rješavanju ovog zadatka metodama kolegija MA2. Ako uspijete riješiti, molimo Vas da nam se javite s rješenjem na jedan od mailova navedenih u uvodu.

(c)
$$\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx$$

Rješenje.

$$\int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)dx = \begin{bmatrix} u = \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) & du = \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}+\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix}$$
$$= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$$
$$= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{4}\int \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) + \frac{1}{4}\int \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{bmatrix}$$
$$= x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) + \frac{1}{2}\int (1-\cos t)\,dt = x\ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right) + \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x + C$$

2.5 Integrali trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija

Zadatak 2.45. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx$$

Rješenje.

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int t^4 \left(1-t^2\right)^2 t dt$$

$$= \int \left(t^8 - 2t^6 + t^4\right) dt = \frac{t^9}{9} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

(b)

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx$$

Rješenje.

$$\int \operatorname{tg}^5 x = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = -\int \frac{\left(\sin^2 x\right)^2}{\cos^5 x} dt = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^5} dt$$

$$= -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5} dt = -\int \frac{dt}{t^5} + 2\int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t^2} - \ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C$$

(c)

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin 2x}} dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{1+\operatorname{ctg}^2 x} \frac{-dx}{\sin^2 x} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{ctg} x \\ dt = \frac{-dx}{\sin^2 x} \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt$$

$$= \begin{bmatrix} t = z^2 \\ dt = 2zdz \end{bmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{z^2}{1+z^4} 2zdz = -\sqrt{2} \int \frac{z^2 dz}{1+z^4} = -\sqrt{2} \int \frac{z^2 dz}{\left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt{2}z + 1\right)}$$

$$= -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{zdz}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} - \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{zdz}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\int \frac{zdz}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} - \int \frac{zdz}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\left(\frac{1}{2}\ln\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{z+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\right)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z^2-\sqrt{2}z+1}{z^2+\sqrt{2}z+1}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}z-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}z+1\right)\right)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-\sqrt{2t}+1}{t+\sqrt{2t}+1}\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2t}-1\right)+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2t}+1\right)\right)+C$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\operatorname{ctg}x-\sqrt{2\operatorname{ctg}x}+1}{\operatorname{ctg}x+\sqrt{2\operatorname{ctg}x}+1}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{ctg}x}-1\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2\operatorname{ctg}x}+1\right)+C$$

Zadatak 2.46. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$$

Rješenje.

$$\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}=\left[t=\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right]=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}-\sin a}dt=2\int\frac{dt}{2t-\sin a-t^2\sin a}$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2\sin a-2t+\sin a}=-2\int\frac{dt}{\left(t\sqrt{\sin a}-\frac{1}{\sqrt{\sin a}}\right)^2+\sin a-\frac{1}{\sin a}}$$

$$=-2\int\frac{dt}{\left(\frac{t\sin a-1}{\sqrt{\sin a}}\right)^2+\sin a-\frac{1}{\sin a}}=\begin{bmatrix}u=\frac{t\sin a-1}{\sqrt{\sin a}\sqrt{\sin a-\frac{1}{\sin a}}}\\ dt=\frac{\sqrt{\sin a-\frac{1}{\sin a}}}{\sqrt{\sin a}}du\end{bmatrix}$$

$$=-2\int\frac{\frac{\sqrt{\sin a-\frac{1}{\sin a}}}{\sqrt{\sin a}}}{\frac{u^2}{\sin a-\frac{1}{\sin a}}+\sin a-\frac{1}{\sin a}}du=-2\frac{1}{\sqrt{\sin a}\sqrt{\sin a-\frac{1}{\sin a}}}\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=-2\frac{1}{\sqrt{\sin a}\sqrt{\sin a-\frac{1}{\sin a}}}\operatorname{arctg}u+C=-\frac{2}{\sqrt{\sin^2 a-1}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sin a-1}{\sqrt{\sin^2 a-1}}+C$$

(b)

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$$

Rješenje.

$$\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\begin{bmatrix}t=x+a\\ dt=dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{\sin t\sin(t+b-a)}$$

$$= \int \frac{dt}{\sin t\left(\sin t\cos\left(b-a\right)+\cos t\sin\left(b-a\right)\right)} = \int \frac{1}{\sin^2 t}\frac{1}{\cos\left(b-a\right)+\operatorname{ctg} t\sin\left(b-a\right)}dt$$

$$= \begin{bmatrix} u = \operatorname{ctg} t \\ du = -\frac{dt}{\sin^2 t} \end{bmatrix} = -\int \frac{du}{\cos\left(b-a\right)+u\sin\left(b-a\right)} = \begin{bmatrix} z = \cos\left(b-a\right)+u\sin\left(b-a\right) \\ dz = \sin\left(b-a\right)du \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\sin\left(b-a\right)}\int \frac{dz}{z} = -\frac{1}{\sin\left(b-a\right)}\ln|z|+C = -\frac{\ln\left|\cos\left(b-a\right)+\sin\left(b-a\right)\operatorname{ctg}\left(x+a\right)\right|}{\sin\left(b-a\right)}+C$$

(c)

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin x+\cos x}dx$$

Rješenje.

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin x+\cos x}dx = \int \frac{\frac{2}{3}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{3}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{3}\cos x+\frac{1}{3}\sin x}{\sqrt{2}\sin x+\cos x}dx$$

$$= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2}\sin x+\cos x\right)-\frac{1}{3}\left(\sqrt{2}\cos x-\sin x\right)}{\sqrt{2}\sin x+\cos x}dx = \frac{\sqrt{2}}{3}\int dx-\frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{2}\cos x-\sin x}{\sqrt{2}\sin x+\cos x}dx$$

$$= \begin{bmatrix} t = \sqrt{2}\sin x+\cos x \\ dt = \left(\sqrt{2}\cos x-\sin x\right)dx \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3}\int dx-\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{1}{3}\ln\left|\sqrt{2}\sin x+\cos x\right|+C$$

Zadatak 2.47. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & 0 \mapsto 0 \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & -\frac{\pi}{4} \mapsto 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= 2\int_{1-\sqrt{2}}^{0} \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2\cdot 2t}{1+t^2}+t\right)} = 2\int_{1-\sqrt{2}}^{0} \frac{dt}{2t^2+4t+4}$$

$$= \int_{1-\sqrt{2}}^{0} \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int_{1-\sqrt{2}}^{0} \frac{dt}{\left(t+1\right)^2+1} = \left(\operatorname{arctg}\left(t+1\right)\right)\Big|_{1-\sqrt{2}}^{0} = \frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(2-\sqrt{2}\right)$$

(b)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \frac{\pi}{4} \mapsto \sqrt{2}-1 \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & \frac{\pi}{3} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} = \int_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^2\left(1-t^2\right)} dt = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(-1 + \frac{3t^2+1}{t^2-t^4}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(- \int_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} dt + \int_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t+1} - \frac{2}{t-1} \right) dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-t \Big|_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{t} \Big|_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} + 2\ln(t+1) \Big|_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - 2\ln(t-1) \Big|_{\sqrt{2}-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \right)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3} - \frac{\ln 2}{2} + \ln\left(\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$$

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+\cos 2x)^2} = \begin{bmatrix} u = 2x & 0 \mapsto 0 \\ du = 2dx & \frac{\pi}{4} \mapsto \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(1+\cos u)^2} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg}\frac{u}{2} & 0 \mapsto 0 \\ du = \frac{2dt}{1+t^2} & \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \left(1+t^2\right) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

Zadatak 2.48. Izračunajte integrale.

(a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\cos x}$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\cos x} = \begin{bmatrix} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} & -\pi\mapsto-\infty \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} & \pi\mapsto+\infty \end{bmatrix} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{1+t^2}}{5-4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+9t^2}$$

$$= \begin{bmatrix} u=3t & +\infty\mapsto+\infty \\ du=3dt & -\infty\mapsto-\infty \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} u\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{3}$$

(b)

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$$

Rješenje.

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5} = \left[t=\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right] = \int \frac{1}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int\frac{dt}{6t^2+4t+4}$$

$$= \int\frac{dt}{3t^2+2t+2} = \int\frac{dt}{3\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\sqrt{59}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{9}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+\frac{1}{3}}{\sqrt{59}}\right)+C = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{5}}\right)+C$$

(c)

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

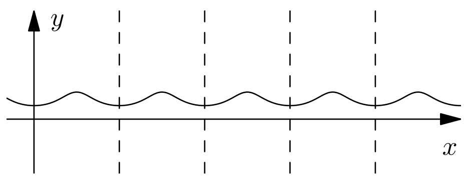
Rješenje. [Skica]

Iz trigonometrijskih identiteta navedenih u formulama možemo pojednostaviti izraz iz nazivnika. Imamo

$$\begin{aligned}
\sin^4 x + \cos^4 x &= \left(\sin^2 x\right)^2 + \cos^4 x = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 + \cos^4 x \\
&= 2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 2\left(\cos^2 x\right)^2 - 2\cos^2 x + 1 \\
&= 2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) + 1 = 2\frac{(1+\cos 2x)^2}{4} - 1 - \cos 2x + 1 \\
&= \frac{(1+\cos 2x)^2}{4} - \cos 2x = \frac{\cos^2 2x + 2\cos 2x + 1}{2} - \cos 2x \\
&= \frac{\cos^2 2x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\cos 4x}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3+\cos 4x}{4}
\end{aligned}$$

Dakle, traženi integral je

$$I = 4\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos 4x}.$$



Kako je podintegralna funkcija periodična s periodom $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, možemo evaluirati integral od 0 do 2π tražene funkcije ili četiri puta evaluirati integral od 0 do $\frac{\pi}{2}$ i to zbrojiti, zbog periodičnosti. Dakle, vrijedi

$$I = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos 4x} = \begin{bmatrix} t = 4x & 0 \mapsto 0 \\ dt = 4dx & \frac{\pi}{2} \mapsto 2\pi \end{bmatrix} = 4\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\cos t} = 8\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{3+\cos t}$$

$$= \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & 0 \mapsto 0 \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & \pi \mapsto +\infty \end{bmatrix} = 16\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = 8\lim_{\xi\to+\infty}\int\limits_0^{\xi} \frac{dt}{t^2+2}$$

$$= 8\lim_{\xi\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}t}{2}\right)\Bigg|_0^{\xi} = 4\sqrt{2}\lim_{\xi\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\xi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\cdot 0}{2}\right) = 2\sqrt{2}\pi$$

2.6 Nepravi integrali

Zadatak 2.55. Izračunajte neprave integrale.

(a)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\left(x^3+x\right)dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\left(x^3+x\right)dx = \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi} e^{-x^2}\left(x^2+1\right)xdx = \begin{bmatrix} t=x^2 & 0\mapsto 0 \\ dt=2xdx & \xi\mapsto\xi^2\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi^2} e^{-t}\left(t+1\right)dt = \begin{bmatrix} u=t+1 & du=dt \\ dv=e^{-t}dt & v=-e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\left(\left((t+1)\left(-e^{-t}\right)\right)\Big|_0^{\xi^2} + \int_0^{\xi^2} e^{-t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\left(-e^{-\xi^2}+1-\left(\xi^2+1\right)e^{-\xi^2}+1\right) = 1$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{0}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}+\lim_{\xi\to+\infty}\int_{0}^{\xi}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Prvo ćemo riješiti neodređeni integral pa uvrstiti u formulu gore.

$$\int_a^b\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \int_a^b\frac{1+x^2-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int_a^b\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

$$= \begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=-\frac{2xdx}{\left(1+x^2\right)^2} & v=\frac{1}{1+x^2}\end{bmatrix} = \operatorname{arctg}x\Big|_a^b + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\Big|_a^b - \int_a^b\frac{dx}{1+x^2}\right)$$

$$= \operatorname{arctg} x\Big|_a^b + \frac{x}{2(1+x^2)}\Big|_a^b$$

Sada znamo da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{0} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \lim_{\xi\to+\infty}\int_{0}^{\xi} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= \lim_{\xi\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big|_\xi^0 + \frac{x}{2(1+x^2)}\Big|_\xi^0\right) + \lim_{\xi\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\Big|_0^\xi + \frac{x}{2(1+x^2)}\Big|_0^\xi\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(c)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx = \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \begin{bmatrix} t = \operatorname{arctg} x & 0 \mapsto 0 \\ dt = \frac{dx}{1+x^2} & \xi \mapsto \operatorname{arctg}\xi \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\operatorname{arctg}\xi} \frac{tdt}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\operatorname{arctg}\xi} \frac{tdt}{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\operatorname{arctg}\xi} t\cos tdt = \lim_{\xi\to+\infty}\left(t\sin t\Big|_0^{\operatorname{arctg}\xi} - \int_0^{\operatorname{arctg}\xi}\sin tdt\right)$$

$$= \lim_{\xi\to+\infty}\left(t\sin t\Big|_0^{\operatorname{arctg}\xi} + \cos t\Big|_0^{\operatorname{arctg}\xi}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Zadatak 2.56. Ispitajte konvergenciju nepravih integrala.

(a)

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\ln x}$$

Rješenje. [Skica]

Vrijedi

$$\frac{1}{x\ln x} < \frac{1}{\sqrt{1+x}\ln x}, \qquad \forall x > e$$

[za vježbu definirajte funkciju i dokažite nejednakost preko rasta i pada]. Nadalje, vrijedi

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & e \mapsto 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & +\infty \mapsto +\infty \end{bmatrix} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty,$$

pa po usporednom kriteriju početni integral divergira.

(b)

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{\cos x^2 \ln x}{\sqrt{(x+1)^3}} dx$$

Rješenje. [Skica]

Vrijedi ocjena

$$\frac{\cos x^2 \ln x}{\sqrt{(x+1)^3}} < \frac{\ln x}{\sqrt{(x+1)^3}} \leqslant \underbrace{\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\sqrt{(x+1)^3}}}_{(\Delta)}.$$

Dokažimo da vrijedi desna nejednakost. Definirajmo funkciju $f(x) = x^{\frac{2}{5}} - \ln x$. Derivacija ove funkcije je $f'(x) = \frac{2x^{\frac{2}{5}} - 5}{5x}$. Stacionarna točka ove funkcije je $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$. Analizirajmo derivaciju tablicom predznaka.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 0 & \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}} & \infty \\ \hline f' & - & + & \\ \hline & \searrow & \nearrow & \end{array}$$

Slijedi da je točka $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$ lokalni minimum funkcije f te da ocjena vrijedi na cijeloj domeni funkcije f. Također vrijedi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\sqrt{(x+1)^3}}}{\frac{1}{x^{\frac{11}{10}}}} = 1.$$

Stoga, jer $\int \frac{dx}{x^{\frac{11}{10}}}$ konvergira, po graničnom kriteriju imamo da konvergira i izraz (Δ), pa konvergira i početni interal po usporednom kriteriju.

(c)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Rješenje. [Skica]

Računamo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Vrijedi ocjena

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}, \qquad \forall x \geqslant 1,$$

a znamo da $\int\limits_1^{+\infty} x^{-2} dx$ konvergira, pa po usporednom kriteriju apsolutno konvergira i integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}$. Nadalje, vrijedi

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos x}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x}\right|,$$

pa puštanjem $x \to +\infty$ vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. Dakle, početni integral konvergira jer je $-\frac{\cos x}{x}\Big|_0^{+\infty} = \cos 1$, a drugi integral u sumi također konvergira.

Zadatak 2.57. Odredite parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ za kojeg nepravi integral

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{\alpha}{3x+2}\right) dx$$

konvergira, te za taj α izračunajte gornji integral.

Rješenje. Vrijedi

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{\alpha}{3x+2}\right) dx = \lim_{\xi\to+\infty} \int_0^{\xi} \left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{\alpha}{3x+2}\right) = \lim_{\xi\to+\infty} \int_0^{\xi} \frac{(3-\alpha)x^2+2x-4\alpha}{(x^2+4)(3x+2)}.$$

Provodimo usporedni kriterij s integralom $\int\limits_{0\leftarrow}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. Znamo da on konvergira za $p > 1$, a divergira za $p \leqslant 1$. Dakle, ako želimo da početni integral konvergira, mora vrijediti da je stupanj brojnika za više od 1 manji od stupnja nazivnika. Tj. u ovom slučaju stupanj brojnika mora biti manji od 2. Dakle, samo za $\alpha = 3$ dani integral može konvergirati. Vrijedi

$$\frac{2x-12}{\left(x^2+4\right)\left(3x+2\right)} \leqslant \frac{1}{x^2}, \qquad \forall x > 0$$

a za desni integral znamo da konvergira pa konvergira i početni integral za $\alpha = 3$. Računamo:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{x^2+4} - \frac{3}{3x+2}\right) dx = \lim_{\xi\to+\infty} \left(\int_0^{\xi} \frac{xdx}{x^2+4} - 3\int_0^{\xi} \frac{dx}{3x+2}\right)$$

$$= \lim_{\xi\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\Big|_0^{\xi} - \ln\left(3x+2\right)\Big|_0^{\xi}\right) = \lim_{\xi\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{\xi^2+4}}{3\xi+2} = \ln\frac{1}{3}$$

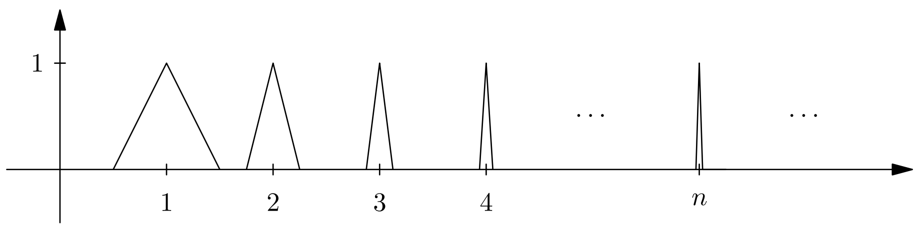
Zadatak 2.58. Neka je $f : [a, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ neprekidna nenegativna funkcija. Pretpostavimo da nepravi integral

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

konvergira.

