

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Geofizički odsjek

Zbirka zadataka:
Dinamička meteorologija I

Zimski semestar ak. god. 2022./2023.

ad usum internum

Zadnja izmjena: 3.2.2023.

Sadržaj

1	Plinski zakoni.....	3
1.1	Zadatci.....	7
2	Totalni diferencijal.....	14
2.1	Zadatci.....	16
3	Fundamentalne i prividne sile	19
3.1	Fundamentalne sile.....	19
3.2	Ne-Newtonovi sustavi i prividne sile.....	20
3.3	Zadatci.....	25
4	Geopotencijal i redukcija tlaka na normalni nivo	30
4.1	Redukcija tlaka na normalni nivo	30
4.2	Geopotencijal.....	32
4.3	Zadatci.....	33
5	Termodinamika suhog zraka.....	39
5.1	Termodinamički procesi.....	40
5.2	Termodinamika suhog zraka	42
5.3	Zadatci.....	43
6	Stabilnost atmosfere	50
6.1	Statička stabilnost atmosfere.....	50
6.2	Slobodna konvekcija.....	54
6.3	Zadatci.....	56
7	Mjere vlažnosti zraka.....	61
7.1	Definicije mjera vlažnosti zraka	61
7.2	Termodinamika vlažnog zraka.....	64
7.3	Procesi vlažnog zraka	67
7.4	Zadatci.....	69
8	Meteorološki termodinamički dijagrami.....	79
8.1	Zadatci.....	82
9	Pomoćni izvori i materijali	88

1 Plinski zakoni

U nastavku slijede definicije veličina za kvantitativno izražavanje sustava smjesa i otopina.

Molarna masa, M

Masa jednog mola tvari. Numerički je jednaka molekularnoj (ili atomskoj) masi M .

Primjer a) 1 mol molekularnog vodika sadrži ukupno $6.022 \cdot 10^{23}$ molekula H_2 (Avogadrov broj), te ima masu 2 g. Slijedi da je molarna masa $M = 2 \text{ g mol}^{-1}$.

Primjer b) 1 kmol molekularnog kisika O_2 ima $6.022 \cdot 10^{26}$ molekula O_2 i masu 32 kg. Slijedi da je molarna masa $M = 32 \text{ kg kmol}^{-1}$.

Avogadrov broj, N_A

Broj molekula (u slučaju kemijskog spoja) ili atoma (u slučaju kemijskih elemenata) koji se nalazi u jednom molu (kilomolu) tvari.

$$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 6.022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}. \quad (1.1)$$

Množina ili količina tvari, n

Veličina jednaka omjeru broja elementarnih jedinki (atoma, iona, molekula, elektrona) N i Avogadrovog broja N_A :

$$n = \frac{N}{N_A}. \quad (1.2)$$

Molekularna masa tvari, M

Masa jednog mola tvari, tj. masa $6.022 \cdot 10^{23}$ elementarnih jedinki tvari:

$$M = \frac{m}{n}. \quad (1.3)$$

Standardni uvjeti

Uvjeti pri kojima je tlak $p = 101\,325 \text{ Pa}$ i temperatura $T = 273.15 \text{ K}$.

Molarni volumen, V_m

Volumen jednog mola plina. Pri standardnim uvjetima volumen jednog mola (kilomola) plina, bez obzira koji plin promatramo, mora biti jednak:

$$V_m = 22.414 \text{ l kmol}^{-1} = 22.414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}, \quad (1.4)$$

$$V_m = 0.022414 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}. \quad (1.5)$$

Maseni udio, w

Maseni udio komponente A je omjer mase otopljene tvari A i zbroja masa svih tvari u otopini ili smjesi:

$$w_A = \frac{m_A}{\sum_i m_i}. \quad (1.6)$$

Idealni plin

Plin male gustoće u kojem je sudaranje atoma ili molekula potpuno elastično, a prosječna udaljenost susjednih molekula ili atoma puno je veća od međučestičnih sila. Zbog toga potencijalna energija ne utječe bitno na ponašanje idealnog plina, tj. sva je unutarnja energija idealnog plina u formi kinetičke energije.

Atmosfera je smjesa plinova i atmosferski su plinovi realni plinovi, pa njihovo ponašanje odstupa od ponašanja idealnog plina. Međutim, to je odstupanje vrlo malo, pa najčešće pretpostavljamo da se atmosfera ponaša kao idealni plin.

Što je tlak realnog plina manji, to je njegovo ponašanje sličnije ponašanju teorijskog, idealnog plina.

Čest zraka (fluida)

U dinamičkoj meteorologiji često promatramo čest zraka. Pod pojmom česti podrazumijevamo masu fluida čija su termodinamička svojstva jednolika, a tijekom promatranog procesa u česti se nalazi uvijek ista tvar (materijalna čest ili materijalni element fluida). Čest je osnovni termodinamički sustav čiju promjenu stanja promatramo pri proučavanju atmosferskih procesa. Do promjene stanja, tj. promjene vrijednosti termodinamičkih varijabli dolazi uslijed različitih fizikalnih procesa.

Termodinamičke varijable (varijable stanja)

Varijable koje potpuno opisuju stanje promatranog termodinamičkog sustava. Varijable stanja česti fluida mase m su tlak (p), temperatura (T) i volumen (V).

Čest mase m i volumena V ima gustoću ρ koja ovisi o masi i volumenu česti $\rho = \frac{m}{V}$. Stoga umjesto volumena kao varijablu stanja možemo koristiti gustoću ρ [kg m^{-3}] ili njenu recipročnu vrijednost $\alpha = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}$ [$\text{m}^3 \text{ kg}^{-1}$], odnosno specifični volumen.

Pri standardnim uvjetima ($p = 1013.25 \text{ hPa}$ i $T = 273.15 \text{ K}$) gustoća i specifični volumen zraka su jednaki:

$$\rho = 1.293 \text{ kg m}^{-3}, \quad (1.7)$$

$$\alpha = 0.774 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}. \quad (1.8)$$

Uz tlak, temperaturu, volumen i gustoću postoje i druge varijable stanja poput entropije, unutarnje energije itd.

Za termodinamičke varijable vrijede i slijedeći zakoni:

Boyleov zakon

Tlak plina (p) konstantne mase (m) i konstantne temperature (T) je obrnuto proporcionalan volumenu plina (V).

$$pV = k_1, \quad (1.9)$$

(uz $m = \text{konst.}$ i $T = \text{konst.} \rightarrow$ izotermno stanje)

gdje je k_1 konstanta proporcionalnosti. Općenito, $k_1 = k_1(T)$.

Charlesov zakon ili Gay-Lussacov zakon

Volumen (V) promatrane mase plina (m) pri konstantnom tlaku (p) proporcionalan je temperaturi plina (T).

$$V = k_2 T, \quad (1.10)$$

(uz $m = \text{konst.}$ i $p = \text{konst.} \rightarrow$ izobarno stanje)

gdje je k_2 konstanta proporcionalnosti. Općenito, $k_2 = k_2(p)$.

Jednadžba stanja idealnog plina

Kombinacijom Boyleovog i Charlesovog zakon dolazimo do još jednog zakona za plin:

$$\frac{pV}{T} = k, \quad (1.11)$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti.

Za standardne uvjete ($p = 1013.25 \text{ hPa}$, $T = 273.15 \text{ K}$ i $V_m = 22.414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$) konstantu proporcionalnosti zovemo univerzalna plinska konstanta R^* :

$$\frac{pV_m}{T} = R^*, \quad (1.12)$$

$$R^* = \frac{101325 \text{ Pa} \cdot 0.022414 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}}{273.15 \text{ K}} = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (1.13)$$

Za jedan kilomol plina mora vrijediti:

$$pV_m = R^*T. \quad (1.14)$$

Promatramo 1 kmol idealnog plina molekularne mase M . Volumen, temperatura i tlak plina su V_m , T i p . Tada je specifični volumen plina jednak:

$$\alpha = \frac{V_m}{M}, \quad (1.15)$$

$$V_m = \alpha M. \quad (1.16)$$

Izraz za V_m (1.16) uvrstimo u jednadžbu (1.14) i zatim tu jednadžbu podijelimo s M kako bi dobili jednadžbu stanja idealnog plina za jediničnu masu:

$$p\alpha M = R^*T \quad /: M \quad (1.17)$$

Jednadžba stanja idealnog plina koja vrijedi za jediničnu masu idealnog plina

$$p\alpha = \frac{R^*}{M}T = RT. \quad (1.18)$$

Konstanta $R = \frac{R^*}{M} [J \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}]$ ovisi o molekularnoj masi idealnog plina i zove se specifična plinska konstanta.

Za konstantnu temperaturu jednadžba stanja idealnog plina za jediničnu masu tog plina svodi se na Boyleov zakon, a uz konstantan tlak na Charlesov zakon.

Jednadžba stanja idealnog plina

$$pV = nR^*T, \quad (1.19)$$

gdje je n broj kilomola plina koji se nalazi u masi plina m koja zauzima volumen V zove se Clapeyronova relacija (Emil Clapeyron, 1834.).

$$pV = nR^*T = \frac{m}{M}R^*T \rightarrow p \frac{V}{m} = \frac{R^*}{M}T \rightarrow p\alpha = RT \quad (1.20)$$

Jednadžba stanja idealnog plina

$$pV = NkT, \quad (1.21)$$

gdje je N broj molekula ili atoma plina koji se nalazi u volumeni V , a $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta.

Daltonov zakon

Tlak kojim tlači smjesa plinova jednak je sumi parcijalnih tlakova svih plinova u smjesi,

$$p = \sum_{k=1}^n p_k, \quad (1.22)$$

gdje je p tlak smjese, p_k tlak k -te komponente smjese (parcijalni tlak).

Za k -ti sastojak mase m_k , gdje je $k = 1, 2, \dots, n$, u smjesi volumena V vrijedi:

$$p_k \alpha_k = \frac{R^*}{M_k}T \quad (1.23)$$

Kako bi izrazili tlak k-te komponente, podijelimo izraz (1.23) sa specifičnim volumenom k-tog sastojka smjese α_k :

$$p_k = \frac{R^*T}{M_k \alpha_k} \quad (1.24)$$

Uvrštavajući definiciju specifičnog volumena k-tog sastojka smjese $\alpha_k = \frac{V}{m_k}$ u izraz (1.24), dobiva se:

$$p_k = \frac{R^*T}{M_k} \cdot \frac{m_k}{V} = \frac{R^*T}{V} \cdot \frac{m_k}{M_k}. \quad (1.25)$$

Primijenimo Daltonov zakon:

$$p = \sum_{k=1}^n p_k = \frac{R^*T}{V} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{M_k} \quad (1.26)$$

Izraz (1.26) pomnožimo sa specifičnim volumenom $\alpha = \frac{V}{m} = \frac{V}{\sum m_k}$,

$$p\alpha = \frac{R^*T}{V} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{M_k} \cdot \frac{V}{\sum m_k}, \quad (1.27)$$

$$p\alpha = \frac{R^*T}{\bar{M}}, \quad (1.28)$$

gdje je $\bar{M} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{M_k}}$ prividna molekularna masa smjese.

1.1 Zadatci

1. Izračunajte specifičnu plinsku konstantu za suhi zrak, te odredite prividnu molekularnu masu zraka ako je poznat sastav zraka (tablica). Zatim odredite gustoću zraka pri standardnim uvjetima ($p = 1013.25 \text{ hPa}$, $T = 273.15 \text{ K}$ i $V_m = 22.414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$). Univerzalna plinska konstanta je $R^* = 8314 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

PLIN	UDIO MASE [%]	MOLEKULARNA MASA [$10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$]
N ₂	75.52	28.02
O ₂	23.15	32.00
Ar	1.28	39.44
CO ₂	0.05	44.00

Rješenje:

Prividna molekularna masa

$$\bar{M} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{M_k}}$$

Masu pojedine komponente smjese dobivamo preko njenog masenog udjela,

$$m(N_2) = \frac{75.52}{100} \cdot m_z$$

$$m(O_2) = \frac{23.15}{100} \cdot m_z$$

$$m(Ar) = \frac{1.28}{100} \cdot m_z$$

$$m(CO_2) = \frac{0.05}{100} \cdot m_z$$

gdje je m_z masa zraka.

$$\sum_k m_k = m_z$$

$$\bar{M} = \frac{m_z}{\frac{75.52}{100} \cdot m_z \cdot 28.02 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} + \frac{23.15}{100} \cdot m_z \cdot 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} + \frac{1.28}{100} \cdot m_z \cdot 39.44 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} + \frac{0.05}{100} \cdot m_z \cdot 44 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}$$

$$\bar{M} = 28.967 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$$

Specifična plinska konstanta:

$$R = \frac{R^*}{\bar{M}} = \frac{8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}}{28.967 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = 287.02 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Gustoću zraka pri standardnim uvjetima računamo iz jednadžbe stanja idealnog plina:

$$p\alpha = RT \rightarrow p = \rho RT \rightarrow \rho = \frac{p}{RT}$$

$$\rho = \frac{101325 \text{ Pa}}{287.02 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 273.15 \text{ K}} = 1.292 \text{ kg m}^{-3}.$$

2. Uzorak zraka mase 50 g nalazi se pri tlaku od 1000 hPa i temperaturi 180 K. Uzorku se izobarno dodaje toplina sve dok mu volumen ne ekspandira za 21%. Kolika je temperatura zraka nakon ekspanzije?

Rješenje:

$$m = 50 \text{ g}$$

$$p = 1000 \text{ hPa} = \text{const.}$$

$$T_1 = 180 \text{ K}$$

$$V_2 = 1.21 V_1$$

$$T_2 = ?$$

Charlesov zakon:

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1} \rightarrow T_2 = \frac{V_2 T_1}{V_1} \rightarrow T_2 = 180 \text{ K} \cdot \frac{1.21 V_1}{V_1} = 217.8 \text{ K}.$$

3. Uzroku zraka mase 50 g koji se nalazi pri tlaku od 1000 hPa i temperaturi 180 K izobarno se dodaje toplina dok ne postigne temperaturu od 198 K. Kolika je promjena volumena plina? Rezultat izrazite u postotcima.

Rješenje:

$$m = 50 \text{ g}$$

$$p = 1000 \text{ hPa} = \text{const.}$$

$$T_1 = 180 \text{ K}$$

$$T_2 = 198 \text{ K}$$

$$\Delta V = ?$$

Charlesov zakon:

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1} \rightarrow V_2 = \frac{V_1 T_2}{T_1} = 1.1 \cdot V_1,$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 1.1 \cdot V_1 - V_1 = 0.1 \cdot V_1.$$

Plin ekspandira za 10%.

4. Koliko se molekula nalazi u kubičnom centimetru zraka pri standardnim uvjetima?

Rješenje:

$$T = 273.15 \text{ K}$$

$$p = 101325 \text{ Pa}$$

$$\rho = 0.00129 \text{ g cm}^{-3}$$

$$V = 1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$N = ?$$

$$V_m = 22.414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1} = 0.022414 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$$

$$V_m = \frac{V}{n} \rightarrow n = \frac{V}{V_m},$$

$$n = \frac{N}{N_A},$$

$$N = \frac{V}{V_m} \cdot N_A = \frac{10^{-6} \text{ m}^3}{0.022414 \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 2.686 \cdot 10^{19} \text{ molekula.}$$

5. Izračunajte prividnu molekularnu masu atmosfere Venere ako se njezin volumen sastoji od 95% ugljičnog dioksida i 5% molekularnog dušika. Koliko iznosi specifična plinska konstanta takve atmosfere?

PLIN	UDIO MASE [%]	MOLEKULARNA MASA [$10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$]
CO ₂	95	44
N ₂	5	28.02

Rješenje:

Prividna molekularna masa

$$\bar{M} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{M_k}}$$

$$m(\text{CO}_2) = \frac{95}{100} \cdot m_V,$$

$$m(\text{N}_2) = \frac{5}{100} \cdot m_V,$$

gdje je m_V masa atmosfere Venere.

$$\bar{M} = \frac{m(\text{CO}_2) + m(\text{N}_2)}{\frac{m(\text{CO}_2)}{M(\text{CO}_2)} + \frac{m(\text{N}_2)}{M(\text{N}_2)}} = \frac{m_V}{\frac{\frac{95}{100} \cdot m_V}{44 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} + \frac{\frac{5}{100} \cdot m_V}{28.02 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}},$$

$$\bar{M} = 0.0427 \text{ kg mol}^{-1} = 42.78 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} = 42.78 \text{ kg kmol}^{-1}.$$

Specifična plinska konstanta:

$$R = \frac{R^*}{\bar{M}} = \frac{8314 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}}{42.78 \text{ kg kmol}^{-1}} = 194.34 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

6. Izračunajte kolika je gustoća Venerine atmosfere ako pripadna molekularna masa iznosi $42.78 \text{ kg kmol}^{-1}$, prosječna temperatura na površini 464°C , a atmosferski tlak na površini Venere iznosi 9321.9 kPa .

Rješenje:

Jednadžba stanja idealnog plina:

$$pV_m = R^*T \leftarrow V_m = \alpha \cdot M$$

$$p\alpha = \frac{R^*}{M}T$$

$$p = \rho \frac{R^*}{M}T$$

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R^* \cdot T} = \frac{9321900 \text{ Pa} \cdot 42.78 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}}{8314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot 737.15 \text{ K}} = 65.06 \text{ kg m}^{-3}.$$

7. Pokažite da se jednadžba stanja idealnog plina izvedena za jediničnu masu $p\alpha = RT$ može za proizvoljnu masu plina m pisati u obliku $pV = nR^*T$.

Rješenje:

Jednadžba stanja idealnog plina izvedena za jediničnu masu:

$$p\alpha = RT / \cdot m$$

gdje je $m = nM$ proizvoljna masa, n broj (kilo)molova koji se nalazi u masi plina m koja zauzima volumen V .

$$p\alpha nM = RTnM,$$

uz definiciju plinske konstante $R^* = RM$, te specifičnog volumena $\alpha = \frac{V}{m}$,

$$p \frac{V}{m} nM = nR^*T$$

$$p \frac{V}{m} m = nR^*T$$

$$pV = nR^*T.$$

8. Polazeći od Clapeyronovog oblika jednačbe stanja idealnog plina $pV = nR^*T$ pokažite da se ista jednačba može pisati u obliku $pV = NkT$, gdje je N broj molekula ili atoma u volumenu plina V , a k je Boltzmannova konstanta.

Rješenje:

Clapeyronov oblika jednačbe stanja idealnog plina:

$$pV = nR^*T,$$

gdje je n je broj molova plina, N_A je Avogadrov broj, N je ukupan broj atoma ili molekula u volumenu plina V .

$$N = n \cdot N_A,$$

$$pV = \frac{N}{N_A} R^*T.$$

Boltzmannova konstanta

$$k = \frac{R^*}{N_A} = \frac{8.314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}}{6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}.$$

$$pV = NkT.$$

9. Iz radiosondažnih podataka za tlak zraka p , te temperaturu T odredite promjenu gustoće atmosfere s visinom. Prividna molekularna masa atmosfere iznosi $28.967 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$. Grafički prikažite vertikalne profile temperature, tlaka i gustoće atmosfere.