(a) Mora li nužno vrijediti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Rješenje. Motivacija: Ideja je složiti ovakav graf [uzimamo $a = 0$]:



Vrijedit će $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, pa očito ne može vrijediti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ no integral $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\, dx$ će postojati jer će se trokutima baze brzo smanjivati.

Dokaz: definirajmo $f : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$. Uzmimo proizvoljan $n \in \mathbb{N}$. Njegov trokut definirajmo ovako:

$$f(n) = 1, \qquad f\left(n - \frac{1}{2^n}\right) = f\left(n + \frac{1}{2^n}\right) = 0$$

$$\forall x \in \left\langle n - \frac{1}{2^n}, n \right\rangle, \quad f(x) = 2^n(x-n) + 1,$$

$$\forall x \in \left\langle n, n + \frac{1}{2^n} \right\rangle, \quad f(x) = -2^n(x-n) + 1$$

Nakon toga, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $f(x) = 0$ svugdje drugdje. Funkcija f očito je neprekidna i integrabilna na svakom $[0, T]$. Sad je površina $n-$tog trokuta jednaka

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{1}_{\text{visina}} \cdot \underbrace{\left(\left(n + \frac{1}{2^n}\right) - \left(n - \frac{1}{2^n}\right)\right)}_{\text{baza}} = \frac{1}{2^n}.$$

Za proizvoljni $T \in \mathbb{R}$ vidimo da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $T < m$. Budući da je f uvijek $\geqslant 0$, vrijedi da je funkcija $T \mapsto \int\limits_0^T f(x)\,dx$ rastuća, pa je

$$\int\limits_0^R f(x)\,dx \leqslant \int\limits_0^m f(x)\,dx = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^m} < 1.$$

Dakle, $\int\limits_0^R f(x)\,dx < 1, \forall R \in \mathbb{R}$. Dakle, interval konvergira jer je omeđen odozgo s 1 i rastuć.

(b) Ako je f uniformno neprekidna na $[a, +\infty\rangle$, dokažite da je $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Rješenje. Označimo tvrdnje

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ konvergira} \longleftrightarrow (1)$$

$$f \text{ uniformno neprekidna} \longleftrightarrow (2)$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq 0$. Tada postoji niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takav da $x_n \to +\infty$ i $f(x_n) \not\to 0$. Uočimo da je $f(x) \geqslant 0, \forall x$ pa je

$$\limsup_{n \to +\infty} (f(x_n)) \geqslant \liminf_{n \to +\infty} (f(x_n)) \geqslant 0.$$

Iz činjenice da $f(x_n) \not\to 0$ mora biti stroga nejednakost:

$$\limsup_{n \to +\infty} (f(x_n)) > \liminf_{n \to +\infty} (f(x_n)) \geqslant 0.$$

Označimo $\limsup_{n \to +\infty} f(x_n) = L > 0$. Dakle, postoji podniz $(x_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ niza (x_n) takav da $x_{p_n} \to +\infty$ i $f(x_{p_n}) \to L > 0$. Iz toga zaključujemo da $\exists N \in \mathbb{N}$ takav da $\forall m \geqslant N, f(x_{p_m}) > \frac{L}{2} > 0$, a budući da $x_{p_n} \to +\infty$ postoji proizvoljno veliki $T \in \mathbb{R}$ takav da

$$f(T) > \frac{L}{2} \longleftrightarrow (3).$$

Zbog (2) vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x, y \in [a, +\infty\rangle)\,(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Uzmimo $\varepsilon = \frac{L}{4}$. Tada

$$(\exists \delta > 0)\,(\forall x, y \in [a, +\infty\rangle)\left(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{L}{4}\right).$$

Posebno, ako uzmemo x takav da je $f(x) > \frac{L}{4}$ imamo

$$f(y) > f(x) - \frac{L}{4} \geqslant 0, \forall y \in \langle x - \delta, x + \delta\rangle$$

pa je

$$\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(y)\,dy > \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \left(f(x) - \frac{L}{4}\right) dy = 2\delta \left(f(x) - \frac{L}{4}\right)$$

te štoviše

$$\int\limits_{x-\delta}^{+\infty} f(y)\,dy > \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(y)\,dy > 2\delta \left(f(x) - \frac{L}{4}\right)$$

te zbog (1) i činjenice da je $f \geqslant 0$ pa je funkcija $z \mapsto \int\limits_a^z f(y)\,dy$ rastuća. Dakle, $\forall \eta > 0$, $\exists M > 0$ takav da $\forall z \geqslant M$,

$$\int\limits_{z}^{+\infty} f(y)\,dy < \eta.$$

Uzmimo sad $\eta = 2\delta \cdot \frac{L}{4} = \frac{L \cdot \delta}{2} > 0. \implies \exists M > 0$ takav da je $\forall z \geqslant M$,

$$\int\limits_{z}^{+\infty} f(y)\,dy < \frac{L \cdot \delta}{2}.$$

Uzmimo $z = M + \delta > M$. Zbog (3) postoji $T > z$ takav da je $f(T) > \frac{L}{2}$. Uvrstimo taj T u (4), što možemo jer je u (4) uvjet da je $f(x) > \frac{L}{4}$, a $f(T) > \frac{L}{2} > \frac{L}{4}$. Imamo

$$\int\limits_{T-\delta}^{+\infty} f(y)\,dy > \int\limits_{T-\delta}^{T+\delta} f(y)\,dy > 2\delta \left(f(T) - \frac{L}{4}\right) > 2\delta \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = \frac{L \cdot \delta}{2}.$$

No, sada je

$$\frac{L \cdot \delta}{2} < \int\limits_{T-\delta}^{+\infty} f(y)\,dy < \int\limits_{M}^{+\infty} f(y)\,dy < \eta = \frac{L \cdot \delta}{2}.$$

Dobili smo kontradikciju, pa je početna pretpostavka kriva.

Zadatak 2.59. Izračunajte neprave integrale.

(a)

$$\int_0^{\to 1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$$

Rješenje. [Skica]

$$\int_0^{\to 1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \lim_{\xi\to 1-} \int_0^{\xi} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & 0 \mapsto 1 \\ dx = \frac{4tdt}{(1+t^2)^2} & \xi \mapsto \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \end{bmatrix} = 4 \lim_{\xi\to 1-} \int_1^{\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \frac{tdt}{(1+t^2)^2} & v = -\frac{1}{2(1+t^2)} \end{bmatrix} = 4 \lim_{\xi\to 1-} \left(-\frac{t}{2(1+t^2)}\Big|_1^{\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}} + \int_1^{\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}} \frac{dt}{2(1+t^2)} \right)$$

$$= \lim_{\xi\to 1-} \left(1 - \sqrt{1-\xi^2} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 + \pi - \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{2}$$

(b)

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \qquad a < b$$

Rješenje. [Skica]

Rastavimo gornji integral na dva integrala.

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_{a\leftarrow}^{\frac{b+a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} + \int_{\frac{b+a}{2}}^{\to b} \frac{dx}{(x-a)(b-x)}.$$

Prvi ćemo riješiti, drugi ostavljamo za vježbu jer je rješenje kompletno analogno. Uzmimo $0 < \xi < \frac{b+a}{2}$. Na kraju računanja ćemo promotriti što se događa kad $\xi \to 0+$. Vrijedi

$$\int_{a+\xi}^{\frac{b+a}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \begin{bmatrix} t = b-x & a+\xi \mapsto b-a-\xi \\ dt = -dx & \frac{b+a}{2} \mapsto \frac{b-a}{2} \end{bmatrix} = \int_{\frac{b-a}{2}}^{b-a-\xi} \frac{dt}{\sqrt{t(b-a-t)}}$$

$$= \int\limits_{\frac{b-a}{2}}^{b-a-\xi} \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} - t\right)^2}} = \begin{bmatrix} u = \frac{b-a}{2} - t & \frac{b-a}{2} \mapsto 0 \\ du = -dt & b-a-\xi \mapsto \frac{a-b+2\xi}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \int\limits_{\frac{a-b+2\xi}{2}}^{0} \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{\frac{b-a}{2}}\right)\Big|_{\frac{a-b+2\xi}{2}}^{0}$$

$$= \arcsin 0 - \arcsin\left(\frac{a-b+2\xi}{-a+b}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ kad } \xi \to 0+$$

Dakle, konačno rješenje će biti $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

(c)

$$\int\limits_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$$

Rješenje. [Skica]

Označimo početni integral s I. Vrijedi

$$I = \int\limits_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{2} - t & 0 \mapsto \frac{\pi}{2} \\ dx = -dt & \frac{\pi}{2} \mapsto 0 \end{bmatrix} = \int\limits_{0}^{\to\frac{\pi}{2}} \ln \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = \int\limits_{0}^{\to\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx$$

Zbrajanjem ova dva integrala imamo

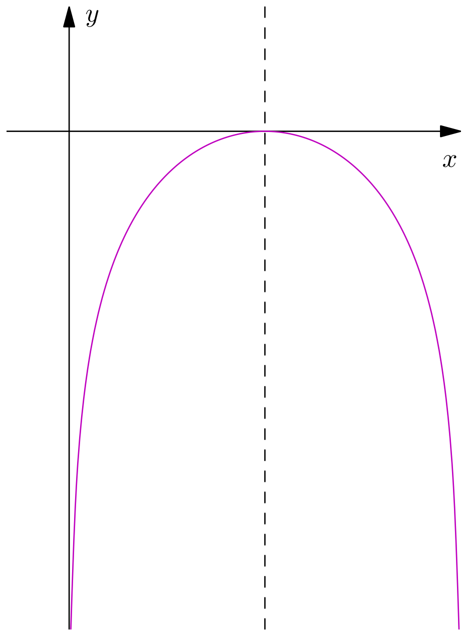
$$2I = \int\limits_{0\leftarrow}^{\to\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x + \ln \cos x)\, dx = \int\limits_{0\leftarrow}^{\to\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x)\, dx$$

$$= \int\limits_{0\leftarrow}^{\to\frac{\pi}{2}} \ln \frac{2 \sin x \cos x}{2} dx = \underbrace{\int\limits_{0\leftarrow}^{\to\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx}_{(\Delta_1)} - \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx$$

Rješavamo integral (Δ_1).

$$\Delta_1 = \int\limits_{0\leftarrow}^{\to\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx = \begin{bmatrix} t = 2x & 0 \mapsto 0 \\ dt = 2dx & \frac{\pi}{2} \mapsto \pi \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int\limits_{0\leftarrow}^{\pi} \ln \sin t dt = \int\limits_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt = I$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer je podintegralna funkcija jednaka na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$ pa je zbroj te dvije površine jednak dvostrukoj površini jedne od te dvije.



Dakle, imamo

$$2I = I - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 dx$$

$$I = -\ln 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

Zadatak 2.60. Ispirajte konvergenciju nepravih integrala.

(a)

$$\int_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

Rješenje. [Skica]

Dokažimo da vrijedi ocjena $\frac{x}{2} \leqslant \sin x$ na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Vrijedi $(\sin x)'' = -\sin x$ te direktnim uvrštavanjem dobijemo da je vrijednost $-\sin x$ negativna na $[0, \pi]$, što znači da je $\sin x$ konkavna funkcija na $[0, \pi]$. Za konkavne funkcije na segmentu $[a, b]$ vrijedi

$$f(x) \geqslant f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}\sin x &\geqslant \sin 0 + (x-0)\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0} \geqslant \frac{2}{x\pi} \geqslant \frac{1}{2x}\\ \sqrt{\sin x} &\geqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Dakle, za početni integral vrijedi

$$\int\limits_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \leqslant \sqrt{2}\int\limits_{0\leftarrow}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

a za desni integral znamo da konvergira. Tada po usporednom kriteriju konvergira i početni integral.

(b)

$$\int\limits_{0}^{1\leftarrow} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Rješenje. [Skica]

Dokažimo da je $1-x^4 \geqslant 1-x^2, \forall x \in [-1,1]$. Ovo je ekvivalentno s $x^4 \leqslant x^2$, a rješavanjem te nejednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned}x^4 &\leqslant x^2\\ x^2-x^4 &\geqslant 0\\ x^2(1-x)(1+x) &\geqslant 0\end{aligned}$$

te provjerom predznaka imamo da nejednakost vrijedi. Također, zbog strogog rasta korijena na $\langle 0,+\infty\rangle$ imamo

$$\sqrt{1-x^4} \geqslant \sqrt{1-x^2}$$

te

$$\int\limits_{0}^{1\leftarrow} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \leqslant \int\limits_{0}^{1\leftarrow} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Desni integral se supstitucijom $x = \sin t$ svede na oblik $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ te je naposljetku jednak $\frac{\pi}{2}$. No, nije ni bitno čemu je desni integral jednak, bitno je samo da konvergira, pa po usporednom kriteriju konvergira i početni integral.

(c)

$$\int_0^{\to\pi} \frac{\sqrt{\pi - x}}{1 + \cos x} dx$$

Rješenje. [Skica]

Vrijedi

$$\int_0^{\to\pi} \frac{\sqrt{\pi - x}}{1 + \cos x} dx = \lim_{\xi \to 0+} \int_0^{\pi-\xi} \frac{\sqrt{\pi - x}}{1 + \cos x} dx = \begin{bmatrix} t = \pi - x & \pi - \xi \mapsto \xi \\ dt = -dx & 0 \mapsto \pi \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{\xi \to 0+} \int_\xi^{\pi} \frac{\sqrt{t}}{1 + \cos(\pi - t)} dt = \lim_{\xi \to 0+} \int_\xi^{\pi} \frac{\sqrt{t}}{1 - \cos t} dt$$

Puno je lakše ocijeniti izraz koji smo dobili desno. Vrijedi

$$1 - \cos t = \frac{1 - \cos^2 t}{1 + \cos t} = \frac{\sin^2 t}{1 + \cos t} < \sin^2 t < t^2, \qquad \forall t \in \langle 0, \pi \rangle .$$

Dakle, vrijedi ocjena

$$\frac{\sqrt{t}}{1 - \cos t} > \frac{\sqrt{t}}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{t^3}}$$

pri čemu znamo da zadnji integral divergira, pa divergira i početni integral.

(d)

$$\int_{0\leftarrow}^{1} \frac{\operatorname{tg} x \ln(1 + x)}{\sqrt{x^5}} dx$$

Rješenje. [Skica]

Vrijede ocjene

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &< 2x, \qquad &\forall x \in \langle 0, 1 \rangle \\ \ln(1 + x) &< x, \qquad &\forall x \in \langle 0, +\infty \rangle \end{aligned}$$

pa vrijedi

$$\frac{\operatorname{tg} x \ln(1 + x)}{\sqrt{x^5}} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

što znamo da konvergira. Dakle, po usporednom kriteriju konvergira i početni integral.

2.7 Primjene određenih integrala

Napomena. Zadatci koji sadrže polarne i parametarske koordinate riješeni su isključivo radi potpunosti skripte. Oni se ne rade u sklopu gradiva Matematičke analize 2 te su ostavljeni za "one koji žele znati više". Sve takve zadatke označili smo sa $^{(P)}$.

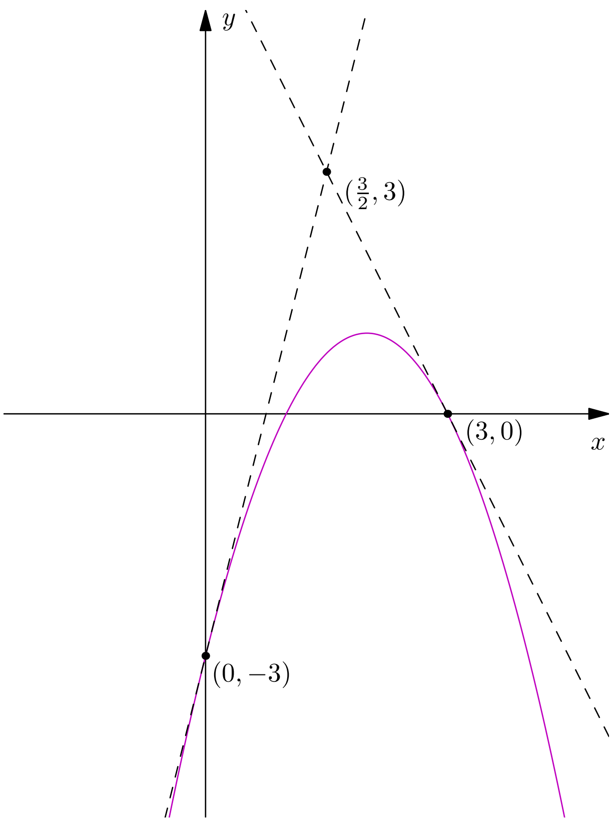
Zadatak 2.76. Odredite površinu lika omeđenog parabolom

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

i njenim tangentama povučenim u točkama $A = (0, -3)$ i $B = (3, 0)$.