Rješenje:

Radiosondažni podaci za tlak, temperaturu i druge meteorološke veličine dostupni su na web stranici <http://weather.uwyo.edu/upperair/sounding.html>

Gustoća se računa preko jednačbe stanja idealnog plina

$$p\alpha = RT,$$

$$p = \rho RT,$$

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

gdje je specifična plinska konstanta

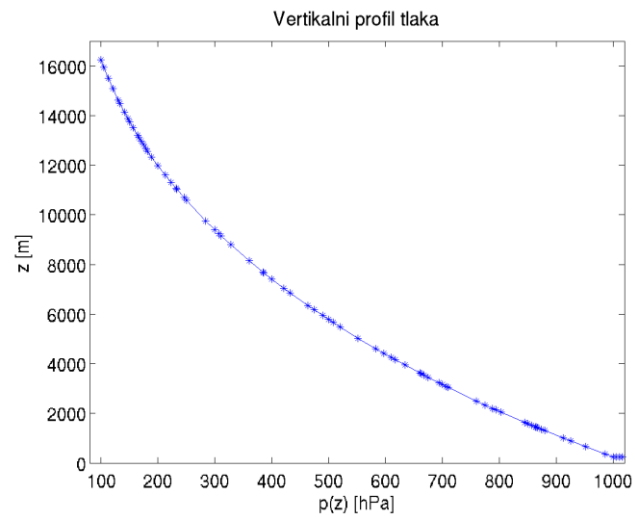
$$R = \frac{R^*}{M} = \frac{8.314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}}{28.967 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = 287.02 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1},$$

14240 LDDD Zagreb Observations at 00Z 25 Oct 2021

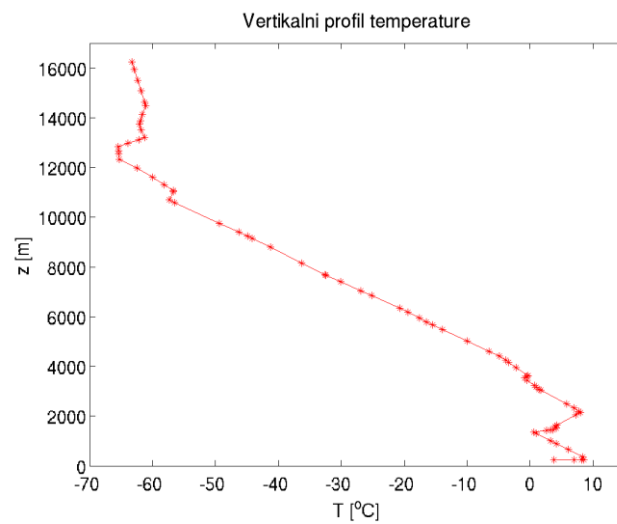
PRES hPa	HGHT m	TEMP C	DMPT C	RELH %	MIXR g/kg	DRCT deg	SKNT knot	THTA K	THTE K	THTV K
1016.0	246	3.8	1.2	83	4.13	350	2	275.7	287.1	276.4
1011.0	249	7.0	0.0	61	3.80	12	3	279.3	290.0	279.9
1005.0	252	8.6	-0.4	53	3.71	38	5	281.4	291.9	282.0
1000.0	255	8.2	-0.8	53	3.62	60	6	281.4	291.7	282.0
986.0	371	8.4	-1.6	49	3.46	83	7	282.7	292.7	283.3
952.0	659	6.1	-2.3	55	3.42	140	10	283.2	293.1	283.8
925.0	895	4.2	-2.8	60	3.38	140	14	283.6	293.4	284.2
912.0	1010	3.3	-2.8	64	3.43	140	10	283.8	293.7	284.4
880.0	1299	1.0	-2.8	76	3.55	95	10	284.4	294.7	285.0
874.0	1354	0.6	-2.8	78	3.58	105	11	284.5	294.8	285.1
867.0	1419	2.6	-22.4	14	0.74	117	13	287.2	289.6	287.4
865.0	1438	3.3	-25.1	10	0.58	120	14	288.1	290.0	288.2
864.0	1447	3.6	-26.4	9	0.52	121	14	288.6	290.3	288.6
857.0	1513	4.2	-25.8	9	0.55	125	16	289.9	291.7	289.9
850.0	1580	4.0	-25.0	10	0.60	130	17	290.3	292.3	290.4
845.0	1628	4.3	-25.5	9	0.57	135	19	291.2	293.1	291.3
803.0	2045	7.3	-30.0	5	0.40	115	14	298.6	300.0	298.7
794.0	2137	8.0	-31.0	4	0.37	130	11	300.3	301.6	300.4
788.0	2200	7.7	-30.1	5	0.40	140	10	300.6	302.0	300.7
775.0	2337	7.0	-28.0	6	0.50	124	12	301.3	303.0	301.4
760.0	2495	5.8	-25.6	8	0.63	105	14	301.7	303.9	301.8
710.0	3049	1.7	-17.1	23	1.41	95	14	303.1	307.7	303.3
707.0	3083	1.4	-16.6	25	1.48	99	14	303.1	308.0	303.4
700.0	3163	1.0	-18.0	23	1.33	110	14	303.6	308.0	303.8
694.0	3232	0.7	-19.4	21	1.19	115	14	303.9	307.9	304.1
675.0	3454	-0.5	-24.1	15	0.81	110	17	305.1	307.9	305.2
668.0	3537	-0.9	-25.9	13	0.70	122	19	305.5	307.9	305.6
663.0	3597	-0.5	-32.6	7	0.37	130	19	306.6	308.0	306.7
661.0	3621	-0.3	-35.3	5	0.29	130	19	307.1	308.2	307.2
634.0	3952	-2.2	-38.4	4	0.22	125	12	308.6	309.5	308.7
617.0	4167	-3.4	-40.4	4	0.18	155	8	309.6	310.3	309.7
610.0	4257	-3.9	-41.3	4	0.17	170	10	310.1	310.7	310.1
597.0	4428	-4.9	-42.9	3	0.15	146	10	310.9	311.4	310.9
583.0	4610	-6.5	-42.4	4	0.16	120	10	311.1	311.8	311.2
552.0	5030	-10.0	-41.4	6	0.19	90	10	311.8	312.5	311.9
520.0	5489	-13.9	-40.2	9	0.22	95	17	312.5	313.3	312.5
508.0	5668	-15.5	-39.8	10	0.24	110	17	312.7	313.6	312.8
500.0	5790	-16.5	-39.5	12	0.25	100	17	312.9	313.8	312.9
490.0	5940	-17.6	-44.4	8	0.15	95	16	313.3	313.9	313.3
475.0	6171	-19.4	-52.0	4	0.07	120	14	313.9	314.2	313.9
464.0	6346	-20.7	-57.7	2	0.03	118	15	314.4	314.5	314.4
432.0	6863	-25.2	-55.5	4	0.05	110	17	315.1	315.3	315.1
421.0	7050	-26.9	-54.7	5	0.05	130	14	315.4	315.6	315.4
400.0	7420	-30.1	-53.1	9	0.07	125	14	315.8	316.1	315.8
386.0	7673	-32.5	-51.5	13	0.09	125	17	315.9	316.2	315.9
385.0	7690	-32.6	-51.7	13	0.08	125	17	315.9	316.3	315.9
360.0	8152	-36.3	-56.5	11	0.05	155	17	317.2	317.4	317.2
328.0	8791	-41.3	-63.2	8	0.02	175	16	318.8	318.9	318.8
311.0	9157	-44.2	-67.0	6	0.02	160	16	319.6	319.7	319.6
307.0	9246	-44.9	-67.9	6	0.01	155	15	319.9	319.9	319.9
300.0	9400	-46.3	-68.3	6	0.01	145	14	320.0	320.1	320.0
284.0	9758	-49.4	-68.1	9	0.01	115	16	320.6	320.7	320.6
250.0	10590	-56.5	-67.5	24	0.02	120	25	321.9	322.0	321.9
246.0	10692	-57.3	-68.3	23	0.02	113	24	322.2	322.3	322.2
233.0	11035	-56.7	-74.2	9	0.01	90	21	328.1	328.1	328.1
232.0	11063	-56.7	-74.7	9	0.01	95	21	328.6	328.6	328.6
223.0	11310	-58.2	-74.4	11	0.01	140	14	329.9	330.0	329.9
213.0	11597	-60.0	-74.0	14	0.01	150	12	331.5	331.6	331.5
200.0	11990	-62.5	-73.5	21	0.01	140	8	333.6	333.7	333.6
189.0	12336	-65.3	-72.3	37	0.01	245	4	334.6	334.6	334.6
182.0	12564	-65.4	-73.8	30	0.01	275	12	338.0	338.1	338.0
179.0	12665	-65.4	-74.4	28	0.01	285	10	339.6	339.6	339.6
174.0	12837	-65.5	-75.5	24	0.01	288	5	342.2	342.3	342.2
170.0	12979	-63.9	-78.2	13	0.01	290	2	347.2	347.3	347.2
166.0	13125	-62.2	-80.9	6	0.00	260	10	352.4	352.5	352.4
164.0	13199	-61.3	-82.3	5	0.00	265	13	355.1	355.1	355.1
156.0	13508	-61.8	-83.3	4	0.00	285	25	359.4	359.5	359.5
150.0	13750	-62.1	-84.1	4	0.00	305	21	362.9	362.9	362.9
147.0	13875	-61.9	-84.3	4	0.00	315	19	365.3	365.3	365.3
141.0	14132	-61.6	-84.6	3	0.00	305	14	370.3	370.3	370.3
133.0	14493	-61.1	-85.1	3	0.00	316	15	377.4	377.4	377.4
130.0	14634	-61.3	-85.3	3	0.00	320	16	379.5	379.5	379.5
121.0	15076	-61.8	-85.8	3	0.00	275	19	386.4	386.4	386.4
113.0	15497	-62.4	-86.4	3	0.00	295	29	393.0	393.0	393.0
105.0	15949	-62.9	-86.9	3	0.00	320	17	400.3	400.3	400.3
100.0	16250	-63.3	-87.3	3	0.00	285	12	405.2	405.2	405.2

Slika 1.1 Radiosondažna mjerenja za postaju Zagreb 25.10.2021. u 00 UTC. Preuzeto s web stranice: <http://weather.uwyo.edu/upperair/sounding.html>

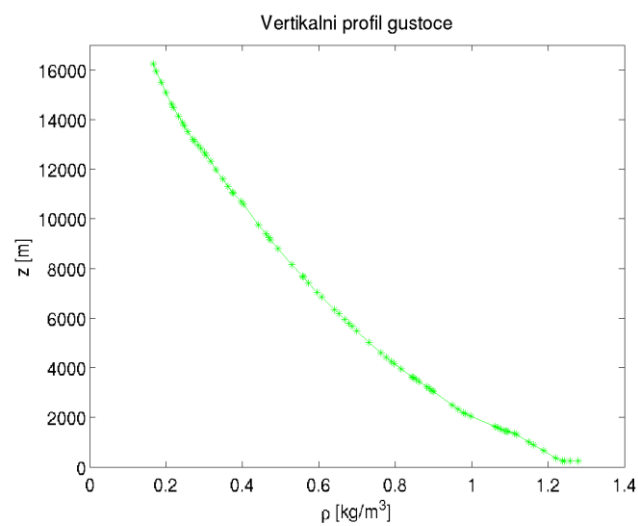
a)



b)



c)



Slika 1.2: Vertikalni profil a) tlaka, b) temperature, c) gustoće atmosfere.