Rješenje. Derivacija dane funkcije je $y' = -2x + 4$. Jednadžba tangente u točki $A = (0, -3)$ je $y = 4x - 3$ te $y = -2x + 6$ u točki $B = (3, 0)$. Presjek te dvije tangente jest

$$\begin{aligned} -2x + 6 &= 4x - 3 \\ 9 &= 6x \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$



Sada u ovisnosti o tome presjeku rastavljamo traženu površinu na dvije: $P = P_1 + P_2$. Računamo svaku posebno.

$$P_1 = \int_0^{\frac{3}{2}} \left|4x - 3 + x^2 - 4x + 3\right| dx = \int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8}$$

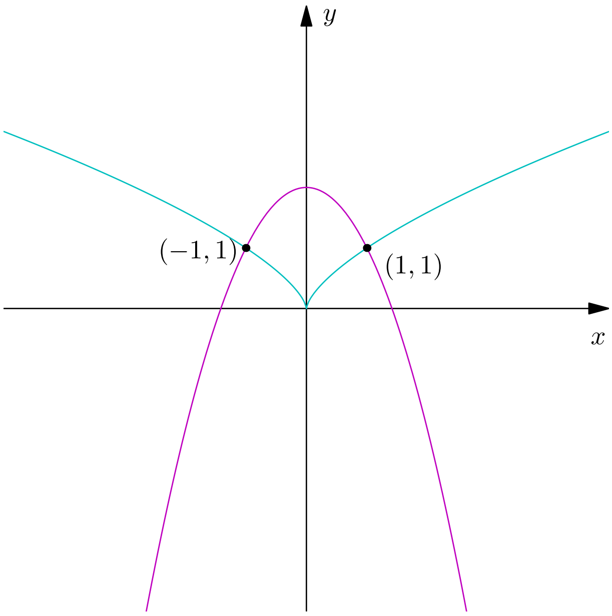
$$P_2 = \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left|-2x + 6 + x^2 - 4x + 3\right| dx = \int_{\frac{3}{2}}^{3} \left|x^2 - 6x + 9\right| dx = \int_{\frac{3}{2}}^{3} (x-3)^2\, dx = \frac{1}{3}(x-3)^3\Big|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{9}{8}$$

Sad dobivamo da je $P = P_1 + P_2 = 2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$.

Zadatak 2.77. Nađite površinu između krivulja

$$y = 2 - x^2 \qquad \text{i} \qquad y^3 = x^2.$$

Rješenje. Iz jednadžbe druge krivulje iščitavamo $y = x^{\frac{2}{3}}$. Zbrajanjem ove dvije jednadžbe dobivamo $y^3 + y - 2 = 0$. Sada faktorizacijom dobivamo $(y-1)\left(y^2 + y + 2\right) = 0$, što daje rješenje $y = 1$. Dakle, te dvije krivulje sijeku se u točkama $T_1 = (1, 1)$ i $T_2 = (-1, 1)$.



Sad računamo površinu po formuli.

$$P = \int_{-1}^{1} \left|2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}}\right| dx = \int_{1}^{1} 2dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx - \int_{-1}^{1} x^{\frac{2}{3}} dx = 2x\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$$

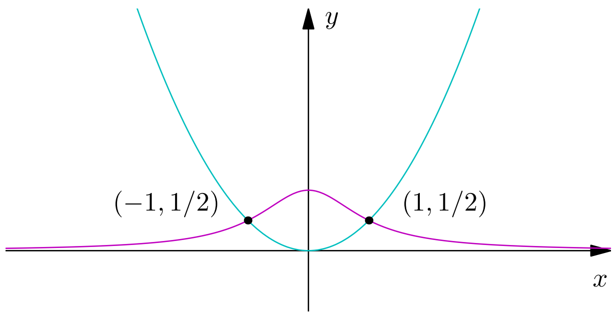
Zadatak 2.78. Nađite površinu između krivulja

$$y = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{i} \qquad y = \frac{x^2}{2}.$$

Rješenje. Tražimo presjek krivulja.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= \frac{1}{1+x^2} \\ x^2 + x^4 - 2 &= 0 \\ x^2\left(x^2+2\right) - \left(x^2+2\right) &= 0 \\ \left(x^2+2\right)(x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Dakle, krivulje se sijeku u točkama $x = -1$ i $x = 1$.



Površinu tražimo po formuli.

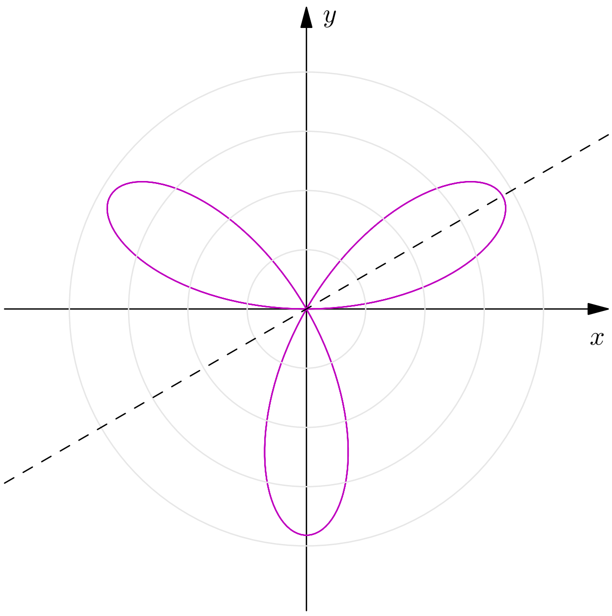
$$P = \int_{-1}^{1} \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right| dx = \int_{-1}^{1} \left| \frac{2-x^2-x^4}{2\left(1+x^2\right)} \right| dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{6} \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

Zadatak 2.79.(P) Izračunajte površinu omeđenu "ružom s tri latice", zadanu jednadžbom

$$r = a \sin 3\varphi, \qquad a > 0.$$

Rješenje. Crtanjem skice ove krivulje zaključujemo je ona simetrična i da dio krivulje omeđen s $\varphi = 0$ i $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ponavlja šest puta.



Dakle, možemo naći površinu dijela te krivulje u rasponu $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ i pomnožiti je sa šest. Po formuli računamo

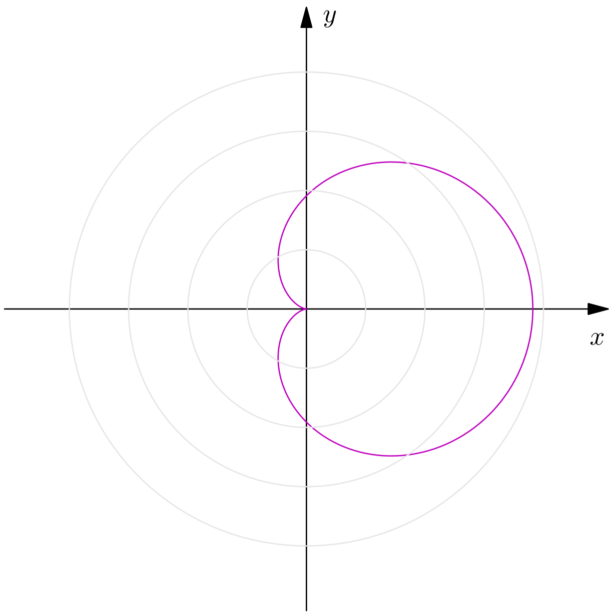
$$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2(3\varphi)\, d\varphi = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos(6\varphi)}{2} d\varphi = \frac{3}{2} a^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(6\varphi)\, d\varphi \right)$$

$$= \frac{3a^2}{2} \left(\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\sin(6\varphi)}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \right) = \frac{a^2 \pi}{4}.$$

Zadatak 2.80.$^{(P)}$ Izračunajte površinu omeđenu kardioidom

$$r = a\,(1 + \cos\varphi)\,, \qquad a > 0.$$

Rješenje. [Skica za intuiciju]



Integriramo po definiciji.

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 (1+\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + 2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2\varphi)\, d\varphi\right) = \frac{3a^2\pi}{2}.$$

Zadatak 2.81.(P) Odredite površinu omeđenu jednim lukom cikloide

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}, t \geqslant 0, \qquad a > 0$$

i osi apscisa.

Rješenje. Za formulu treba nam $\dot{x}$, a to je jednako $\dot{x} = a(1-\cos t)$. Sad po formuli računamo

$$P = \int_0^{2\pi} y(t)\,\dot{x}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\, dt = a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right) dt$$

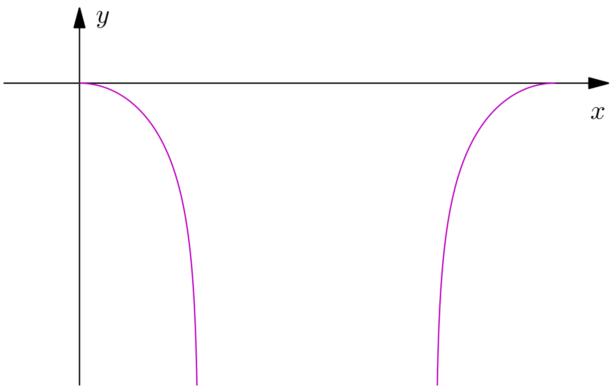
$$= a^2\left(\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi}\cos t dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2t)\, dt\right) = 3a^2\pi.$$

Zadatak 2.82. Nađite duljinu luka krivulje

$$y = \ln \cos x$$

za $x \in [0, a]$, gdje je $a \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Rješenje. [Skica za intuiciju]



Derivacija zadane funkcije je $y' = -\operatorname{tg} x$. Integracijom tražimo duljinu luka.

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_0^a \frac{dx}{\cos x}$$

$$= \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & 0 \mapsto 0 \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} & a \mapsto \operatorname{tg} \frac{a}{2} \end{bmatrix} = 2 \int_0^{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2 \int_0^{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \Bigg|_0^{\operatorname{tg} \frac{a}{2}} = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{a}{2} - 1} \right|$$

Raspišimo dobiveno rješenje.

$$\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{a}{2} - 1} \right| = \ln \left| \frac{\frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} + 1}{\frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} - 1} \right| = \ln \left| \frac{\frac{\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}}{\frac{\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}} \right| = \ln \left| \frac{\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2}} \right| = \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} + \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} - \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}} \right|$$

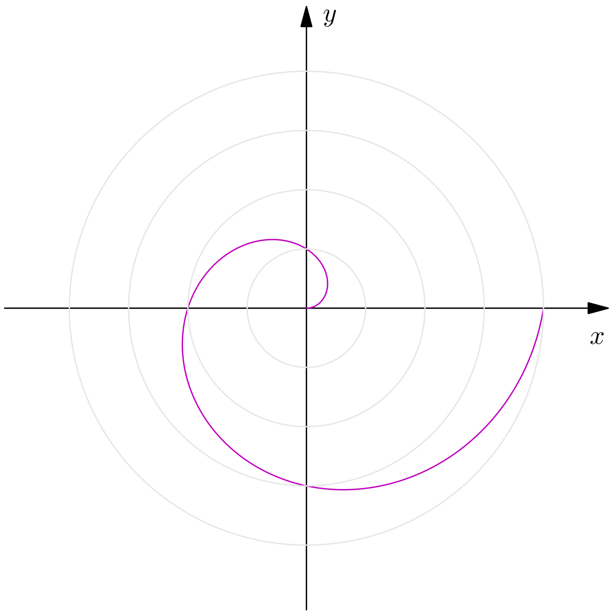
$$= \ln \left| \frac{\left(\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} + \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} + \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}\right)}{\frac{1-\cos a}{2} - \frac{1+\cos a}{2}} \right| = \ln \left| \frac{1 + 2 \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 a}{4}}}{-\cos a} \right| = \ln \left| \frac{1 + \sin a}{\cos a} \right|$$

$$= \ln \left| \frac{1 + \sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} \right| = \ln \left| \frac{\left(\sqrt{1 + \sin a}\right)\left(\sqrt{1 + \sin a}\right)}{\left(\sqrt{1 - \sin a}\right)\left(\sqrt{1 + \sin a}\right)} \right| = \ln \left| \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} \right|.$$

Zadatak 2.83.$^{(P)}$ Odredite duljinu prvog zavoja Arhimedove spirale

$$r = a\varphi, \qquad a > 0.$$

Rješenje.



Iz skice vidimo da je kut $\varphi \in [0, 2\pi]$, pa računamo po formuli.

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\varphi)^2 + a^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2} d\varphi = \begin{bmatrix} \varphi = \operatorname{sh}\psi & 0 \mapsto 0 \\ d\varphi = \operatorname{ch}\psi d\psi & 2\pi \mapsto \operatorname{Arsh} 2\pi \end{bmatrix}$$

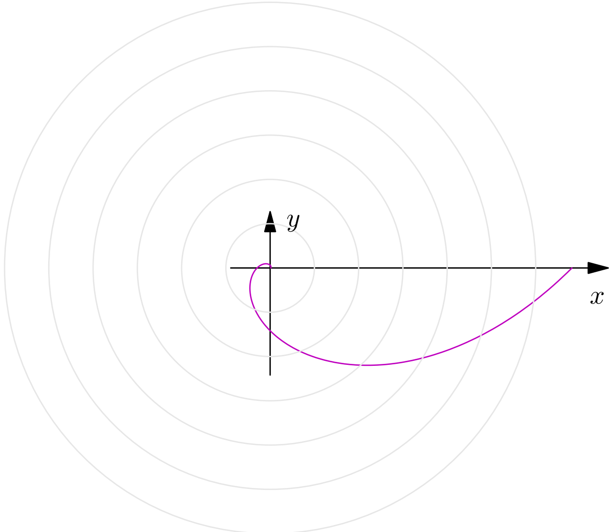
$$= a \int_0^{\operatorname{Arsh} 2\pi} \operatorname{ch}^2 \psi d\psi = \frac{a}{2} \left(\int_0^{\operatorname{Arsh} 2\pi} d\psi + \int_0^{\operatorname{Arsh} 2\pi} \operatorname{ch}(2\psi)\, d\psi \right) = \frac{a}{2} \left(\psi \Big|_0^{\operatorname{Arsh} 2\pi} + \operatorname{sh}\psi \operatorname{ch}\psi \Big|_0^{\operatorname{Arsh} 2\pi} \right)$$

$$= \frac{a}{2} \left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \operatorname{Arsh} 2\pi \right) = a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2} \right).$$

Zadatak 2.84.$^{(P)}$ Izračunajte duljinu prvog zavoja logaritamske spirale

$$y = e^{\varphi}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Rješenje. [Skica za intuiciju]



Računamo po formuli.

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(e^{\varphi})^2 + (e^{\varphi})^2} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^{\varphi} d\varphi = \sqrt{2} e^{\varphi} \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2} \left(e^{2\pi} - 1 \right).$$

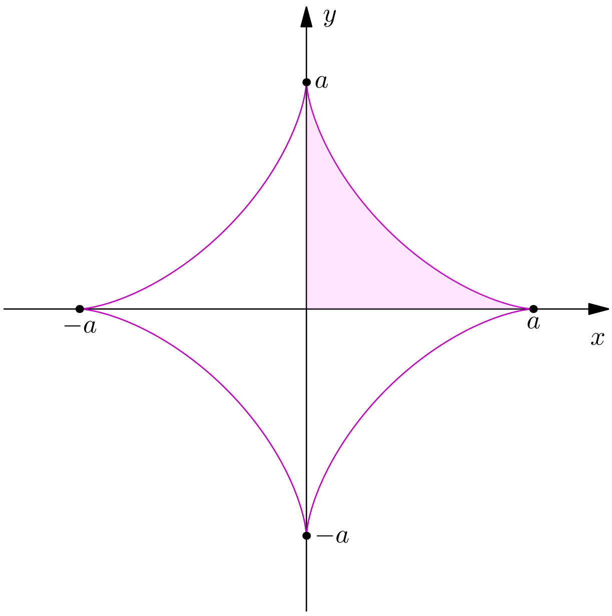
Zadatak 2.85.$^{(P)}$ Odredite parametarsku jednadžbu astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

i izračunajte joj duljinu.

Rješenje. Može se izvesti da je parametarska jednadžba astroide jednaka

$$\begin{cases} x = a \cos(3\varphi), \\ y = a \sin(3\varphi) \end{cases}.$$



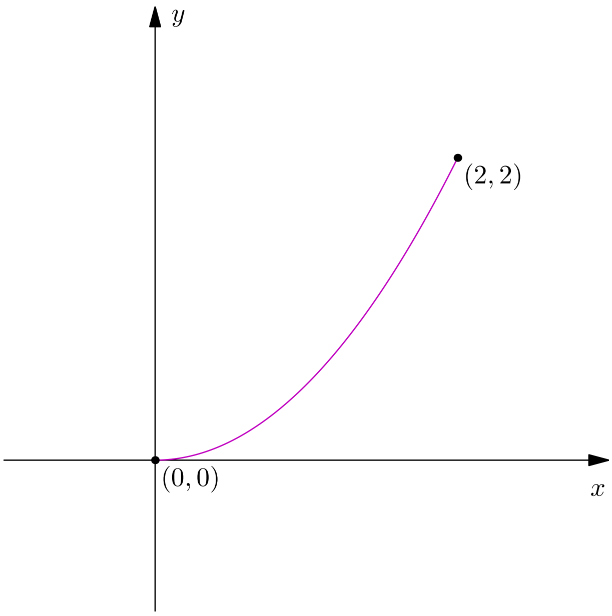
Također, uz skicu vidimo da je astroida "periodična" i da se četiri puta ponavlja isti svod koji se ponavlja na dijelu $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dakle, možemo izračunati duljinu luka na tome dijelu i pomnožiti s 4. Računamo po formuli.

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\sin\varphi\cos^2\varphi)^2 + \left(3a\sin^2\varphi\cos\varphi\right)^2} d\varphi = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} d\varphi$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \begin{bmatrix} \psi = \sin\varphi & 0 \mapsto 0 \\ d\psi = \cos\varphi d\varphi & \frac{\pi}{2} \mapsto 1 \end{bmatrix} = 12a\int_0^1 \psi d\psi = 12a \cdot \frac{\psi^2}{2}\Big|_0^1 = 6a.$$

Zadatak 2.86. Izračunajte duljinu luka parabole $y = \frac{x^2}{2}$ od točke $(0,0)$ do točke $(2,2)$.

Rješenje. Derivacija zadane funkcije je $y' = x$. Integracijom tražimo duljinu luka.



$$l = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} x = \operatorname{tg} t & 0 \mapsto 0 \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} & 2 \mapsto \operatorname{arctg} 2 \end{bmatrix} = \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{1}{\cos^2 t}\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{1}{\cos^2 t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}dt = \int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{dt}{\cos^3 t} = \begin{bmatrix} s = \operatorname{tg}\frac{t}{2} & 0 \mapsto 0 \\ dt = \frac{2ds}{1+s^2} & \operatorname{arctg} 2 \mapsto \operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg} 2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= 2\int_0^{\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}} \frac{\frac{1}{1+s^2}}{\left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^3}ds = 2\int_0^{\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}} \frac{\left(1+s^2\right)^2}{\left(1-s^2\right)^3}ds$$

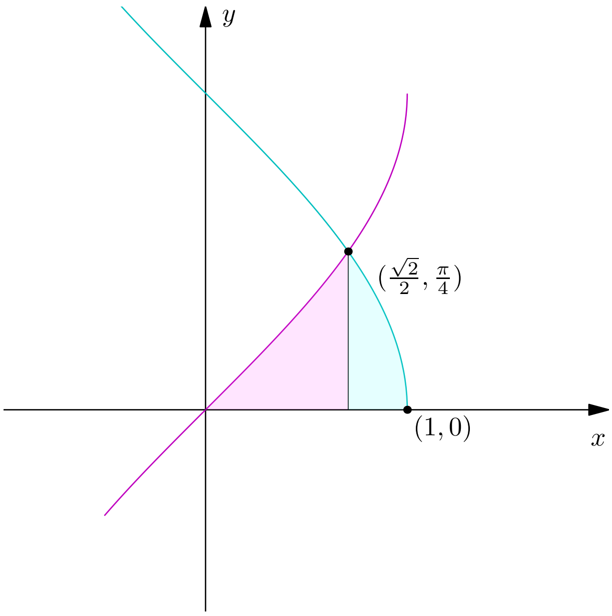
$$= -2\int_0^{\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}} \left(-\frac{1}{4(1+s)} + \frac{1}{4(1+s)^2} - \frac{1}{2(1+s)^3} + \frac{1}{4(s-1)} + \frac{1}{4(s-1)^2} + \frac{1}{2(s-1)^3}\right) ds$$

$$= [\ldots] = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$$

Sami riješite [...] – svi su već prije viđeni integrali.

Zadatak 2.87. Odredite površinu omeđenu krivuljama $y = \arcsin x$ i $y = \arccos x$ te osi apscisa. [Uputa: integrirajte po varijabli y].

Rješenje. Presjek navedenih krivulja je točka $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Računamo površinu.

$$P = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \arccos x dx = \begin{bmatrix} x = \sin t & 0 \mapsto 0 \\ dx = \cos t dt & \frac{\sqrt{2}}{2} \mapsto \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x = \cos s & \frac{\sqrt{2}}{2} \mapsto \frac{\pi}{4} \\ dx = -\sin s ds & 1 \mapsto 0 \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} s \sin s ds = \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \cos t dt & v = \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u = s & du = ds \\ dv = \sin s ds & v = -\cos s \end{bmatrix}$$

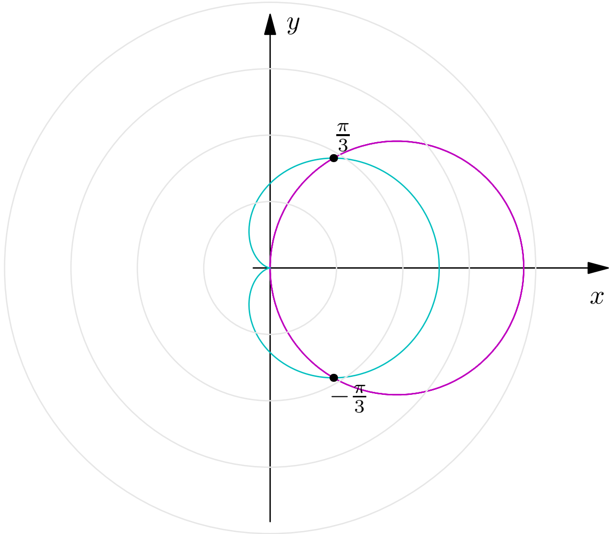
$$= t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t dt - s \cos s \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos s ds = \sqrt{2} - 1$$

Zadatak 2.88. (P) Odredite površinu lika koji se nalazi unutar kružnice $r = 3\cos\varphi$, ali izvan kardioide $r = 1 + \cos\varphi$.

Rješenje. Pronađimo prvo točke presjeka. Za njih vrijedi

$$\begin{aligned} 3\cos\varphi &= 1 + \cos\varphi \\ 2\cos\varphi &= 1 \\ \cos\varphi &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

iz čega dobivamo $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$. Iz skice vidimo da je površina kad je $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ i $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ jednaka, pa možemo računati dvostruku površinu kad je $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.



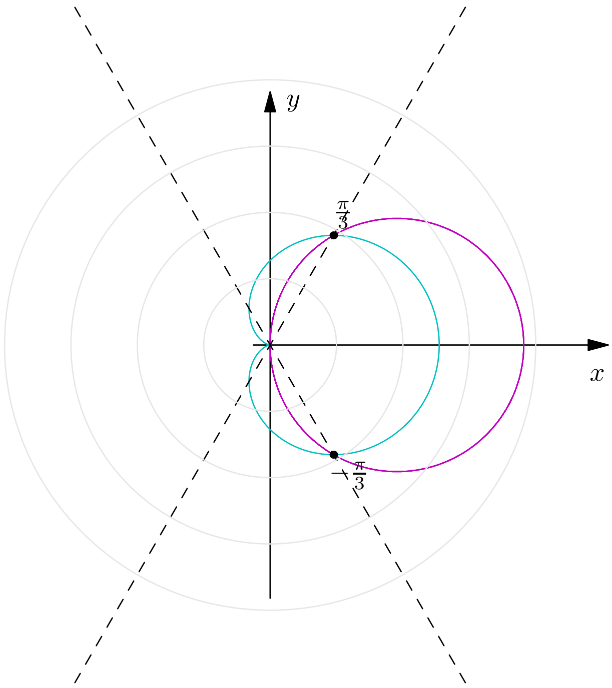
Po formuli imamo

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left((3\cos\varphi)^2 - (1+\cos\varphi)^2\right) d\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(8\cos^2\varphi - 2\cos\varphi - 1\right) d\varphi = [\ldots] = \pi.$$

Raspišite dio [...] [već smo raspisali u puno prošlih primjera iste integrale].

Zadatak 2.89.$^{(P)}$ Odredite površinu lika koji se nalazi unutar kružnice $r = 3\cos\varphi$ i unutar kardioide $r = 1 + \cos\varphi$.

Rješenje. Već smo u *zadatku 2.88.* dobili da se ove dvije krivulje sijeku u točkama $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$. Skicom ove dvije krivulje vidimo da je područje u presjeku te dvije krivulje opet isto za $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ i $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, pa možemo računati dvostruku površinu na jednom od ta dva segmenta. Također primijetimo da računanjem integrala od 0 do $\frac{\pi}{3}$ nećemo pokriti cijelu površinu - pokrit ćemo onaj dio omeđen krivuljom $r = 1 + \cos\varphi$. Ostaje još dio od $\frac{\pi}{3}$ do $\frac{\pi}{2}$ omeđen krivuljom $r = 3\cos\varphi$. Izračunat ćemo te dvije površine posebno i zbrojiti ih.



Vrijedi

$$P = A_1 + A_2,$$

gdje je A_1 površina koju $r = 1 + \cos\varphi$ zatvara na dijelu $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, a A_2 površina koju $r = 3\cos\varphi$ zatvara na dijelu $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. Vrijedi

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{9}{8}\sqrt{3},$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{3}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right),$$

pa je konačna površina jednaka $P = \frac{5\pi}{4}$.

Zadatak 2.90. Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = \sin x, x \in [0, \pi]$ i $x-$osi oko $y-$osi.

Rješenje. Koristimo formulu iz službenog dokumenta. Vrijedi

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = 2\pi \left(-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \right)$$

$$= 2\pi\left(-\pi\cos\pi\right) = 2\pi^2$$

Zadatak 2.91. Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $y = x^4$ i pravcem $y = 1$ oko osi y.

Rješenje. Računamo po formuli.

$$V_y = 2\pi\int_0^1 x^5 dx = 2\pi\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Zadatak 2.92. Odredite volumen rotacijskog paraboloida koji nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljom $x = y^2$ i pravcem $x = a, a > 0$ oko $x-$osi.

Rješenje. Iz $x = y^2$ dobivamo $y = \pm\sqrt{x}$, no možemo uzeti i računati zadatak s funkcijom $y = f(x) = \sqrt{x}$. Naime, Uzimanjem samo toga dijela krivulje rotacijom oko $x-$osi ćemo dobiti čitav volumen koji tražimo. Računamo

$$V_x = \pi\int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^a x dx = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2\pi}{2}$$

Zadatak 2.93.$^{(P)}$ Odredite volumen tijela nastalog rotacijom kardioide

$$r = a\left(1+\cos\varphi\right)$$

oko polarne osi.

Rješenje. Računamo po formuli.

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^\pi \left(a\left(1+\cos\varphi\right)\right)^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^\pi \left(1+\cos\varphi\right)^2 \sin\varphi d\varphi$$

$$= \begin{bmatrix} \psi = 1+\cos\varphi & 0\mapsto 2 \\ d\psi = -\sin\varphi d\varphi & \pi\mapsto 0 \end{bmatrix} = \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^2 \psi^3 d\psi = \frac{2\pi a^3}{3}\cdot\frac{\psi^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{8a^3\pi}{3}.$$

Zadatak 2.94. Izračunajte površinu plohe koja nastaje rotacijom dijela krivulje $y = \frac{x^3}{3}$ od $x = 0$ do $x = 1$ oko osi y.

Rješenje. Računamo

$$S_y = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+x^4}dx = \begin{bmatrix} t = x^2 & 0\mapsto 0 \\ dt = 2xdx & 1\mapsto 1 \end{bmatrix} = \pi\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} s & 0\mapsto 0 \\ dt = \frac{ds}{\cos^2 t} & 1\mapsto \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{ds}{\cos^3 s} = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{\cos x} & du = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{bmatrix} = \pi \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos x} dx \right)$$

$$= \pi \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx \right) = \pi \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \right)$$

Preostaje izračunati posljednji sumand, koji se lako dobije standardnom univerzalnom supstitucijom. U konačnici za traženi integral vrijedi

$$S_y = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \right).$$

3 Redovi

3.1 Osnovna svojstva

Zadatak 3.2. Ispitajte konvergenciju reda i odredite im sumu ako konvergiraju.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$$

Rješenje. Pomicajući indeks ovog reda dobivamo da je on jednak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{n}}.$$

Gledajući apsolutnu vrijednost dobivamo red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n},$$

što konvergira kao geometrijski red s $q = \frac{1}{2}$. Početni red apsolutno konvergira pa i konvergira. Imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{n}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2}$$

Rješenje. Rastavom na parcijalne razlomke dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Promotrimo parcijalne sume ovoga reda.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

(c)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-1}$$

Rješenje 1.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right)$$

Promatranjem parcijalnih suma dobivamo

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2k}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{3n^2+3n+2}{2n^2+2n} = 2H_n - \frac{3n^2+3n+2}{2n^2+2n}$$

što teži u $+\infty$ kad $n \to +\infty$ jer je harmonijski red divergentan. Dakle, red divergira.

Rješenje 2. Definirajmo $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$. Uvjerite se da je f padajuća i nenegativna. Vrijedi

$$\int_2^{\xi} \frac{2xdx}{x^2-1} = \begin{bmatrix} t = x^2-1 & 2 \mapsto 3 \\ dt = 2xdx & \xi \mapsto \xi^2-1 \end{bmatrix} = \int_3^{\xi^2-1} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_3^{\xi^2-1} = \ln \frac{\xi^2-1}{3}$$

što teži u $+\infty$ kad $\xi \to +\infty$. Dakle, početni red divergira po integralnom kriteriju.

Rješenje 3. Vrijedi

$$\frac{1}{n} < \frac{2n}{n^2-1}$$

pa red divergira po usporednom kriteriju.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, \quad \text{gdje je } \alpha \in \langle 0, \pi \rangle$$

Rješenje. Izraz $\sin n\alpha$ očito ne konvergira u 0 kad $n \to +\infty$, pa nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije reda.

Zadatak 3.3. Ispitajte konvergenciju integrala i odredite im sumu ako konvergiraju.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Rješenje. Po svojstvima logaritama imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln (n+1)}{\ln n}.$$

Računajući parcijalne sume imamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1+1}{1}\right) + \ln\left(\frac{2+1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)$$

a znamo da $\ln(n+1) \to +\infty$ kad $n \to +\infty$. Dakle, suma ne konvergira.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}\right), \quad \text{gdje je } a > 0$$

Rješenje.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[k]{a} - \sqrt[k+1]{a}\right) = a - \sqrt{a} + \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} + \cdots - \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a} = a - \sqrt[n+1]{a}$$

Iz činjenice da $\sqrt[n+1]{a} \to 1$ kad $n \to +\infty$ imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = a - 1$.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$$

Rješenje. Nužan uvjet konvergencije nije zadovoljen. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{n+1}}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(n+1)}{n}$$

Prelaskom na limes funkcije te korištenjem L'Hôpitalovog pravila dobivamo da je gornji limes 0. Dakle, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^0 = 1$.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$$

Rješenje. Imamo
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{2n^2}}=1,$$
pa kako $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira kao Dirichletov red s parametrom $p>1$ imamo da i početni red konvergira. Imamo
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\frac{2}{4n^2}=\operatorname{arctg}\frac{2n+1-2n+1}{1-1+4n^2+2n-2n}=\operatorname{arctg}\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)}$$
$$=\operatorname{arctg}(2n+1)-\operatorname{arctg}(2n-1)$$
pa su parcijalne sume oblika
$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}=\sum_{k=1}^{n}(\operatorname{arctg}(2k+1)-\operatorname{arctg}(2k-1))$$
$$=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}5-\operatorname{arctg}3\cdots+\operatorname{arctg}(2n+1)=\operatorname{arctg}(2n+1)-\operatorname{arctg}1$$
što teži u $\frac{\pi}{4}$ kad $n\to+\infty$.