2 Totalni diferencijal

U meteorologiji nas često zanima akceleracija u fiksnoj točki prostora. Zbog toga trebamo naći vezu između akceleracija u sustavu koji prati gibanje – Lagrangeov referentni sustav – i akceleracije u sustavu koji je fiksiran u prostoru – Eulerov referentni sustav. Potrebno je vremensku promjenu promatrane varijable, koja je prikazana u jednom koordinatnom sustavu, povezati s promjenom iste varijable u drugom sustavu.

Lagrangeov sustav (prati gibanje česti)

Vremenska promjena varijable naziva se totalni diferencijal i opisuje ukupnu promjenu varijable. Oznaka za totalni diferencijal:

$$\frac{D}{Dt} \text{ ili } \frac{d}{dt}.$$

Totalni diferencijal također se zove i materijalni ili procesni diferencijal kako bi se naglasilo da je to promjena koja se računa prateći gibanje česti fluida, tj. promjena koja se računa prateći neki fizikalni proces kojem je podvrgnuta čest.

Eulerov sustav (sustav fiksiran u prostoru)

Parcijalna derivacija po vremenu

$$\frac{\partial}{\partial t}$$

opisuje vremensku promjenu varijable u fiksnoj točki (lokalnu promjenu) i naziva se lokalni diferencijal.

Veza između ukupne i lokalne promjene neke varijable

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T, \quad (2.1)$$

gdje je T skalar (npr. temperatura).

Lokalna promjena varijable jednaka je razlici promjene promatrane varijable prateći gibanje i advektivne promjene te varijable,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla T. \quad (2.2)$$

Član $\frac{\partial T}{\partial t}$ u jednadžbi (2.2) zovemo temperaturna tendencija, a označava promjenu temperature u fiksnoj točki (npr. meteorološkoj postaji). U slučaju stacionarnog strujanja $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

Član $\frac{DT}{Dt}$ u jednadžbi (2.2) opisuje promjenu temperature česti zraka koja se giba (npr. zbog hlađenja, oslobađanjem latentne topline). Ako je $\frac{DT}{Dt} = 0$, tada je T konzervativna veličina s obzirom na gibanje.

Član $-\vec{v} \cdot \nabla T$ u jednadžbi (2.2) zovemo advekcija skalara. Advektivna promjena opisuje doprinos lokalnoj promjeni skalara zbog gibanja zraka (gibanjem se dolazi u područje s drugačijom vrijednosti skalara T).

Ako se radi o temperaturi,

$$-\vec{v} \cdot \nabla T < 0 \text{ hladna advekcija,} \quad (2.3)$$

vjetar puše iz hladnijeg područja u područje gdje se nalazi topliji zrak $\rightarrow$ advekcija temperature je negativna $\rightarrow$ advektivni član doprinosi padu temperature u promatranoj točki.

$$-\vec{v} \cdot \nabla T > 0 \text{ topla advekcija,} \quad (2.4)$$

zrak struji iz toplijeg prema hladnijem području, stoga temperatura lokalno raste.

Temperaturna advekcija je proces kojim se pomoću vjetra prenosi toplota kroz atmosferu. Ovisi o brzini vjetra, lokalnom gradijentu temperature i odnosu ta dva faktora,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{advekcija}} = -\vec{v} \cdot \nabla T = -\vec{v} \cdot \text{grad } T. \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{advekcija}} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} - w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.6)$$

2.1 Zadatci

1. Površinsko polje tlaka opada za 3 hPa/180 km u smjeru istoka. Brod plovi prema istoku brzinom od 10 km h⁻¹. Instrument na brodu bilježi pad tlaka od 1 hPa/3 h. Kolika je promjena tlaka na otoku pored kojeg brod prolazi?

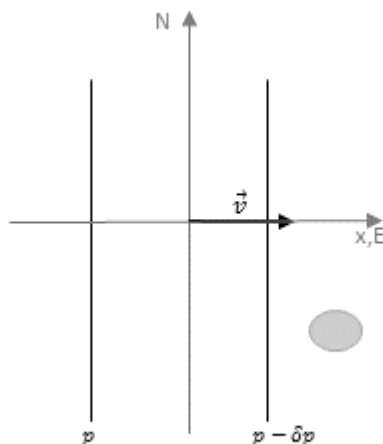
Rješenje:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3 \text{ hPa}}{180 \cdot 10^3 \text{ m}}$$

$$\frac{Dp}{Dt} = -\frac{1 \text{ hPa}}{3 \text{ h}}$$

$$u = 10 \text{ km h}^{-1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = ?$$



$$\begin{aligned} \frac{Dp}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \\ v &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{Dp}{Dt} - u \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1 \text{ hPa}}{3 \text{ h}} + 10 \text{ km h}^{-1} \frac{3 \text{ hPa}}{180 \text{ km}} = -\frac{1 \text{ hPa}}{3 \text{ h}} + \frac{1 \text{ hPa}}{6 \text{ h}} \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1 \text{ hPa}}{6 \text{ h}} \end{aligned}$$

2. Brod putuje prema sjeveru brzinom od 10 km h⁻¹. Tlak pri tlu raste prema sjeverozapadu za 5 Pa km⁻¹. Koliku tendenciju tlaka bilježi barograf na obližnjem otoku, ako tlak izmjeren na brodu opada za 1 hPa/3h?

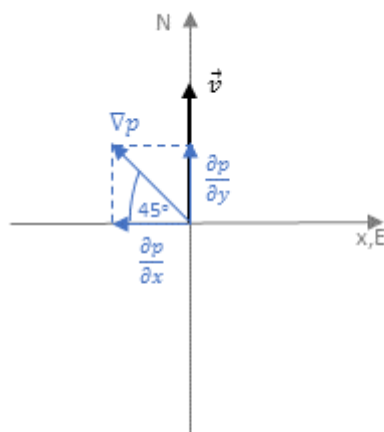
Rješenje:

$$v = 10 \text{ km h}^{-1}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} = 5 \text{ Pa km}^{-1}$$

$$\frac{Dp}{Dt} = -\frac{1 \text{ hPa}}{3 \text{ h}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = ?$$



$$\begin{aligned}\frac{Dp}{Dt} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{Dp}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla p = \frac{Dp}{Dt} - |\vec{v}| \cdot |\nabla p| \cos \alpha \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1 \text{ hPa}}{3 \text{ h}} - 10 \text{ km h}^{-1} \cdot \sqrt{12.5} \frac{\text{Pa}}{\text{km}} = -\frac{2.06 \text{ hPa}}{3 \text{ h}}\end{aligned}$$

3. Izračunajte lokalnu promjenu temperature tijekom tri sata ako horizontalni vjetar brzine 6 m s^{-1} zatvara kut od 60° sa smjerom najvećeg pada temperature. Najkraća udaljenost između izoterma povučenih svakih 5°C na karti razmjera $1:10^7$ iznosi 2.5 cm . Temperatura pojedinih česti zraka ne mijenja se u vremenu.

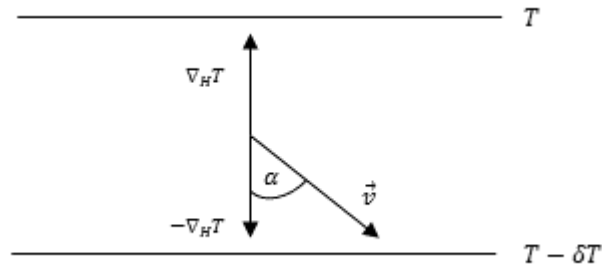
Rješenje:

$$|\vec{v}| = 6 \text{ m s}^{-1}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\nabla_H T = \frac{5^\circ\text{C}}{2.5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 10^7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = ?$$



$$\begin{aligned}\frac{DT}{Dt} &= \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla T \\ \frac{DT}{Dt} &= 0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v}_H \cdot \nabla_H T - w \frac{\partial T}{\partial z}, \quad w \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v}_H \cdot \nabla_H T = -|\vec{v}_H| \cdot |\nabla_H T| \cos \angle(\vec{v}_H, \nabla_H T) = -|\vec{v}_H| \cdot |\nabla_H T| \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -6 \cdot 3600 \text{ m h}^{-1} \cdot \frac{2^\circ\text{C}}{10^5 \text{ m}} \cdot \cos(120^\circ) = 0.216 \frac{^\circ\text{C}}{\text{h}} = \frac{0.648^\circ\text{C}}{3 \text{ h}}$$

4. Temperatura u točki koja se nalazi 100 km sjeverno od meteorološke postaje je 6°C niža od temperature izmjerene na postaji. Kolika će biti promjena temperature na postaji ako puše sjeveroistočni vjetar brzine 10 m s^{-1} , a zrak se zbog zračenja zagrijava za 1°C h^{-1} ?

Rješenje:

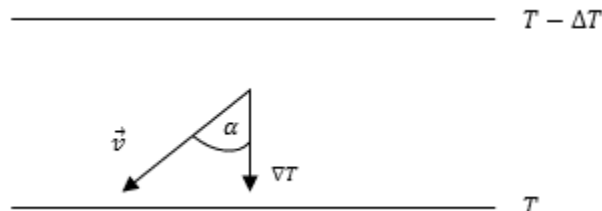
$$\Delta T = 6^\circ\text{C}$$

$$\nabla T = \frac{6^\circ\text{C}}{10^5 \text{ m}}$$

$$|\vec{v}| = 10 \text{ m s}^{-1}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1^\circ\text{C}}{\text{h}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = ?$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{DT}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla T \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{DT}{Dt} - |\vec{v}| \cdot |\nabla T| \cos \alpha = \frac{1^\circ \text{C}}{\text{h}} - 10 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{6^\circ \text{C}}{10^5 \text{ m}} \cdot \cos(45^\circ) \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1^\circ \text{C}}{\text{h}} - 10 \text{ m} \cdot 3600 \text{ h}^{-1} \cdot \frac{6^\circ \text{C}}{10^5 \text{ m}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.527 \frac{^\circ \text{C}}{\text{h}}\end{aligned}$$

3 Fundamentalne i prividne sile

3.1 Fundamentalne sile

Pod fundamentalne sile pripadaju sila gradijenta tlaka, gravitacijska sila i sila trenja ili viskoznost.