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

Rješenje. Promatramo parcijalne sume.
$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+2}-2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\\&=\sum_{k=3}^{n+2}\sqrt{k}-2\sum_{k=2}^{n+1}\sqrt{k}+\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\\&=\sum_{k=3}^{n}\sqrt{k}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-2\sum_{k=3}^{n}\sqrt{k}-2\sqrt{2}-2\sqrt{n+1}+\sum_{k=3}^{n}\sqrt{k}+1+\sqrt{2}\\&=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\end{aligned}$$

Također, imamo
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=0$$
pa je limes parcijalnih suma jednak $1-\sqrt{2}$.

3.2 Kriteriji konvergencije reda

Zadatak 3.12. Ispitajte konvergenciju redova.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$$

Rješenje. Definirajmo $a_n = \frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$. Očito je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, jer je nazivnik većeg stupnja od brojnika. Ispitajmo je li a_n padajuć.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< a_n \\ \frac{2(n+1)^2}{(n+1)^4 - (n+1)^2 + 1} &< \frac{2n^2}{n^4 - n^2 + 1} \\ 2(n+1)^2 \left(n^4 - n^2 + 1\right) &< 2n^2 \left((n+1)^4 - (n+1)^2 + 1\right) \\ 2\left(n^2 + 2n + 1\right)\left(n^4 - n^2 + 1\right) &< 2n^2 \left(\left(n^2 + 2n + 1\right)^2 - n^2 - 2n\right) \\ &\dots \\ 0 &< 4n^5 + 10n^4 + 8n^3 + 2n^2 - 4n - 2 \end{aligned}$$

što očito vrijedi. Dakle, početni red konvergira po Leibnizovom kriteriju.

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)\ln n}$$

Rješenje. Definirajmo $a_n = \frac{1}{(n+1)\ln n}$. Očito je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ te vrijedi

$$\frac{1}{(n+2)\ln(n+1)} < \frac{1}{(n+1)\ln n}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Dakle, red konvergira po Leibnizovom kriteriju.

Zadatak 3.13. Ispitajte konvergenciju redova.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

pa kako je $0 < 1$ po D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da početni red konvergira [čak i apsolutno].

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}} = \frac{1}{5} \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{5},$$

pa kako je $\frac{1}{5} < 1$ po D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da početni red konvergira [čak i apsolutno].

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Znamo da je gornji limes jednak

$$e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-1}-1\right)n},$$

pa računamo limes u eksponentu broja e. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1} - 1\right) n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-n-1}{n+1}\right) n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+1} = -1$$

pa je konačni limes jednak $e^{-1} = \frac{1}{e}$. Kako je $\frac{1}{e} < 1$ po D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da početni red konvergira [čak i apsolutno].

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n^2+1}{n+1}}$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{n^2+1}{n^2+n}} = 2,$$

pa kako je $2 > 1$ po Cauchyjevom kriteriju zaključujemo da početni red divergira.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Rješenje. Ideja je dokazati da opći član ovog niza ne konvergira k 0, pa nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije reda. Dokazat ćemo da podniz danog niza koji sadrži samo neparne članove divergira u $+\infty$, pa će slijediti da i zadani niz teži u $+\infty$ iz činjenice da je limes podniza isti kao limes niza. Neka je $n = 2k-1$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} a_n = a_{2k-1} &= \frac{(4k-3)!!}{2\,(2k-1)!!} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \\ &= \frac{1}{2^{2k+1}} \underbrace{(4k-3)}_{>k-1} \underbrace{(4k-5)}_{>k-2} \dots \underbrace{(2k+1)}_{>1} \\ &> \frac{(k-1)!}{2^{2k+1}} \end{aligned}$$

a za zadnji izraz znamo da teži u beskonačnost jer faktorijeli rastu brže od bilo koje potencije.

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)\,(1+a^2)\dots(1+a^n)}, \qquad a > 0$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^{n+1})}}{\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}}$$

Rastavljamo na slučajeve u ovisnosti o a.

1) Za $a > 1$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}} = 0$$

pa kako je $0 < 1$ po D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da početni red konvergira za $a > 1$ [čak i apsolutno]

2) Za $a = 1$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+1^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

pa kako je $\frac{1}{2} < 1$ po D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da početni red konvergira za $a = 1$ [čak i apsolutno].

3) Za $a \in \langle 0, 1\rangle$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a}{1+a^{n+1}} = a$$

pa kako je $a < 1$ po D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da početni red konvergira za $a < 1$ [čak i apsolutno].

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\dots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}\right)=\sqrt{2}-1$$

pa kako je $\sqrt{2}-1<1$ po D'Alembertovom kriteriju zaključujemo da početni red konvergira [čak i apsolutno].

Zadatak 3.14. Ispitajte konvergenciju redova.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$$

Rješenje 1. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}=\frac{1}{2}\ln\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}$$

Iz teorema o sendviču i činjenice da je $\cos x\in[-1,1]$ imamo

$$\underbrace{\sqrt[n]{-n}}_{\to 1}\leqslant\sqrt[n]{n\cos 2\frac{n\pi}{3}}\leqslant\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1},$$

pa je gornji limes jednak $\frac{1}{2}\ln 1=0$. Kako je $0<1$, po Cauchyjevom kriteriju red konvergira [čak i apsolutno].

Rješenje 2. Imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Za desni red imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2},$$

pa kako je $\frac{1}{2}<1$ red konvergira po D'Alembertovom kriteriju [čak i apsolutno]. Kako desni red konvergira, konvergira i početni red po usporednom kriteriju.

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$$

Rješenje. Definirajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}$. Računamo

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_{2}^{\xi} \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & 2 \mapsto \ln 2 \\ dt = \frac{dx}{x} & \xi \mapsto \ln \xi \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{\xi \to +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln \xi} \frac{dt}{t \ln t} = \begin{bmatrix} u = \ln t & \ln 2 \mapsto \ln \ln 2 \\ du = \frac{dt}{t} & \ln \xi \mapsto \ln \ln \xi \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{\xi \to +\infty} \int_{\ln \ln 2}^{\ln \ln \xi} \frac{du}{u} = \lim_{\xi \to +\infty} \ln u \Big|_{\ln \ln 2}^{\ln \ln \xi} = +\infty$$

pa red divergira po integralnom kriteriju.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Rješenje. Definirajmo $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Očito je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$. Također vrijedi

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} > \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}, \quad \forall n > 1,$$

pa početni red konvergira po Leibnizovom kriteriju.

(d)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$$

Rješenje. Imamo

$$\frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{\ln n^n} \leqslant \frac{1}{\ln n!}.$$

Dokažimo da lijevi red divergira po integralnom kriteriju.

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\xi \to +\infty} \int_{2}^{\xi} \frac{dx}{x \ln x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & 2 \mapsto \ln 2 \\ dt = \frac{dx}{x} & \xi \mapsto \ln \xi \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{\xi\to+\infty} \int\limits_{\ln 2}^{\ln\xi} \frac{dt}{t} = \lim_{\xi\to+\infty} \ln t\Big|_{\ln 2}^{\ln\xi} = \lim_{\xi\to+\infty} (\ln\ln\xi - \ln\ln 2) = +\infty$$

Kako lijevi red divergira, tada divergira i početni red po usporednom kriteriju.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \operatorname{sh}\frac{1}{n} \cos n$$

Rješenje. Iz činjenice da je kosinus funkcija omeđena odozgo s 1 vrijedi

$$\left|\sin\frac{1}{n}\operatorname{sh}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\right| = \left|\sin\frac{1}{n}\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right|\left|\cos\frac{1}{n}\right| \leqslant \left|\sin\frac{1}{n}\operatorname{sh}\frac{1}{n}\right|.$$

Sada kad $n\to\infty$ vrijedi $\frac{1}{n}\to 0$ pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{n}\operatorname{sh}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \begin{bmatrix} m = \frac{1}{n} \\ m \mapsto 0\end{bmatrix} = \lim_{m\to 0} \underbrace{\left|\frac{\sin m}{m}\right|}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left|\frac{\operatorname{sh} m}{m}\right|}_{\to 1} = 1$$

jer su to tablični limesi za sinus i sinus hiperbolni. Stoga, jer red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira kao Dirichletov red s parametrom $p > 1$, po graničnom kriteriju konvergira i $\sum \frac{1}{n}\operatorname{sh}\frac{1}{n}$, pa po usporednom kriteriju konvergira i početni red.

(f)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\ln^n n}$$

Rješenje. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln\frac{\sqrt[n]{n^2}}{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2\ln n}{n} - \ln\ln n}$$

Kako $\frac{2\ln n}{n}\to 0$ kad $n\to+\infty$, gornji limes ide u $-\infty$ kad $n\to\infty$. Tada $e^{-\infty}\to 0$, pa kako je $0<1$ početni red konvergira po Cauchyjevom kriteriju.

(g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

Rješenje. Vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}} = 1$$

pa nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije reda.

Zadatak 3.15. Ispitajte uvjetnu i apsolutnu konvergenciju redova.

(a)
$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$$

Rješenje. Prvo ispitujemo apsolutnu konvergenciju. Vrijedi
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}} = 1,$$
početni red divergira po graničnom kriteriju. No, vidimo da za definirani $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$ vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ te
$$\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
pa red uvjetno konvergira po Leibnizovom kriteriju.

(b)
$$\sum \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$$

Rješenje. Prvo ispitujemo apsolutnu konvergenciju. Vrijedi
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{3\ln n}{n}} = \frac{1}{3}$$
pa kako je $\frac{1}{3} < 1$ po Cauchyjevom kriteriju zaključujemo da početni red apsolutno konvergira.

(c)
$$\sum (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Rješenje. Prvo ispitujemo apsolutnu konvergenciju. Vrijedi
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$
pa kako harmonijski red divergira, divergira i početni red po graničnom kriteriju. No, vidimo da za definirani $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ te
$$\begin{aligned} n &< n+1 \\ \frac{1}{n} &> \frac{1}{n+1} \\ 1+\frac{1}{n} &> 1+\frac{1}{n+1} \\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &> \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

pa red uvjetno konvergira po Leibnizovom kriteriju.

(d)

$$\sum \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{n}}$$

Rješenje. Uočimo da vrijedi

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ 0, & n \equiv 1,3 \pmod 4 \\ 1, & n \equiv 0 \pmod 4 \end{cases}.$$

Dakle, sumandi u danom redu su jednaki

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{4}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$	...

Dakle, kada "ignoriramo" nule, red je jednak

$$\sum a_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \cdots = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}},$$

što očito konvergira po Leibnizovom kriteriju. No, ovaj red uvjetno konvergira, jer kad uzmemo apsolutnu vrijednost dobivamo Dirichletov red s parametrom $p = \frac{1}{2}$. Dakle, red uvjetno konvergira.

(e)

$$\sum (\sin \sin n)^n$$

Rješenje. Sinus je ograničena funkcija, tj. vrijedi $\sin n \leqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Konkretno, vrijedi

$$0 \leqslant \sin n \leqslant 1.$$

Također, sinus je rastuća funkcija na $[0,1]$, pa vrijedi

$$0 \leqslant \sin \sin n \leqslant \sin 1.$$

Dakle, vrijedi

$$\sum |\sin \sin n|^n \leqslant \sum (\sin 1)^n$$

pri čemu desni red očito konvergira kao geometrijski red s $q = \sin 1 < 1$. Dakle, po usporednom kriteriju apsolutno konvergira i početni red.

Zadatak 3.16. Pretpostavimo da je $\sum a_n$ konvergentni red s pozitivnim članovima. Koji od sljedećih redova nužno konvergiraju? [U svakom podzadatku ili dokažite da novi red mora konvergirati ili nađite primjer reda $\sum a_n$ za kojeg novi red divergira.]

(a)

$$\sum \frac{a_n}{n}$$

Rješenje. Za svaki prirodan broj n vrijedi $n \geqslant 1$, pa tako vrijedi i $\frac{1}{n} \leqslant 1$. Tada dobivamo ocjenu

$$\sum \frac{a_n}{n} \leqslant \sum a_n$$

iz koje je očito da, uz pretpostavku da desni red konvergira, po usporednom kriteriju konvergira i lijevi.

(b)

$$\sum \frac{1}{n^{100} a_n}$$

Rješenje. Neka je $a_n = \frac{1}{n^{100}}$. Red $\sum a_n$ konvergira kao Dirichletov red s parametrom $p = 100 > 1$, no novi red glasi

$$\sum \frac{1}{n^{100} \cdot n^{-100}} = \sum 1$$

što očito divergira.

(c)

$$\sum \operatorname{sh} a_n$$

Rješenje. Kako smo prepostavili da je $\sum a_n$ konvergentan red, tada vrijedi nužan uvjet konvergencije reda, tj. $a_n \to 0$ kad $n \to +\infty$. Tada po usporednom [graničnom za redove] kriteriju iz poznatog limesa za sinus hiperbolni imamo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\operatorname{sh} a_n}{a_n} = 1,$$

pa i početni integral nužno konvergira.

(d)

$$\sum a_n \sin n$$

Rješenje. Sinus je ograničena funkcija, tj. $\forall n, |sinn| \leqslant 1$. Tada je po usporednom kriteriju

$$\sum a_n |\sin n| \leqslant \sum a_n,$$

a kako smo pretpostavili da desni red konvergira, po usporednom kriteriju nužno konvergira i početni red.

(e)

$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

Rješenje. Promotrimo parcijalne sume. Po C-S-B nejednakosti vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}.$$

Puštanjem limesa $n \to +\infty$ po neprekidnosti i strogom rastu korijena te činjenici da $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergira kao Dirichletov red s parametrom $p = 2$ slijedi da desni red konvergira. Dakle, nužno konvergira i početni red po usporednom kriteriju.

(f)

$$\sum \sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

Rješenje. Uzmimo $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$. Promotrimo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Definirajmo $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$. Uvjerite se da je f padajuća i nenegativna. Vrijedi

$$\int_2^{\xi} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \begin{bmatrix} t = \ln x & \xi \mapsto \ln \xi \\ dt = \frac{dx}{x} & 2 \mapsto \ln 2 \end{bmatrix} = \int_{\ln 2}^{\ln \xi} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln \xi} = -\frac{1}{\ln \xi} + \frac{1}{\ln 2}.$$

Vidimo da, kad $\xi \to +\infty$ vrijedi $\frac{1}{\ln \xi} \to 0$ te vrijednost integrala teži u $\frac{1}{\ln 2} < \infty$. Dakle, konvergira integral pa po usporednom kriteriju konvergira i red. Promotrimo sada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2 \ln^2 n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Analognim razmišljanjem, definiranjem $g(x) = \frac{1}{x \ln x}$ te istom supstitucijom u integralu dobivamo da integral divergira pa divergira i red.

Zadatak 3.17. Neka je $\sum a_n$ apsolutno konvergentan red. Dokažite da je tada konvergentan i red $\sum a_n^2$. Vrijedi li obrat?

Rješenje. Iznosimo dva načina rješavanja.

1. Primijenimo granični kriterij za redove. Iz pretpostavke da $\sum a_n$ apsolutno konvergira imamo $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$. Tada imamo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n^2}{|a_n|} = 0$$

pa po graničnom kriteriju i novi red konvergira.

2. Pretpostavimo da red $\sum |a_n|$ konvergira. Tada vrijedi $|a_n| \to 0$ kad $n \to +\infty$, pa tada $(\exists k > 0)\,(|a_n| < k)$. Tada također vrijedi $(\forall n \in \mathbb{N})\left(|a_n|^2 < k\,|a_n|\right)$. Sada po usporednom kriteriju konvergira i traženi red.

Obrat ne vrijedi. Red $\sum \left|\frac{1}{n^2}\right|$ konvergira apsolutno, a red $\sum \frac{1}{n}$ ne konvergira uopće.

Zadatak 3.18. Neka je $\sum a_n$ konvergentan red takav da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$a_n > a_{n+1} > 0, \quad \forall n \geqslant m.$$

Dokažite da je $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

Rješenje. Mora vrijediti $(a_n) \to 0$ jer je $\sum a_n$ konvergentan i (a_n) padajuć. Također, zaključujemo da je niz parcijalnih suma Cauchyjev. Neka je $\varepsilon > 0$. Tvrdimo

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant M \text{ je } 0 < na_n < \varepsilon.$$

Za $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ primijenimo Cauchyjevost $\implies \exists T \in \mathbb{N}, \forall n, m \geqslant T$ je

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uzmimo $m = T$ fiksan te $n \geqslant T$. Tada je $a_{T+1} + a_{T+2} + \cdots + a_n < \varepsilon$. Također, zbog padajućosti niza je

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &> a_{T+1} + \cdots + a_n \\ &> a_n + a_n + \cdots + a_n \\ &= (n-T)\,a_n \end{aligned}$$

iz čega proizlazi $Ta_n + \frac{\varepsilon}{2} > na_n$. Sjetimo se da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa $\exists P \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant P$ je $a_n < \frac{\varepsilon}{2T}$. Dakle, $Ta_n < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geqslant P$. Dakle, uzmemo $M = \max\{P, T\}$ i onda $\forall n \geqslant M$ vrijedi

$$\begin{aligned} na_n &< \frac{\varepsilon}{2} + Ta_n && \text{jer } n \geqslant T \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && \text{jer } n \geqslant P \\ na_n &< \varepsilon && \forall n \geqslant M. \end{aligned}$$

Dobili smo što smo trebali dobiti, dakle tvrdnja je dokazana.