Sila gradijenta tlaka (po jedinici mase)

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.1)$$

Gravitacijska sila

$$\vec{F}_g = -G \frac{M_z m}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (3.2)$$

Gravitacijska konstanta:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}. \quad (3.3)$$

Jedinična masa atmosfere osjeća gravitacijsku silu zbog Zemljine gravitacije:

$$\frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{g}^* = -G \frac{M_z}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (3.4)$$

gdje je $r = R_z + z$, R_z je radijus Zemlje.

Za atmosferu vrijedi $z \ll R_z$,

$$\vec{g}_0 = -G \frac{M_z}{R_z^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (3.5)$$

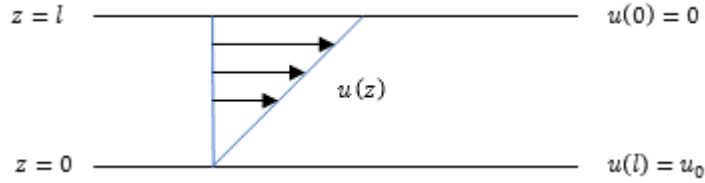
$$\vec{g}^* = -G \frac{M_z}{(R_z + z)^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = -G \frac{M_z}{R_z^2 \left(1 + \frac{z}{R_z} \right)^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (3.6)$$

$$\vec{g}^* = \frac{\vec{g}_0}{\left(1 + \frac{z}{R_z} \right)^2}. \quad (3.7)$$

U meteorologiji $z \ll R_z$, pa slijedi $\vec{g}^* = \vec{g}_0 = \text{konst.}$

Sila trenja ili viskoznost

Na slici 3.1. prikazan je nestlačiv fluid koji se nalazi između dvije ploče. Donja ploča je fiksirana, a gornja se giba brzinom u_0 u smjeru x-osi.



Slika 3.1. Fluid između dvije ploče. Donja ploča je fiksirana, a gornja se giba brzinom u_0 u smjeru x-osi.

Tangencijalna sila na gornju ploču, koja je potrebna da je održi u jednolikom gibanju, proporcionalna je površini ploče A ,

$$F = \mu A \frac{u_0}{l}, \quad (3.8)$$

gdje je μ koeficijent dinamičke viskoznosti.

Istom silom F gornja ploča djeluje na fluid koji se nalazi odmah ispod ploče. U slučaju jednolikog gibanja, svaki horizontalni sloj fluida mora djelovati istom tom silom na sloj fluida koji se nalazi neposredno ispod.

Izračunamo li limes po debljini sloja koja teži k nuli, dobit ćemo viskoznu silu po jedinici površine,

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.9)$$

tj. napetost u smjeru z-osi zbog vertikalnog smicanja x-komponente brzine (u).

Viskozna sila po jedinici mase:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (3.10)$$

Za $\mu = \text{konst.}$ definira se koeficijent kinematičke viskoznosti ν , koji je za atmosferu ispod 100 m visine vrlo mali, tako da je molekularna viskoznost zanemariva (osim u površinskom sloju),

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (3.11)$$

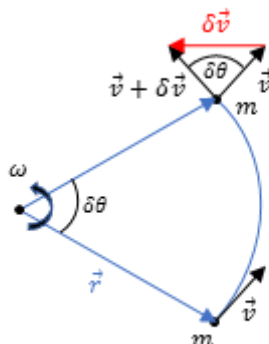
3.2 Ne-Newtonovi sustavi i prividne sile

Prividne sile javljaju se ako se tijelo giba u odnosu na sustav koji rotira sa Zemljom. Tijelo koje miruje ili se giba jednoliko s obzirom na rotirajuću Zemlju, giba se s obzirom na fiksnu točku. Odnosno, gibanje koje sa Zemlje izgleda inercijalno, zapravo je akcelerirano gibanje. Rotirajući koordinatni sustav je ne-newtonovski sustav.

U tom slučaju, Newtonovi zakoni gibanja mogu se primijeniti samo ako se uvaži akceleracija koordinatnog sustava. Najjednostavniji način jest uvođenje prividnih sila u II. Newtonov zakon. Te su sile članovi inercijalne reakcije koje nastaju zbog akceleracija koordinatnog sustava.

Centrifugalna sila (tijelo miruje s obzirom na Zemlju)

Na slici 3.2 prikazano je tijelo mase m koje miruje s obzirom na Zemlju. Zemlja rotira konstantnom kutnom brzinom ω . Vektor udaljenosti tijela od osi rotacije označen je sa $\vec{r}$. Iznos brzine se ne mijenja, $|\vec{v}| = \text{konst.}$, ali se mijenja smjer. Dakle, akceleracija postoji.



Slika 3.2. Tijelo mase m miruje s obzirom na Zemlju koja rotira konstantnom kutnom brzinom ω . Vektor udaljenosti tijela od osi rotacije označen je sa $\vec{r}$.

$$|\delta \vec{v}| = |\vec{v}| \delta \theta \quad (3.12)$$

Jednadžbu (3.12) dijelimo s δt , za $\delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = |\vec{v}| \frac{d\theta}{dt} \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (3.13)$$

$$|\vec{v}| = \omega \cdot r \quad (3.14)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (3.15)$$

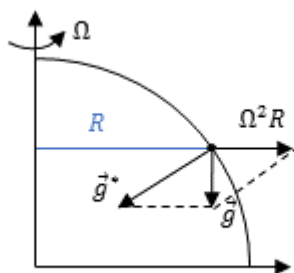
Uvažavajući jednadžbe (3.13) - (3.15) dobivamo izraz za centripetalnu akceleraciju (u smjeru osi rotacije), koja se vidi iz fiksnog koordinatnog sustava,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 \vec{r} \quad (3.16)$$

Iz fiksnog koordinatnog sustava vidimo konstantnu centripetalnu akceleraciju. Ako gledamo iz sustava koji rotira zajedno s masom m , tada vidimo da je masa stacionarna, ali na nju djeluje sila u smjeru osi rotacije. Moramo dodati drugu prividnu silu kako bi tijelo bilo u ravnoteži. Tu silu zovemo centrifugalna sila, te je ona inercijalna reakcija. Dakle, iz sustava koji rotira s masom m vidimo stacionarnu masu, a centripetalna sila uravnotežena je centrifugalnom.

Sila teža

Sila teža je vektorski zbroj centrifugalne i gravitacijske sile.

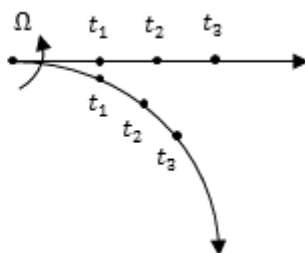


Slika 3.3. Sila teža

$$\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R} \quad (3.17)$$

Coriolisova sila

Neka se tijelo giba jednoliko s obzirom na inercijalni koordinatni sustav. Ako to tijelo promatramo iz sustava koji rotira i gdje je os rotacije okomita na ravninu gibanja, putanja tijela izgledat će zakrivljeno.



Slika 3.4. Izgled putanje u inercijalnom sustavu i sustavu koji rotira stalnom kutnom brzinom.

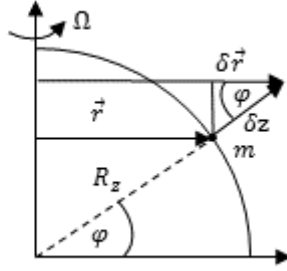
U rotirajućem koordinatnom sustavu postoji prividna sila koja otklanja tijelo koje se giba jednoliko s pravocrtne putanje. Rezultantna putanja je zakrivljena u smjeru suprotnom od smjera rotacije koordinatnog sustava. Silu otklona zovemo Coriolisova sila.

Coriolisova sila djeluje okomito na vektor brzine $\vec{v}$, te može promijeniti samo smjer gibanja. Otklon zbog Coriolisove sile na sjevernoj hemisferi uvijek je udesno od smjera gibanja.

$$\vec{F}_{COR} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (3.18)$$

Utjecaj Coriolisove sile na tijelo koje se giba vertikalno

Tijelo mase m u početku se nalazi na geografskoj širini φ na sjevernoj hemisferi. Zatim se počne gibati vertikalno, prema gore. U novom položaju radijus udaljenosti od osi rotacije povećava se za δr .



Slika 3.5. Tijelo mase m na geografskoj širini φ giba se vertikalno u sustavu koji rotira kutnom brzinom Ω .

U trenutku $t = 0$ tijelo mase m nalazi se u početnom položaju, a vektor udaljenosti tijela od osi rotacije je $\vec{r}$. U trenutku $t = t + \delta t$ zbog vertikalnog gibanja tijela vektor udaljenosti u novom položaju poveća se na $\vec{r} + \delta\vec{r}$.

U početnom položaju zakretni moment tijela po jedinici mase $\vec{r} \times \vec{v}(\vec{r})$, gdje je brzina $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, postoji samo zbog rotacije Zemlje. U novom položaju zakretni moment po jedinici mase trebao bi se povećati za $(\vec{r} + \delta\vec{r}) \times \vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r})$, gdje je $\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{r} + \delta\vec{r})$ jer se povećao radijus udaljenosti od osi rotacije.