Zadatak 3.19. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivan strogo padajuć niz. Dokažite Cauchyjev kondenzacijski test:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergira.}$$

Rješenje. Iz činjenice da je (a_n) padajuć niz imamo

$$a_{2^k} \leqslant a_{2^{k-1}+i} \leqslant a_{2^{k-1}}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 2^{k-1}.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Prepostavimo da red $\sum a_n$ konvergira. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} 2^{k-1} a_{2^k} &= \overbrace{a_{2^k} + a_{2^k} + \cdots + a_{2^k}}^{2^{k-1} \text{ sumanada}} \\ &\leqslant a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^{k-1}+2^{k-1}} \\ &= \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi

$$\sum_{k=1}^{K} 2^{k-1} a_{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{K} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n \right) = \sum_{n=2}^{2^k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dakle, kad $K \to +\infty$, po usporednom kriteriju konvergira i red $\sum 2^k a_k$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Pretpostavimo da red $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergira. Tada

$$a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots + a_{2^{n-1}+2^{-1}} \leqslant \underbrace{a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}}}_{2^{n-1} \text{ sumanada}}$$

Dakle, vrijedi

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n \leqslant 2^{k-1} a_{2^{k-1}}.$$

Zaključujemo

$$\sum_{n=2}^{2^K} a_n = \sum_{n=1}^{K} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n \right) \leqslant \sum_{k=1}^{K} 2^{n-1} a_{2^{n-1}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^{k-1}}.$$

Iz činjenice da je $\sum\limits_{n=2}^{N} a_n$ rastuć zaključujemo

$$\sum_{n=2}^{N} a_n \leqslant \sum_{n=2}^{2^k} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^{k-1}}.$$

Dakle, gornji je red ograničen odozgo i rastuć pa konvergira.

Zadatak 3.20. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ divergentni redovi. Može li red $\sum (a_n - b_n)$ biti konvergentan?

Rješenje. Definirajmo $a_n = b_n = n$. Tada $\sum n$ divergira, a $\sum (n-n) = \sum 0 = 0$ konvergira u 0.

Uočimo da smo mogli uzeli proizvoljan niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji red divergira. Definirajmo $a_n = b_n$. Tada $\sum a_n = \sum b_n$ divergiraju, a $\sum (a_n - b_n) = \sum 0 = 0$ konvergira u 0.

3.3 Taylorovi redovi

Zadatak 3.30. Odredite radijus konvergencije i interval konvergencije redova potencija.

(a)

$$\sum 2^{n^2} x^{n!}$$

Rješenje. Neka je $|x| \geqslant 1$. Za opći član $a_n = 2^{n^2} x^{n!}$ tada vrijedi

$$|a_n| = \left|2^{n^2}\right| |x|^{n!} > 2^{n^2} \to \infty$$

kad $n \to +\infty$. Dakle, tada red sigurno ne konvergira. Pretpostavimo sada da je $|x| < 1$. Ocekujemo da ce $x^{n!}$ jako brzo težiti u 0, pa koristimo to da ograničimo naš red s nekim laganim geometrijskim redom. Dokažimo prvo jednu lemu koja će nam pomoći ograničiti naš izraz i riješiti ovaj zadatak.

Lema. Neka je $0 < t < 1$. Tada postoji $M \in \mathbb{N}$ takav da $\forall n \geqslant M$,

$$t^{n!} < \frac{1}{3^{n^2}}.$$

Dokaz. Za $t < 1$ slijedi da $\exists p \in \mathbb{N}, t < \frac{p}{p+1}$. Tada je

$$\begin{aligned} t^{n!} &< \frac{p^{n!}}{(p+1)^{n!}} \\ &= \frac{p^{n!}}{p^{n!} + (n!)\, p^{n!-1} + \cdots + 1} \\ &< \frac{p^{n!}}{p^{n!} + (n!)\, p^{n!-1}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{n!}{p}} \end{aligned}$$

Dakle, za $t^{n!} < \frac{1}{3^{n^2}}$ dovoljno je dobiti

$$\frac{1}{1 + \frac{n!}{p}} < \frac{1}{3^{n^2}} \iff 3^{n^2} < 1 + \frac{n!}{p},$$

a to vrijedi jer faktorijeli rastu brže od eksponencijalnih funkcija. Sad imamo

$$\begin{aligned} |x|^{n!} &< \frac{1}{3^{n^2}} \\ 2^{n^2} |x|^{n!} &< \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

Uočimo da red $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergira pa po usporednom kriteriju konvergira i početni red te je radijus konvergencije jednak 1, a interval konvergencije $I = \langle -1, 1 \rangle$.

(b)

$$\sum \frac{(n!)^5}{(5n)!}(x-2)^n$$

Rješenje. Vidimo da je točka oko koje je razvijen red $c = 2$. Računamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n!)^5}{(5n)!}}{\frac{((n+1)!)^5}{(5n+5)!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)(5n+5)}{(n+1)^5}$$
$$= 3125$$

Dakle, interval konvergencije je $I = \langle 3123, 3127\rangle$.

(c)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n!)}(x+1)^n$$

Rješenje. Ovaj je red razvijen oko točke $c = -1$. Dokažimo da vrijedi $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ kad $n \to +\infty$. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\ln((n+1)!)}}{\frac{1}{n\ln(n!)}} = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)}+1}$$

Dokažimo da desni limes konvergira u nulu. Koristimo Stolzov teorem. Označimo $c_n = \ln(n+1)$ i $d_n = \ln(n!)$. Uočimo da je niz $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neograničen strogo rastuć niz, dakle možemo primjeniti Stolzov teorem. Vrijedi

$$\frac{c_{n+1}-c_n}{d_{n+1}-d_n} = \frac{\ln(n+2)-\ln(n+1)}{\ln((n+1)!)-\ln(n!)} = \frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\ln i - \sum\limits_{i=1}^{n}\ln i} = \underbrace{\frac{1}{\ln(n+1)}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}_{\to 0}.$$

Dakle, radijus konvergencije je sada $\frac{1}{1} = 1$, pa je interval konvergencije $\langle -2, 0\rangle$.

(d)

$$\sum \frac{1}{(2+(-1)^n)^n}(x-1)^n$$

Rješenje. Promotrimo izraz $(-1)^n$. Znamo da on poprima dvije vrijednosti: -1 i 1. Preciznije, vrijedi

$$(-1)^n = \begin{cases}-1, & n = 2k-1\\ 1, & n = 2k\end{cases}.$$

Cilj je, dakle, izračunati gomilišta niza $\sqrt[n]{|a_n|}$ te uzeti supremum toga skupa - tako je definiran limes superior. Računamo

- $n = 2k-1$

$$\sqrt[2k-1]{a_{2k-1}} = \sqrt[2k-1]{\frac{1}{\left((2-1)^{2k-1}\right)^{2k-1}}} = \sqrt[2k-1]{\frac{1}{1^{2k-1}}} = 1$$

- $n = 2k$

$$\sqrt[2k]{a_{2k}} = \sqrt[2k]{\frac{1}{(2+1)^{2k}}} = \sqrt[2k]{\frac{1}{3^{2k}}} = \frac{1}{3}$$

Dakle, limes superior niza $\sqrt[n]{a_n}$ jest supremum skupa $\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$. Dakle,

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Tada je radijus konvergencije jednak 1, pa je interval konvergencije jednak $\langle 0, 2\rangle$.

(e)

$$\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n$$

Rješenje. Vidimo da je točka oko koje je razvijen red $c = 0$. Vrijedi

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n = 2k-1 \\ 1, & n = 2k \end{cases}.$$

Dakle, da nađemo limes superior niza a_n, moramo naći limese posebno podnizova a_{2k} i a_{2k-1} i uzeti supremum toga skupa. Vrijedi

$$a_{2k-1} = \left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{(-1)^{2k-1}\cdot(2k-1)^2} = \left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{-(2k-1)^2} = \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-(2k-1)^2}$$

pa je

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^{-(2k-1)} = \frac{1}{e}.$$

Također vrijedi

$$a_{2k} = \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{(-1)^{2k}(2k)^2} = \left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{(2k)^2}$$

pa je

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{2k+1}{2k}\right)^{2k} = e.$$

Dakle, skup vrijednosti limesa podniza niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $\left\{e, \frac{1}{e}\right\}$ te vrijedi

$$\sup\left\{e, \frac{1}{e}\right\} = e.$$

Dakle, radijus konvergencije je $R = \frac{1}{e}$, a interval konvergencije je $I = \left\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right\rangle$.

(f)

$$\sum \left(2\sqrt[n]{2}-1\right)^n x^n$$

Rješenje. Vidimo da je točka oko koje je razvijen red $c = 0$. Računamo

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} 2\sqrt[n]{2}-1} = 1$$

Dakle, interval konvergencije je $I = \langle -1, 1 \rangle$.

Zadatak 3.31. Funkciju f razvijte u Taylorov red $T[f,c]$ oko točke c, odredite njegov interval konvergencije te izračunajte $f^{(2008)}(c)$.

(a)

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oko} \quad c = 0$$

Rješenje. Derivacija ove funcije jest

$$f'(x) = x\frac{\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1-x^2},$$

iz čega imamo

$$\left(1-x^2\right) f'(x) = xf(x) + 1.$$

Razvojem ove funkcije u red dobit ćemo nešto oblika

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\ f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u lijevu stranu jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \left(1-x^2\right)\left(a_2 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots\right) \\ &= a_1 + x \cdot 2a_2 + x^2(3a_3 - a_1) + x^3(4a_4 - 2a_2) + x^4(5a_5 - 3a_3) + \dots \\ &= a_1 + x \cdot 2a_2 + \sum_{n=2}^{\infty} x^n\left((n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1}\right) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u desnu stranu jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\right) + 1 \\ &= 1 + a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \end{aligned}$$

Uočimo da je $a_0 = f(0) = \frac{\arcsin 0}{1} = 0$. Izjednačavanjem koeficijenata lijeve i desne strane uz neparne potencije daje

$$\begin{aligned} \left[x^1\right] &: \ 2a_2 = a_0 \implies a_2 = 0 \\ \left[x^3\right] &: \ 4a_4 - 2a_2 = a_2 \implies a_4 = 0 \end{aligned}$$

Induktivno, ako je $a_{2k} = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$ gledamo koeficijent uz x^{2k+1}.

$$(2k+2)\, a_{2k+2} - 2ka_{2k} = a_{2k} \implies a_{2k+2} = 0$$

Dakle, induktivno $a_{2n} = 0, \forall n$, što i ima smisla jer je f neparna funkcija. Za neparne analogno, indukcijom po $\left[x^{2k}\right]$.

$$\begin{aligned} \left[x^0\right] &: \ a_1 = 1 = \frac{0!!}{1!!} \\ \left[x^2\right] &: \ 3a_3 - a_1 = a_1 \implies a_3 = \frac{2}{3} = \frac{2!!}{3!!} \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $a_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada gledanjem koeficijenta uz $\left[x^{2n+2}\right]$ imamo

$$(2n+3)\, a_{2n+3} - (2n+1)\, a_{2n+1} = a_{2n+1} \implies a_{2n+3} = \frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}.$$

Dakle, kombiniranjem svega dobivenog imamo da je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1}$$

Izračunajmo sada 2008 derivaciju u točki 0. Vidimo da se u gornjem redu pojavljuju samo neparne potencije nad $x-$evima, što znači da će koeficijenti uz parne potencije biti 0. Dakle,

$$\left[x^{2008}\right] = a_{2008} = 0.$$

Time je $f^{(2008)}(0) = 2008! \cdot a_{2008} = 0$.

(b)

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{oko} \quad c = 0$$

Rješenje. Po svojstvima logaritama imamo

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right).$$

Ova dva logaritma imaju tablični razvoj u Taylorov red:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}x^n\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^n
\end{aligned}
$$

za $|x| < 1$. Izračunajmo sada 2008 derivaciju u točki 0. Računanjem za $n = 2008$ imamo

$$a_{2008} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{2007}+1}{2008} = \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{2008} = 0.$$

Dakle, $f^{(2008)}(0)$ je ponovno jednak 0.

(c)

$$f(x) = \ln\left(x^2+x-6\right) \quad \text{oko} \quad c = 2$$

Rješenje. Ovaj zadatak je krivo zadan - f nije ni definirana u $c = 2$.

(d)

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x \quad \text{oko} \quad c = 1$$

Rješenje. Vrijedi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin^4 x + \cos^4 x \\
&= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x \\
&= 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} \\
&= 1 - \frac{1-\cos 4x}{4} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}
\end{aligned}
$$

Uvodimo supstituciju $y = x - 1$ tj. $x = y + 1$. Sada imamo

$$f(y) = \frac{3}{4} + \frac{\cos(4(y+1))}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4(y+1))^{2n}}{(2n)!} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}$$

Kako smo zapravo razvijali funkciju kosinus u red, interval konvergencije jest cijeli $\mathbb{R}$. Izračunajmo sada 2008 derivaciju u točki 1.. Vrijedi $2008 = 2\cdot 1004$ pa je

$$a_{2008} = \frac{1}{4}\cdot(-1)^{1004}\cdot\frac{4^{2008}}{2008!} = \frac{4^{2007}}{2008!}.$$

Dakle, imamo $f^{(2008)}(1) = 2008!\cdot\frac{4^{2007}}{2008!} = 4^{2007}$.

(e)

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{oko} \quad c = 1$$

Rješenje. Uvedimo supstituciju $y = x - 1$, tj. $x = y + 1$. Tada imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos x}{x} \\ f(y) &= \frac{\cos(y+1)}{y+1} \\ (y+1) f(y) &= \cos(y+1) \\ (y+1) f(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(y+1)^{2n}}{(2n)!} \\ f(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(y+1)^{2n-1}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Dakle, početni red jednak je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Interval konvergencije jest $\mathbb{R}$. Ponovno red ima samo neparne potencije, kao i u *(a)* podzadatku, pa vrijedi $a_{2008} = 0$ te $f^{(2008)}(1) = 0$.

(f)

$$f(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3 \quad \text{oko} \quad 0$$

Rješenje. Uvodimo tzv. **pravilo inverzije**

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Raspisujemo:

$$f(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3 = \frac{x^3}{(x^2+1)^3} = x^3 \left(1+x^2\right)^{-3} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} \left(x^2\right)^n$$

$$= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2+n}{n} \left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2+n}{n} x^{2n+3}$$

Analogno kao u prošlom podzadatku, $2n+3$ je neparan broj pa je koeficijent uz x^{2008} jednak 0. Dakle, $f^{(2008)}(0) = 0$.

Zadatak 3.32. Dokažite da je s

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n ((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

dobro definirana funkcija $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ i odredite eksplicitnu formulu od f.

Rješenje. Valja preformulirati izraz i iz toga izraza izvući neki "poznati" red. Vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n ((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} ((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2(n-1))!!)^2}{(2n)!} x^{2n} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{2n(2n-1)!!} x^{2n}$$

Sada imamo

$$f(x) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!(2n+2)} x^{2n+2}$$

$$f'(x) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} = 4 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

iz čega treća jednakost vrijedi po *zadatku 3.31, podzadatak (a)*. Integriranjem dobijemo

$$\int f'(x)\, dx = f(x) = 4 \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \arcsin^2 x.$$

Zadatak 3.33. Izračunajte sume redova.

(a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$$

Rješenje. Raspisujemo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} && / \int dx \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} &= -\ln(1-x) && / \cdot x^2 \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n} &= -x^2 \ln(1-x) && / \int dx \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n(n+3)} &= \frac{1}{18}\left(x\left(2x^2+3x+6\right) - 6\left(x^3-1\right)\ln(1-x)\right) && / : x^2 \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+3)} &= \frac{1}{18}\frac{x\left(2x^2+3x+6\right) - 6\left(x^3-1\right)\ln(1-x)}{x^2}
\end{aligned}$$

pa je vrijednost ovog reda kad uvrstimo $x=-1$ jednaka $\frac{2\ln 2}{3} - \frac{5}{18}$.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$$

Rješenje. Rastavimo opći član na parcijalne razlomke. Vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + 2 \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right).$$

Iz Taylorovih razvoja oko 0 vidimo da vrijedi

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

te

$$\operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

pa je vrijednost konačnoga reda jednaka $-\ln 2 + 2 \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \ln 2$.

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$$

Rješenje. Vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n3^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

Desni sumand je očito e^3, a lijevi računamo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} &= e^x \qquad /\frac{d}{dx}\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} &= e^x \qquad /\cdot x\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n}}{n!} &= xe^x\end{aligned}$$

Dakle, lijevi sumand je jednak $3e^3$, pa je početni red jednak $4e^3$.