Zakretni moment mora biti očuvan. Zbog toga se razvija zonalna komponenta brzine $\delta\vec{v}$ takva da zakretni moment tijela u novom položaju bude jednak zakretnom momentu u početnom položaju:

$$\vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}) = (\vec{r} + \delta\vec{r}) \times \vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}) + (\vec{r} + \delta\vec{r}) \times \delta\vec{v} \quad (3.19)$$

$$\vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = (\vec{r} + \delta\vec{r}) \times (\vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \delta\vec{r}) + (\vec{r} + \delta\vec{r}) \times \delta\vec{v} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \\ = \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \delta\vec{r}) + \delta\vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \delta\vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \delta\vec{r}) + (\vec{r} + \delta\vec{r}) \times \delta\vec{v} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pravilo za višestruki vektorski produkt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} 0 = \vec{\Omega}(\vec{r} \cdot \delta\vec{r}) - \delta\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\Omega}) + \vec{\Omega}(\delta\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\delta\vec{r} \cdot \vec{\Omega}) + \vec{\Omega}(\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r}) - \delta\vec{r}(\delta\vec{r} \cdot \vec{\Omega}) \\ + (\vec{r} + \delta\vec{r}) \times \delta\vec{v} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sa slike 3.5. možemo vidjeti da vrijedi:

$$\vec{r} \cdot \vec{\Omega} = 0$$

$$\vec{\Omega} \cdot \delta\vec{r} = 0$$

$$\delta\vec{r} \cdot \vec{r} = r\delta r \cos(0^\circ) = r\delta r$$

$$\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r} = \delta r^2$$

Jednadžbu (3.23) sada pišemo:

$$0 = \vec{\Omega}(\vec{r} \cdot \delta\vec{r}) + \vec{\Omega}(\delta\vec{r} \cdot \vec{r}) + \vec{\Omega}(\delta\vec{r} \cdot \delta\vec{r}) + (\vec{r} + \delta\vec{r}) \times \delta\vec{v} \quad (3.24)$$

$$0 = 2r\delta r\vec{\Omega} + \delta r^2\vec{\Omega} + (\vec{r} + \delta\vec{r}) \times \delta\vec{v} \quad (3.25)$$

Pretpostavimo infinitezimalno mali vertikalni pomak tijela $\delta r \rightarrow 0$, $\delta r^2 \rightarrow 0$:

$$0 = 2r\delta r\vec{\Omega} + (\vec{r} + \delta\vec{r}) \times \delta\vec{v} \quad (3.26)$$

Jednadžbu (3.26) dijelimo s modulom vektora udaljenosti od osi rotacije $|\vec{r}| = r$:

$$0 = 2\delta r\vec{\Omega} + \left(\frac{\vec{r}}{r} + \frac{\delta\vec{r}}{r}\right) \times \delta\vec{v} \quad (3.27)$$

gdje je $\delta\vec{r} = \delta r \vec{r}$, te je $\frac{\delta r}{r} \ll 1$, zbog toga drugi član unutar zagrade možemo zanemariti.

$$0 = 2\delta r\vec{\Omega} + \frac{\vec{r}}{r} \times \delta\vec{v} \quad (3.28)$$

Uzmemo li u obzir da je $\delta\vec{v}$ zonalna brzina (smjer istok-zapad), $\delta\vec{v} = \delta u \vec{i}$, jednadžba (3.28) postaje:

$$0 = 2\delta r\vec{\Omega} + \frac{\delta u}{r}(\vec{r} \times \vec{i}) = 2\delta r\vec{\Omega} + \frac{\delta u}{r}r\sin(90^\circ)\left(\frac{\vec{\Omega}}{\Omega}\right) \quad (3.29)$$

$$\delta u = -2\Omega\delta r \quad (3.30)$$

Iz slike 3.5. vidimo da je $\delta r = \delta z \cos\varphi$, pa slijedi:

$$\delta u = -2\Omega\delta z \cos\varphi \quad (3.31)$$

Podijelimo li jednadžbu (3.31) sa δt , uz uvjet $\delta t \rightarrow 0$, $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt}$, dobivamo komponentu Coriolisove akceleracije u smjeru x-osi koja postoji u sustavu koji rotira zbog vertikalnog gibanja tijela:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega \frac{dz}{dt} \cos\varphi = -2\Omega w \cos\varphi \quad (3.32)$$

Iz jednadžbe (3.32) zaključujemo da se tijelo koje se giba vertikalno prema gore ($w > 0$) otklanja prema zapadu, a tijelo koje se giba vertikalno prema dolje ($w < 0$) otklanja se prema istoku. To vrijedi na obje hemisfere jer je $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$.

Na sinoptičkoj skali vertikalne brzine puno su manje u usporedbi s horizontalnim brzinama. Zbog toga je doprinos vertikalnog gibanja Coriolisovoj akceleraciji zanemarivo malen u odnosu na doprinos od horizontalnih gibanja.

Pretpostavimo da se tijelo giba u odnosu na Zemlju tako da ima komponente brzine u smjeru osi x, y, z, gdje je x-os usmjerena prema istoku, y-os prema sjeveru, a z-os vertikalno prema gore.

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (3.33)$$

U tom se slučaju tijelo pri gibanju otklanja zbog trodimenzionalne Coriolisove akceleracije:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{co} = 2\Omega v \sin\varphi - 2\Omega w \cos\varphi = fv - 2\Omega w \cos\varphi \quad (3.34)$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{co} = -2\Omega u \sin\varphi = -fu \quad (3.35)$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{co} = 2\Omega u \cos\varphi \quad (3.36)$$

3.3 Zadatci

1. Izračunajte kut između gravitacijske sile i sile teže na površini Zemlje kao funkciju geografske širine. Pretpostavite da je radijus Zemlje konstantan. Izračunajte taj kut za čest koja miruje na površini Zemlje na $\varphi = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Rješenje:

Gravitacijska sila:

$$\vec{G} = -G \frac{M_z m}{R_z^2} \left(\frac{\vec{R}_z}{R_z} \right) = m\vec{g}^*$$

Centrifugalna sila:

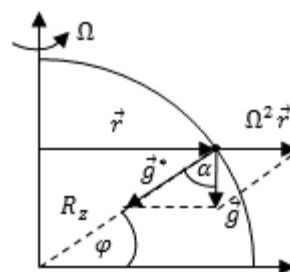
$$\vec{F}_c = m\Omega^2 \vec{r}$$

Akceleracija sile teže:

$$\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{r}$$

$\vec{r}$ – vektor udaljenosti od osi rotacije

$$|\vec{r}| = R_z \cos\varphi$$



Sinusov poučak (stranica trokuta a je nasuprot kuta α , stranica b nasuprot kuta β itd.):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\left| \frac{\Omega^2 \vec{r}}{\sin\alpha} \right| = \left| \frac{\vec{g}}{\sin\varphi} \right| \Rightarrow \sin\alpha = \left| \frac{\sin\varphi}{\vec{g}} \right| \cdot |\Omega^2 \vec{r}| = \frac{\sin\varphi}{g} \Omega^2 R_z \cos\varphi$$

$$\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi \cos\varphi$$

$$\sin\alpha = \frac{\Omega^2 R_z \sin(2\varphi)}{2g}$$

φ [°]	30	45	60	90
α [°]	$8.6 \cdot 10^{-2}$	$9.9 \cdot 10^{-2}$	$8.6 \cdot 10^{-2}$	0

2. Izračunajte visinu z na kojoj meteorološki satelit u ekvatorijalnoj ravnini može biti geostacionaran (tj. može uvijek ostati iznad iste točke na površini Zemlje).

Rješenje:

Gravitacijska sila kojom Zemlja privlači satelit mora biti u ravnoteži s centrifugalnom silom:

$$m\vec{g}^* + m\Omega^2\vec{r} = 0$$

$$\vec{g}^* = -G \frac{M_z}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

gdje je $r = R_z + z$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ gravitacijska konstanta, $M_z = 5.976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ masa Zemlje. Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

$$\Omega^2\vec{r} = G \frac{M_z}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \Rightarrow \Omega^2 r = G \frac{M_z}{r^2}$$

$$\Omega^2(R_z + z) = G \frac{M_z}{(R_z + z)^2}$$

$$(R_z + z)^3 = G \frac{M_z}{\Omega^2} \Rightarrow z = \left(G \frac{M_z}{\Omega^2} \right)^{1/3} - R_z$$

$$z = 3.5 \cdot 10^7 \text{ m}$$

3. Loptica je ispaljena horizontalno za geografskoj širini na $\varphi = 46^\circ \text{N}$. Ako loptica putuje horizontalno 4 sekunde i pri tome prijeđe udaljenost od 100 m, koliko se lateralno (bočno) otkloni zbog rotacije Zemlje? Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Rješenje:

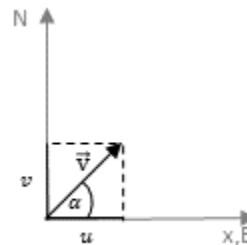
$$\varphi = 46^\circ \text{N}$$

$$d = 100 \text{ m}$$

$$t = 4 \text{ s}$$

Lateralni otklon:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$



$$|\vec{v}| = \frac{d}{t} = \frac{100 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 25 \text{ m s}^{-1}$$

$$u = |\vec{v}| \cos \alpha, \quad v = |\vec{v}| \sin \alpha, \quad w = 0$$

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{co} = 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi = 2\Omega v \sin \varphi / \int_{t=0}^t$$

$$\left(\frac{dv}{dt} \right)_{co} = -2\Omega u \sin \varphi / \int_{t=0}^t$$

$$u = 2\Omega v \sin \varphi \cdot t, \quad v = -2\Omega u \sin \varphi \cdot t$$

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}$$

$$\Delta x = \int_{t=0}^t u dt = 2\Omega v \sin \varphi \int_{t=0}^t t dt = 2\Omega v \sin \varphi \frac{t^2}{2}$$

$$\Delta y = \int_{t=0}^t v dt = -2\Omega u \sin \varphi \int_{t=0}^t t dt = -2\Omega u \sin \varphi \frac{t^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\Delta l^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Omega^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi t^4 + \Omega^2 |\vec{v}|^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi t^4 \\ \Delta l^2 &= \Omega^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \varphi t^4 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \Omega^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \varphi t^4 \\ \Delta l &= \Omega |\vec{v}| \sin \varphi t^2 = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1} \cdot 25 \text{ms}^{-1} \cdot \sin(46^\circ) \cdot 16 \text{s}^2 \\ \Delta l &= 2.1 \text{cm}\end{aligned}$$

4. Projektil je ispaljen vertikalno uvis početnom brzinom w_0 na geografskoj širini φ . Zanimajte otpor zraka i izračunajte koliko će se projektil otkloniti kada se vrati na tlo? Zanimajte član $2\Omega w \cos \varphi$ u odnosu na g u jednadžbi gibanja za vertikalnu komponentu.