(d)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)^3}{(2n+1)!}$$

Rješenje. Uočimo da se $2n+1$ iz brojnika i $2n+1$ iz faktorijela u nazivniku krate te imamo $\frac{(2n+1)^2}{(2n)!}$. Ovo nas navodi na korištenje Taylorovog reda funkcije kosinus.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} &= \cos x \qquad /\cdot x\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!} &= x\cos x \qquad /\frac{d}{dx}\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)\,x^{2n}}{(2n)!} &= \cos x - x\sin x \qquad /\cdot x\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)\,x^{2n+1}}{(2n)!} &= x\cos x - x^2\sin x \qquad /\frac{d}{dx}\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)^2\,x^{2n}}{(2n)!} &= \cos x - x^2\cos x - 3x\sin x \qquad /\cdot(-1)\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)^2\,x^{2n}}{(2n)!} &= x^2\cos x + 3x\sin x - \cos x\end{aligned}$$

Vidimo da uvrštavanjem $x=1$ dobivamo vrijednost reda, tj. $3\sin 1$.

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$$

Rješenje. Vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \qquad / \int dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$$

Dakle, vrijednost traženog reda je vrijednost izračunatog reda za $x = \frac{-1}{3}$, tj. $-\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

(f)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2^n}$$

Rješenje. Imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad / \cdot x^3$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \frac{x^3}{1-x} \qquad / \frac{d}{dx}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) x^{n+2} = \frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2} \qquad / \frac{d}{dx}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2) x^{n+1} = -\frac{2x\left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^3} \qquad / \frac{d}{dx}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)(n+1) x^n = \frac{6}{(1-x)^4}$$

pa je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2^n} = \frac{6}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^4} = 96.$$

4 Dodatni materijali

4.1 Formule za derivacije

- za derivaciju inverzne funkcije od f vrijedi

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

- $n-$ta derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ je

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

- Leibnizova formula

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

- tangenta na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) je oblika

$$t \ldots \qquad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

- normala na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) je oblika

$$n \ldots \qquad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

- kut između pravaca s koeficijentima smjera k_1 i k_2

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

4.2 Formule za integrale

- ako je f parna, vrijedi

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)dx$$

- ako je f neparna, vrijedi

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

- formula parcijalne integracije

$$\int udv = uv - \int vdu$$

- supstitucije u iracionalnim integralima

$$\begin{aligned}
\int R\left(x, \sqrt{k^2 - x^2}\right) dx, &\qquad x = k \sin t \\
\int R\left(x, \sqrt{k^2 + x^2}\right) dx, &\qquad x = k \operatorname{sh} t \\
\int R\left(x, \sqrt{x^2 - k^2}\right) dx, &\qquad x = k \operatorname{ch} t \\
\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, &\qquad t = x + \frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

- trigonometrijske formule

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
1 &= \sin^2 x + \cos^2 x \\
\operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\
\operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\
1 &= \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x
\end{aligned}$$

- supstitucije u trigonometrijskim integralima

$$\begin{aligned}
\int R(\sin x, \cos x), &\qquad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\
\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x), &\qquad t = \operatorname{th} \frac{x}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}
\end{aligned}$$

- nepravi integrali

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konvergira}, & p > 1 \\ \text{divergira}, & 0 < p \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\int_{0\leftarrow}^{a} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{konvergira}, & 0 < p < 1 \\ \text{divergira}, & p \geqslant 1 \end{cases}$$

4.3 Formule za redove

- Dirichletov red
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konvergira}, & p > 1 \\ \text{divergira}, & p \leqslant 1 \end{cases}$$

- za radijus konvergencije R vrijedi

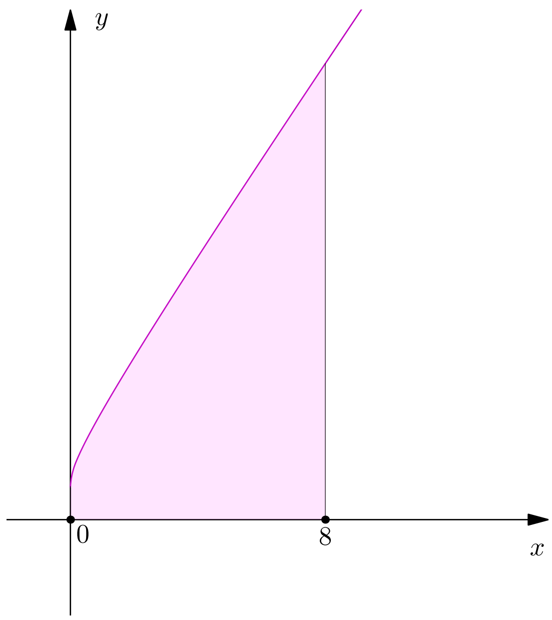
  –
  $$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$
  pri čemu uzimamo $R := +\infty$ ako je $\limsup = 0$, a $R := 0$ ako je $\limsup = +\infty$

  –
  $$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

4.4 Skice

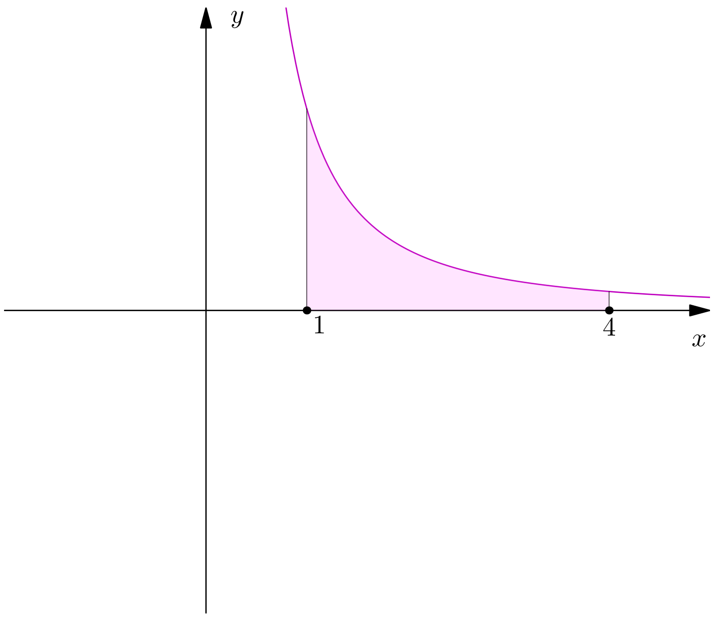
Zadatak 2.6. (a) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = 1 + \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} \qquad \text{na} \qquad [0, 8]$$



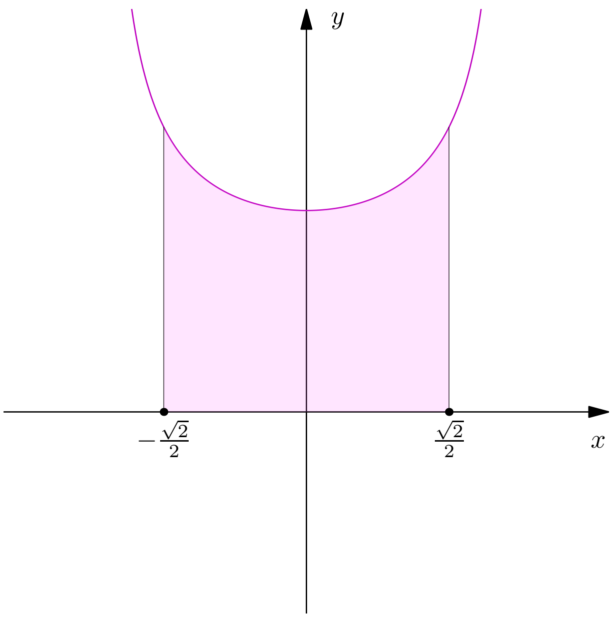
Zadatak 2.6. (b) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} \qquad \text{na} \qquad [1,4]$$



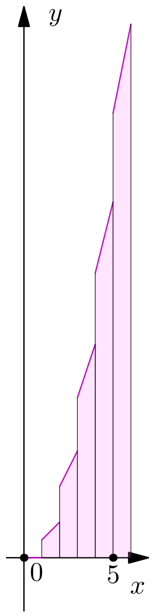
Zadatak 2.6. (c) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{na} \qquad \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$



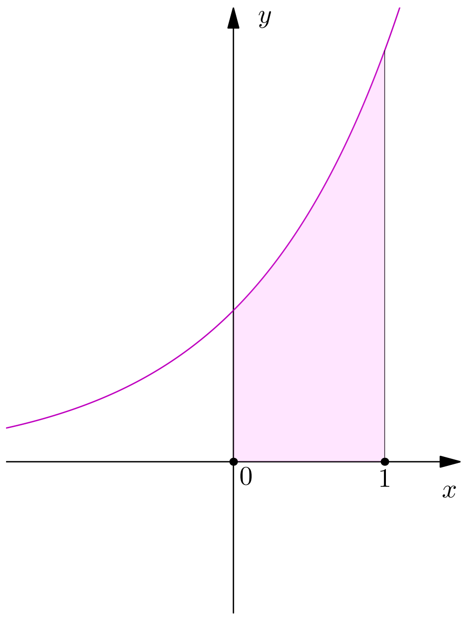
Zadatak 2.6. (d) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \, x \qquad \text{na} \qquad [0, 6]$$



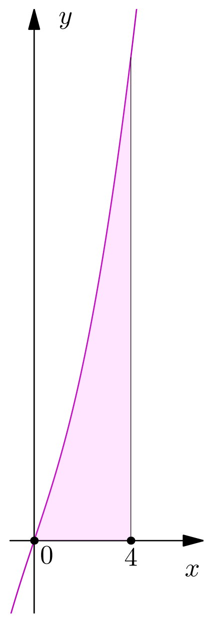
Zadatak 2.10. [Povratak na zadatak]

$$f(x) = e^x \qquad \text{na} \qquad [0, 1]$$



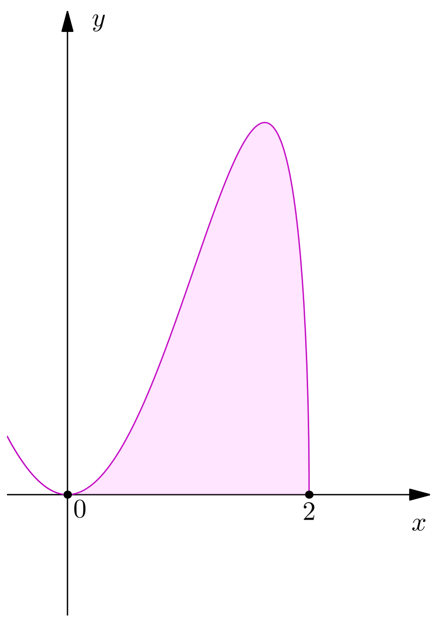
Zadatak 2.18. (d) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = x\sqrt{x^2+9} \qquad \text{na} \qquad [0,4]$$



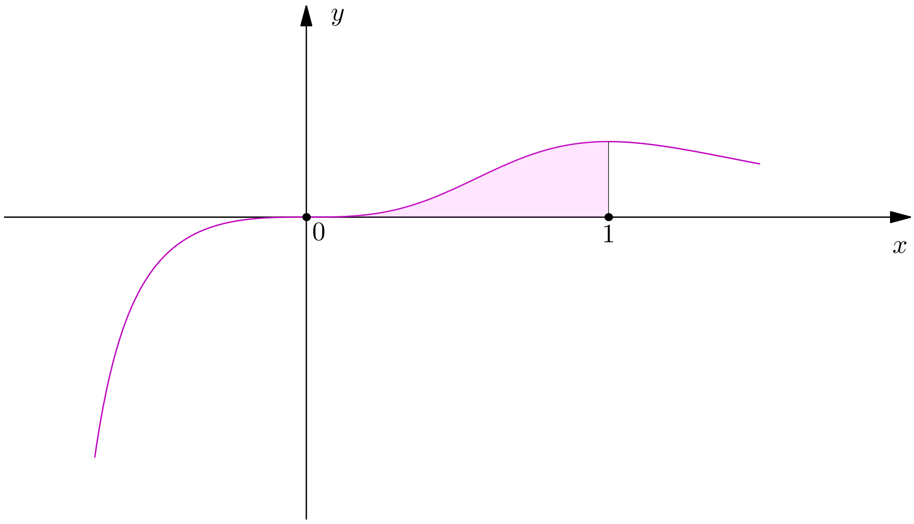
Zadatak 2.20. (a) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = x^2\sqrt{4-x^2} \qquad \text{na} \qquad [0,2]$$



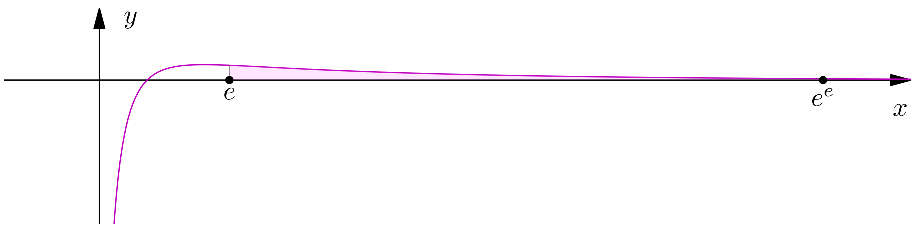
Zadatak 2.20. (b) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{x^3}{x^6 + 2x^3 + 1} \qquad \text{na} \qquad [0, 1]$$



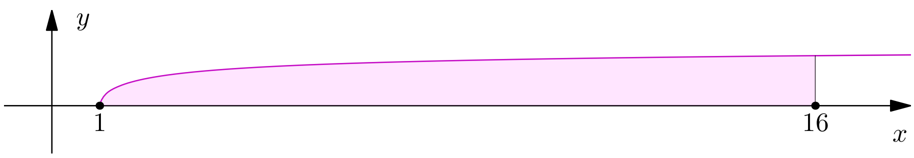
Zadatak 2.20. (c) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{\sin \ln x}{x} \qquad \text{na} \qquad [1, e]$$



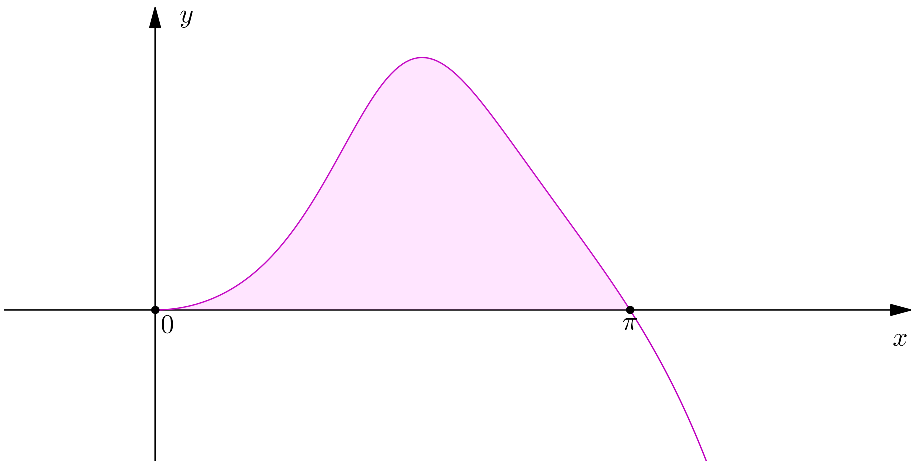
Zadatak 2.23. (b) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x} - 1} \qquad \text{na} \qquad [1, 16]$$



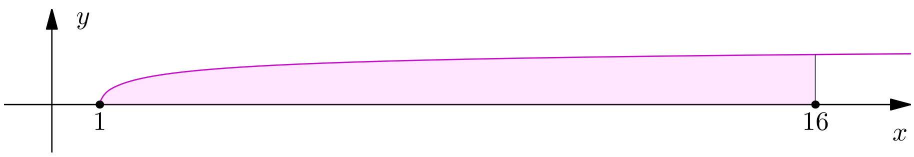
Zadatak 2.26. [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \qquad \text{na} \qquad [0, \pi]$$



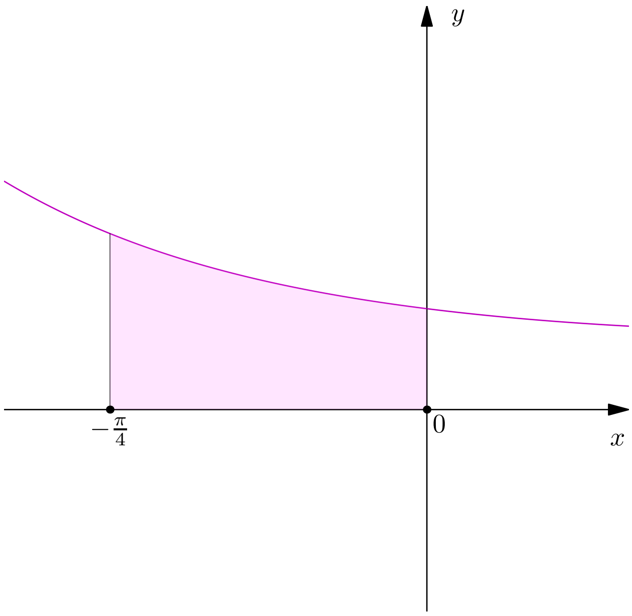
Zadatak 2.42. (a) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x} - 1} \qquad \text{na} \qquad [1, 16]$$