Rješenje:

U jednadžbi gibanja zanemarujemo doprinos Coriolisove sile, $2\Omega w \cos \varphi \ll$

$$\frac{dw}{dt} = 2\Omega w \cos \varphi - g \approx -g$$

Integriramo po vremenu od 0 do t , tako da se dobije:

$$w = w_0 - gt$$

gdje je w_0 početna brzina kojom je projektil ispaljen.

Na vrhu putanje $w(t) = 0$, slijedi da je vrijeme potrebno za gibanje prema gore jednako

$$t = \frac{w_0}{g}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dt}\right)_{co} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}\right) = -2\Omega w \cos \varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}\right) &= -2\Omega \cos \varphi (w_0 - gt) / \int_{t=0}^{t=w_0/g} \\ \frac{dx}{dt} &= -2\Omega \cos \varphi \left(w_0 t - g \frac{t^2}{2}\right) / \int_{t=0}^{t=w_0/g} \\ x\left(\frac{w_0}{g}\right) - x_0 &= -2\Omega \cos \varphi \left(w_0 \frac{t^2}{2} - g \frac{t^3}{6}\right) = -\Omega \cos \varphi \left(w_0 t^2 - g \frac{t^3}{3}\right) \\ x_0 &= 0, \quad t = \frac{w_0}{g} \\ x\left(\frac{w_0}{g}\right) &= -\Omega \cos \varphi \left(w_0 \frac{w_0^2}{g^2} - g \frac{w_0^3}{3g^3}\right) = -\frac{2}{3} \Omega \cos \varphi \frac{w_0^3}{g^2}\end{aligned}$$

Gibanje prema dolje, granice integracije su od $t = \frac{w_0}{g}$ do $2t = 2\frac{w_0}{g}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}\right) &= -2\Omega w \cos \varphi / \int_t^{2t} \\ \frac{dx}{dt} &= -2\Omega \cos \varphi \left(w_0 t - g \frac{t^2}{2}\right) / \int_t^{2t} \\ x\left(\frac{2w_0}{g}\right) - x\left(\frac{w_0}{g}\right) &= -\Omega \cos \varphi \left(w_0 t^2 - g \frac{t^3}{3}\right) \Big|_t^{2t} \\ x\left(\frac{2w_0}{g}\right) - x\left(\frac{w_0}{g}\right) &= -\Omega \cos \varphi \left(w_0 \frac{4w_0^2}{g^2} - g \frac{8w_0^3}{3g^3} - w_0 \frac{w_0^2}{g^2} + g \frac{w_0^3}{3g^3}\right) \\ x\left(\frac{2w_0}{g}\right) + \frac{2}{3} \Omega \cos \varphi \frac{w_0^3}{g^2} &= -\Omega \cos \varphi \left(\frac{3w_0^3}{g^2} - \frac{7w_0^3}{3g^2}\right) = -\Omega \cos \varphi \frac{2w_0^3}{3g^2} \\ x\left(\frac{2w_0}{g}\right) &= -\frac{2}{3} \Omega \cos \varphi \frac{w_0^3}{g^2} - \frac{2}{3} \Omega \cos \varphi \frac{w_0^3}{g^2} = -\frac{4}{3} \Omega \cos \varphi \frac{w_0^3}{g^2}\end{aligned}$$

Otklon je prema zapadu (na obje hemisfere jer vrijedi $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$).

5. Projektil je ispaljen prema istoku na geografskoj širini 45°N , te putuje 1000 km horizontalnom brzinom od 800 m s^{-1} . Koliki je iznos otklona projektila od početne paralele u horizontalnoj ravnini zbog Coriolisove sile i u kojem je smjeru taj otklon? Kutna brzina rotacije Zemlje iznosi $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Rješenje:

$$u = \text{konst.} = 800 \text{ m s}^{-1}$$

$$d = 1000 \text{ km}$$

$$\varphi = 45^\circ \text{N}$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u \sin\varphi / \int_{t=0}^t$$

$$v - v_0 = -2\Omega u \sin\varphi t, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad v_0 = 0$$

$$dy = -2\Omega u \sin\varphi t dt$$

Integrira se po vremenu od 0 do t:

$$\Delta y = -2\Omega u \sin\varphi \frac{t^2}{2}, \quad t = \frac{d}{u}$$

$$\Delta y = -\Omega \frac{d^2}{u} \sin\varphi = -64.4 \text{ km}$$

Otklon je prema jugu.

6. Izračunajte koliko će se tijelo otkloniti od vertikale zbog djelovanja Coriolisove sile kada se pusti da slobodno pada s visine od 5 km iznad ekvatora. Viskoznost zraka se zanemaruje. Koliki je iznos tog otklona i u kojem je smjeru?

Rješenje:

$$u = v = 0$$

$$\varphi = 0^\circ \rightarrow \sin\varphi = 0, \cos\varphi = 1$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega w \cos\varphi$$

$$\frac{du}{dt} = -2\Omega w$$

Za $w < 0 \rightarrow \frac{du}{dt} > 0$. Slobodni pad $w = -gt$:

$$\frac{du}{dt} = 2\Omega g t / \int_{t=0}^t$$

$$u = 2\Omega g \frac{t^2}{2} = \Omega g t^2$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \Omega g t^2 \rightarrow dx = \Omega g t^2 dt$$

Integrira se po vremenu od 0 do t:

$$\Delta x = \Omega g \frac{t^3}{3}$$

Slobodni pad s visine $h = \frac{gt^2}{2} \rightarrow t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}$

$$\Delta x = \frac{1}{3} \Omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = 7.75 \text{ m}$$

Otklon je prema istoku.

7. Igrač bejzbola baci lopticu prema istoku na geografskoj širini 38°N . Za vrijeme od 5 s loptica prijeđe udaljenost od 145 m. Koliki je lateralni otklon loptice zbog djelovanja rotacije Zemlje?

Rješenje:

$$\varphi = 38^\circ\text{N}$$

$$\vec{v} = u\vec{l}$$

$$u = \frac{145 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 29 \text{ m s}^{-1}$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{co} = -2\Omega u \sin\varphi / \int_{t=0}^t$$

$$v = -2\Omega u \sin\varphi t$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\Omega u \sin\varphi t / \int_{t=0}^t$$

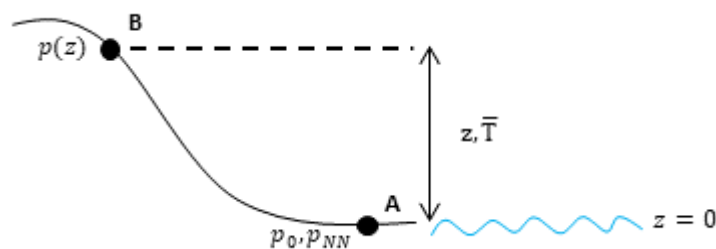
$$\Delta y = -\Omega u \sin\varphi t^2 = -3258.9 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cong -3.3 \text{ cm}$$

Otklon je prema jugu.

4 Geopotencijal i redukcija tlaka na normalni nivo

4.1 Redukcija tlaka na normalni nivo

Na slici 4.1 prikazane su dvije meteorološke postaje koje se nalaze na različitim nadmorskim visinama. Tlak na postaji B niži je u odnosu na tlak izmjeren na postaji A. Takva razlika tlaka izmjerena na postaji A i B nije posljedica jedino meteoroloških uvjeta, već i razlike u nadmorskoj visini. Kako bi podaci na postajama koje se nalaze na različitim nadmorskim visinama bili usporedivi, vrši se redukcija tlaka na normalni nivo (tj. srednju razinu mora).



Slika 4.1: Meteorološke postaje A i B nalaze se na različitim nadmorskim visinama. Tlak na nadmorskoj visini z je $p(z)$, a tlak na srednjoj razini mora je p_{NN} . Srednja temperatura sloja zraka visine z označena je s $\bar{T}$.

Kod redukcije tlaka na normalni nivo tražimo koliki bi bio tlak kada bi postaja bila na razini mora, a da pritom u atmosferi vrijedi hidrostatička ravnoteža:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (4.1)$$

Iz jednadžbe stanja idealnog plina $p = \rho RT$, možemo izraziti gustoću i uvrstiti je u izraz za hidrostatičku ravnotežu (4.1),

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p}{RT} g \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{RT} dz \quad (4.3)$$

Uvrstimo li u gornji izraz (4.3) definiciju srednje temperature sloja zraka od srednje razine mora (NN) do visine z :

$$\bar{T} = \frac{T(z) + T_{NN}}{2}, \quad (4.4)$$

dobivamo izraz (4.5) koji možemo integrirati od tlaka na srednjoj razini mora p_{NN} do tlaka na visini z , $p(z)$, tj. od visine $z=0$ do visine z :

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{R\bar{T}} dz / \int_{p_{NN}, z=0}^{p(z), z} \quad (4.5)$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_{NN}} = -\frac{g}{RT} z / \exp \quad (4.6)$$

$$p_{NN} = p(z) e^{\frac{g}{RT} z} \quad (4.7)$$

Izrazimo li iz gornjeg izraza tlak na visini z , dobivamo hipsometrijsku formulu:

$$p(z) = p_{NN} e^{-\frac{g}{RT} z} \quad (4.8)$$

Izraz za tlak reduciran na normalni nivo također možemo izvesti pomoću vertikalnog temperaturnog gradijenta atmosfere γ ,

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} / \int_{T_0, z=0}^{T, z} \quad (4.9)$$

$$T = T_0 - \gamma z \quad (4.10)$$

Uvrstimo temperaturu iz izraza (4.10) u izraz za hidrostatičku ravnotežu, dobivamo:

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{R T_0 - \gamma z} / \int_{p_0, z=0}^{p, z} \quad (4.11)$$

$$\int_{p_0}^p \frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{\partial z}{T_0 - \gamma z} \quad (4.12)$$

U integral po visini uvrštavamo supstituciju: $T_0 - \gamma z = x$, $-\gamma \partial z = \partial x$, pa se granice integrala mijenjaju iz $z = 0$ u $x = T_0$, te iz $z = z$ u $x = T_0 - \gamma z$.