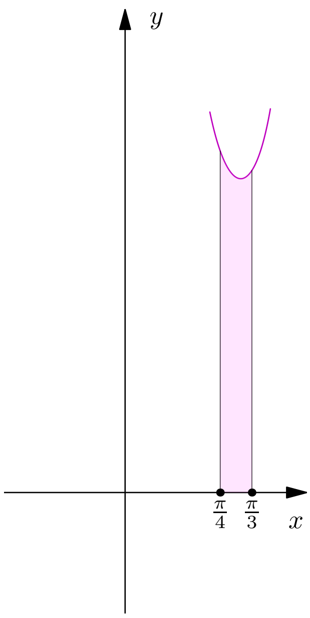
Zadatak 2.47. (a) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{\cos x + 2\sin x + 3} \qquad \text{na} \qquad \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$$



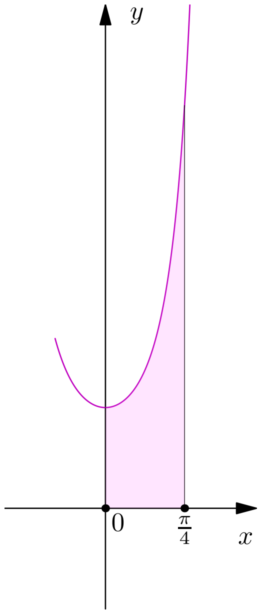
Zadatak 2.47. (b) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos x} \qquad \text{na} \qquad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$$



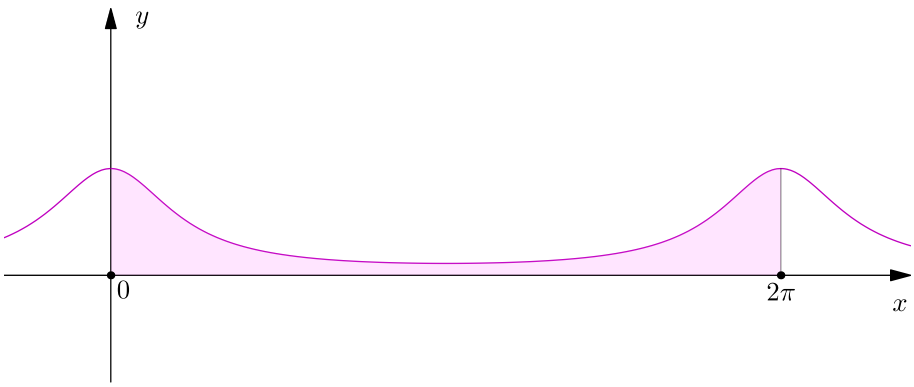
Zadatak 2.47. (c) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{\cos^4 x} \qquad \text{na} \qquad \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$



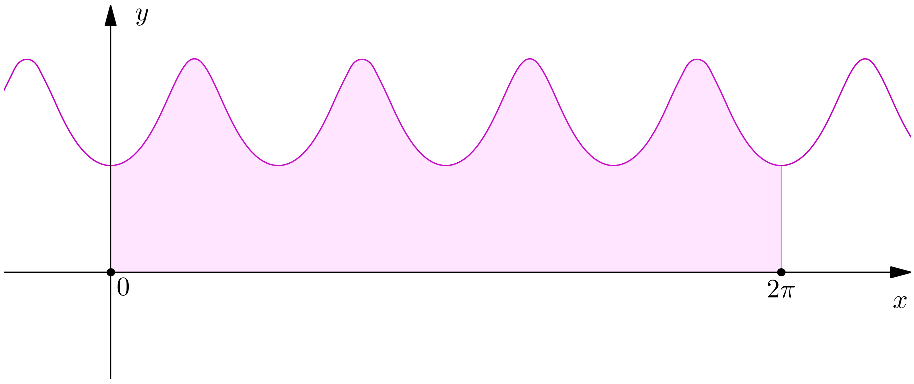
Zadatak 2.48. (a) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{5 - 4\cos x} \qquad \text{na} \qquad [0, 2\pi]$$



Zadatak 2.48. (c) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} \qquad \text{na} \qquad [0, 2\pi]$$

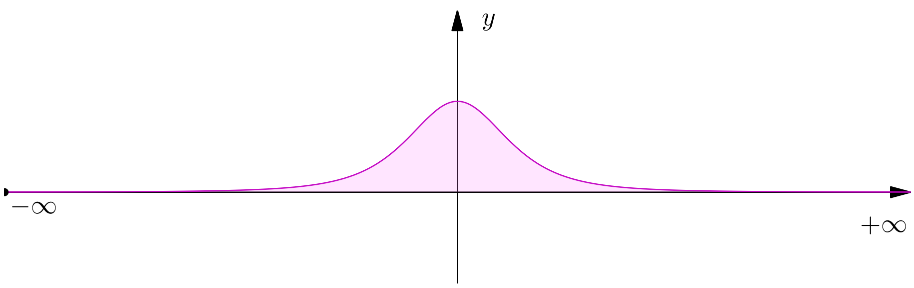


Zadatak 2.55. (a) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = e^{-x^2}(x^3 + x) \qquad \text{na} \qquad [0, +\infty]$$

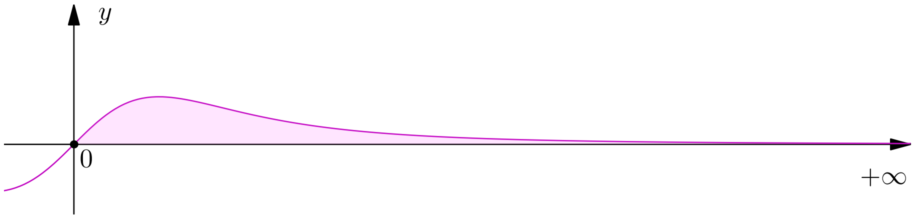
Zadatak 2.55. (b) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^2} \qquad \text{na} \qquad [-\infty, +\infty]$$



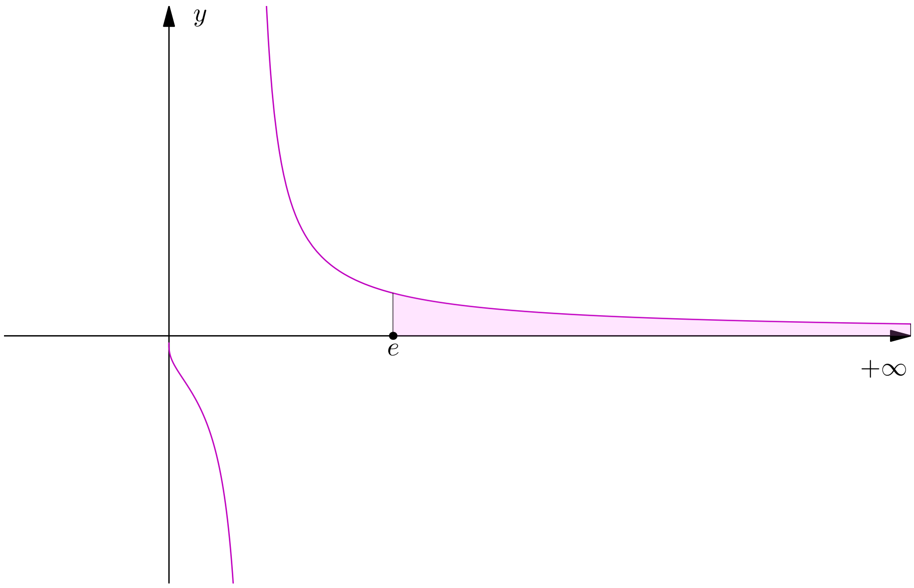
Zadatak 2.55. (c) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \qquad \text{na} \qquad [0, +\infty]$$



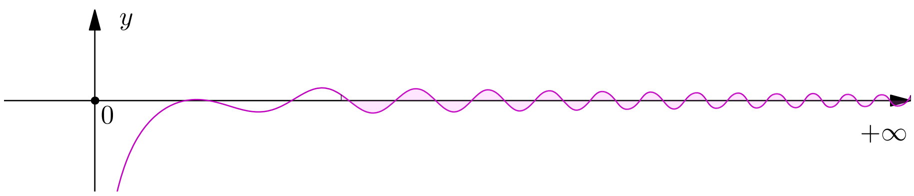
Zadatak 2.56. (a) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}\ln x} \qquad \text{na} \qquad [e, +\infty]$$



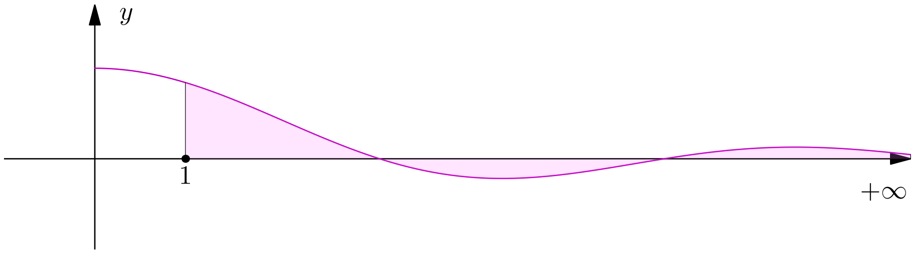
Zadatak 2.56. (b) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{\cos(x^2)\ln x}{\sqrt{(x+1)^3}} \qquad \text{na} \qquad [e, +\infty]$$



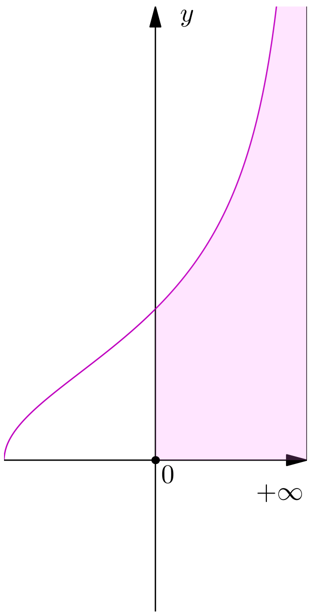
Zadatak 2.56. (c) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{na} \qquad [1, +\infty]$$



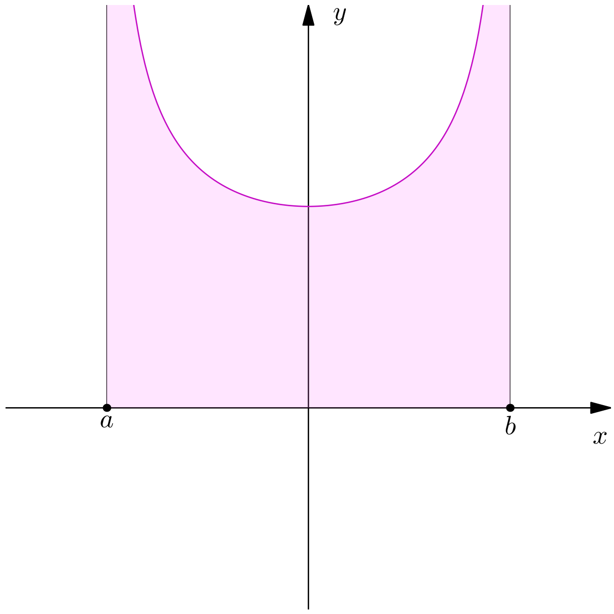
Zadatak 2.59. (a) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad \text{na} \qquad [0, 1]$$



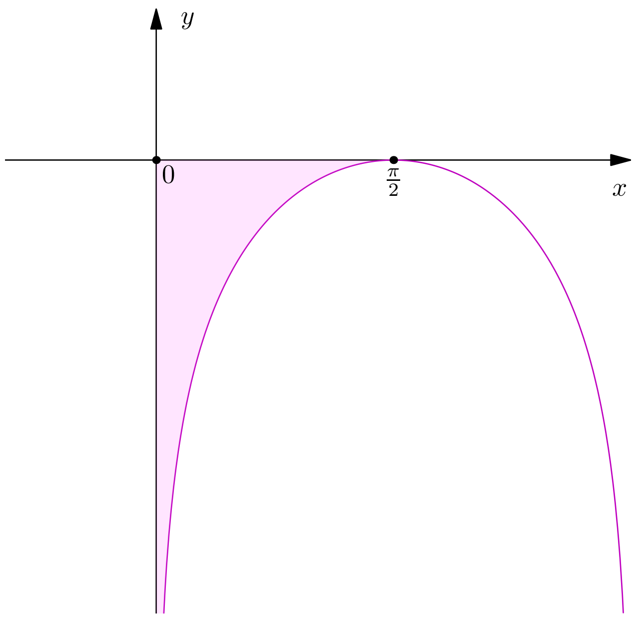
Zadatak 2.59. (b) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \qquad \text{na} \qquad [a, b]$$



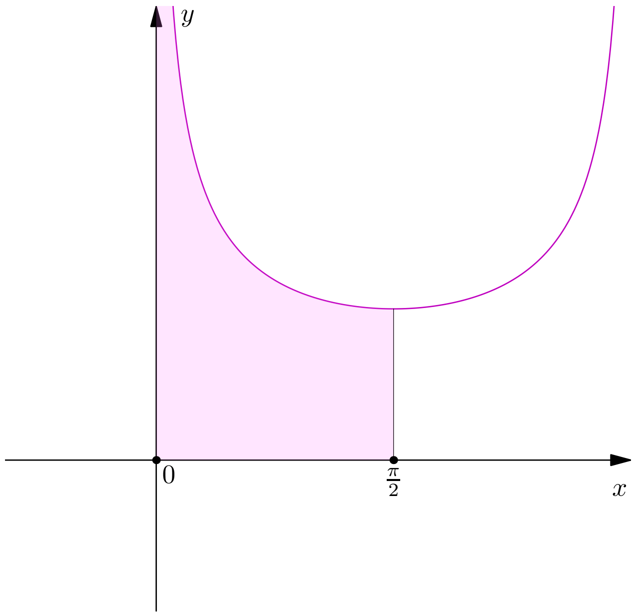
Zadatak 2.59. (c) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \ln \sin x \qquad \text{na} \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



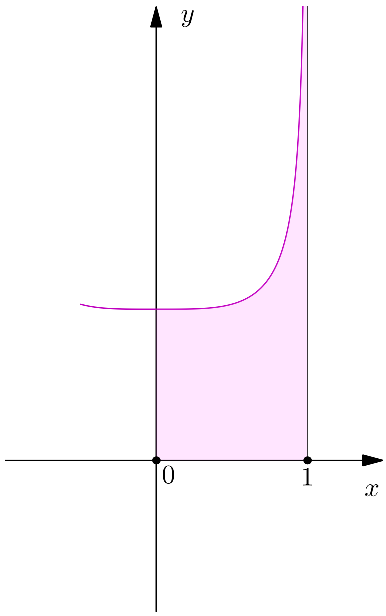
Zadatak 2.60. (a) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} \qquad \text{na} \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



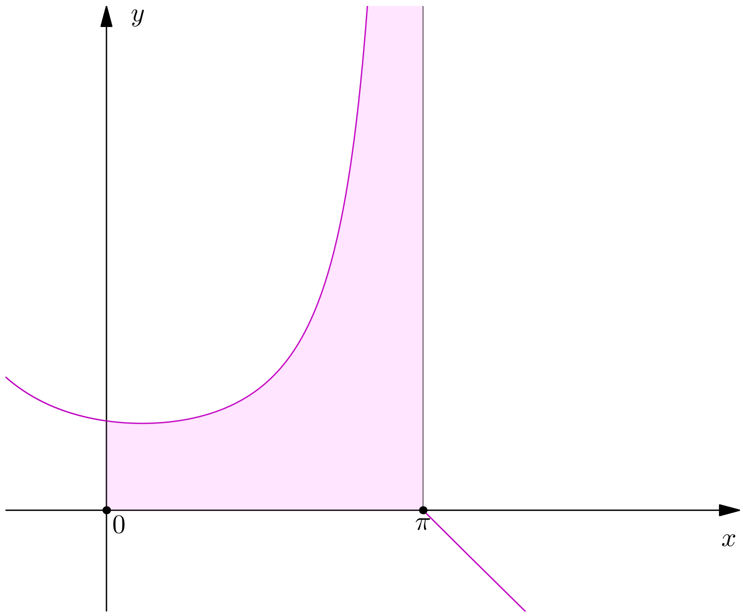
Zadatak 2.60. (b) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} \qquad \text{na} \qquad [0, 1]$$



Zadatak 2.60. (c) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi - x}}{1 + \cos x} \qquad \text{na} \qquad [0, \pi]$$



Zadatak 2.60. (d) [Povratak na zadatak]

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x \ln(1 + x)}{\sqrt{x^5}} \qquad \text{na} \qquad [0, 1]$$