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{R} \int_{T_0}^{T_0 - \gamma z} \left(-\frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial x}{x} \quad (4.13)$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{R\gamma} \int_{T_0}^{T_0 - \gamma z} \frac{\partial x}{x} \quad (4.14)$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{R\gamma} \ln \frac{T_0 - \gamma z}{T_0} \quad (4.15)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0} \right)^{\frac{g}{R\gamma}} \quad (4.16)$$

$$p_0 = p_{NN} = p(z) \left(\frac{T_0}{T_0 - \gamma z} \right)^{\frac{g}{R\gamma}}. \quad (4.17)$$

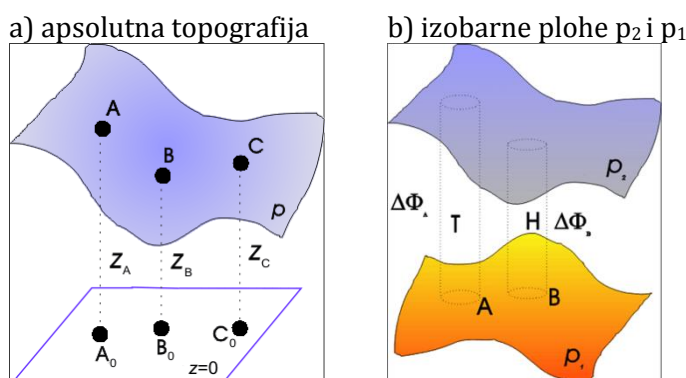
4.2 Geopotencijal

Čest u polju Zemljine sile teže ima potencijalnu energiju. Geopotencijal ili potencijal sile teže dobivamo prikažemo li tu potencijalnu energiju po jedinici mase česti ϕ [J kg^{-1}]:

$$\phi = \int_{z=0}^z g \, dz = gz \quad (4.18)$$

gdje je z srednja geometrijska visina tijela mjerena od srednje razine mora, g akceleracija sile teže.

Geopotencijal je numerički jednak radu potrebnom da se jedinična masa podigne sa srednje razine mora na zadanu geometrijsku visinu z . U meteorologiji najčešće prikazujemo polje geopotencijala na odabranoj izobarnoj plohi, te tako dobivamo kartu apsolutne topografije (slika 4.2a). Dakle, apsolutnu topografiju dobivamo tako da prikažemo polje geopotencijala odabrane izobarne plohe pomoću izolinija geopotencijala. Izobarne plohe imaju reljef, te su na određenim mjestima bliže tlu (udubljenje izobarne plohe) ili dalje od tla (ispupčenje izobarne plohe). Geopotencijal je veći u točkama gdje je izobarna ploha udaljenija od srednje razine mora, nego u točkama gdje je izobarna ploha bliža srednjoj razini mora.



Slika 4.2 Shematski prikaz a) apsolutne topografije izobarne plohe na kojoj je tlak p , te b) izobarne plohe p_2 i p_1 . Na temelju razlike apsolutne topografije p_2 i p_1 (oznaka $\Delta\phi$) dobiva se polje relativne topografije $RT_{p_1}^{p_2}$. Izvor: <http://jadran.gfz.hr/pojmovnik> (pristupljeno: 21.11.2022.)

Relativna topografija je polje razlike geopotencijala između dvije izobarne plohe. Na slici 4.2 b) tlak na gornjoj izobarnoj plohi označen je s p_2 , a na donjoj p_1 . Relativna topografija ($RT_{p_1}^{p_2}$) jednaka je apsolutnoj topografiji plohe p_2 umanjenoj za apsolutnu topografiju plohe p_1 . Na primjer, relativnu topografiju između ploha 500 i 1000 hPa označavamo sa RT_{1000}^{500} .

Geopotencijal se uobičajeno izražava putem geopotencijalne visine Z u geopotencijalnim metrima [gpm]. Jedan geopotencijalni metar odgovara potencijalnoj energiji česti mase 1 kg u polju Zemljine sile teže kada se čest nalazi 1 m iznad srednje razine mora na mjestu gdje je akceleracija sile teže jednaka $g_0 = 9.8 \text{ ms}^{-2}$. Dakle, tj. $1 \text{ gpm} = 9.8 \text{ J kg}^{-1}$.

$$Z = \frac{g}{g_0} z, \quad (4.19)$$

$$Z = \frac{\phi}{9.8} [\text{gpm}] \quad (4.20)$$

4.3 Zadaci

1. Na kojoj visini u homogenoj atmosferi tlak postaje jednak nuli ako prizemni tlak iznosi 1000 hPa, a temperatura 26 °C? Na kojoj visini tlak padne na pola vrijednosti od one koju ima pri tlu?

Rješenje:

$$p_0 = 1000 \text{ hPa}$$

$$T_0 = 26 \text{ °C} = 299.15 \text{ K}$$

$$h(p = 0) = ?$$

$$h(p_0/2) = ?$$

Homogena atmosfera: $\rho = \rho_0 = \text{const.}$

Jednadžba stanja idealnog plina: $p = \rho RT$, $p_0 = \rho_0 RT_0$

Hidrostaticka ravnoteža: $\partial p = -\rho g \partial z$, $\rho = \rho_0$

$$\partial p = -\frac{gp_0}{RT_0} \partial z \quad / \quad \int_{p_0, z=0}^{p(z), z}$$

$$p(z) - p_0 = -\frac{gp_0}{RT_0} z$$

$$p(z) = p_0 - \frac{gp_0}{RT_0} z = p_0 \left(1 - \frac{gz}{RT_0}\right)$$

$$1) \quad p(z) = 0 \rightarrow p(z) = p_0 \left(1 - \frac{gz}{RT_0}\right) = 0 \rightarrow \frac{gz}{RT_0} = 1 \rightarrow z = \frac{RT_0}{g}$$

$$z = 8751.89 \text{ m}$$

$$2) \quad p(z) = \frac{p_0}{2} \rightarrow \frac{p_0}{2} = p_0 \left(1 - \frac{gz}{RT_0}\right) \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{gz}{RT_0} \rightarrow z = \frac{RT_0}{2g}$$

$$z = 4375.95 \text{ m}$$

2. Koliko se mora promijeniti srednja temperatura sloja zraka ako se pri povećanju tlaka na srednjoj razini mora od 5 hPa geopotencijal 500 hPa plohe poveća za 50 gpm? Početna srednja temperatura sloja je 260 K, a početni tlak na razini mora iznosi 1000 hPa.

Rješenje:

$$\Delta p_0 = 5 \text{ hPa}$$

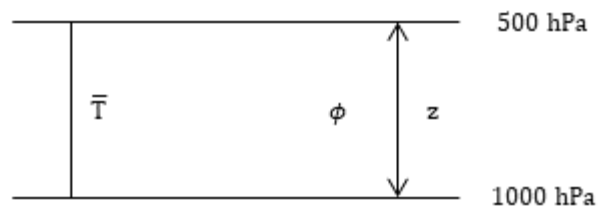
$$\Delta \phi = 50 \text{ gpm} = 490 \text{ J kg}^{-1}$$

$$p_{01} = 1000 \text{ hPa}$$

$$\bar{T}_1 = 260 \text{ K}$$

$$p = 500 \text{ hPa}$$

$$\Delta \bar{T} = ?$$



$$p_0 = p_{NN} = p(z) e^{\frac{g}{RT} z}, \quad gz = \phi$$

$$p_0 = p(z) e^{\frac{\phi}{RT}}$$

$$1) \quad p_{01} = p e^{\frac{\phi_1}{RT_1}} \quad /: p \rightarrow \frac{p_{01}}{p} = e^{\frac{\phi_1}{RT_1}} \quad / \ln \rightarrow \ln \frac{p_{01}}{p} = \frac{\phi_1}{RT_1} \rightarrow \phi_1 = R \bar{T}_1 \ln \frac{p_{01}}{p}$$

$$2) \quad p_{02} = p e^{\frac{\phi_2}{RT_2}} = p e^{\frac{\phi_1 + \Delta \phi}{R(\bar{T}_1 + \Delta T)}} \quad / \ln \rightarrow \ln \frac{p_{02}}{p} = \frac{\phi_1 + \Delta \phi}{R(\bar{T}_1 + \Delta T)}$$

$$R(\bar{T}_1 + \Delta T) = \frac{\phi_1 + \Delta \phi}{\ln \frac{p_{02}}{p}} = \frac{\phi_1 + \Delta \phi}{\ln \left(\frac{p_{01} + \Delta p}{p} \right)} \quad /: R$$

$$\bar{T}_1 + \Delta T = \frac{1}{R} \frac{\phi_1 + \Delta\phi}{\ln\left(\frac{p_{01} + \Delta p}{p}\right)} \leftarrow p_{02} = p_{01} + \Delta p$$

$$\Delta T = \frac{1}{R} \frac{\phi_1 + \Delta\phi}{\ln\left(\frac{p_{01} + \Delta p}{p}\right)} - \bar{T}_1 = \frac{1}{R} \frac{R\bar{T}_1 \ln \frac{p_{01}}{p} + \Delta\phi}{\ln\left(\frac{p_{01} + \Delta p}{p}\right)} - \bar{T}_1$$

$$\Delta T = 0.6 \text{ K}$$

3. Meteorološka postaja A nalazi se na nadmorskoj visini 250 m te je na postaji izmjeren tlak 982 hPa i temperatura 12 °C. Na postaji B istovremeno je izmjeren tlak 975 hPa i temperatura 10 °C. Kolika je nadmorska visina postaje B?

Rješenje:

$$\begin{array}{ll} z_A = 250 \text{ m} & z_B = ? \\ p_A = 982 \text{ hPa} & p_B = 975 \text{ hPa} \\ T_A = 285.15 \text{ K} & T_B = 283.15 \text{ K} \end{array}$$

$$\text{Srednja temperatura sloja: } \bar{T} = \frac{T_A + T_B}{2} = 284.15 \text{ K}$$

Uvažavajući hidrostatičku ravnotežu ($\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$) te jednadžbu stanja idealnog plina ($p = \rho RT$) dobivamo izraz:

$$\frac{1}{p} \partial p = -\frac{g}{RT} \partial z$$

Integracija od A do B uz korištenje srednje temperature sloja $\bar{T}$ daje:

$$\ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) = -\frac{g}{R\bar{T}}(z_B - z_A)$$

$$\ln\left(\frac{p_A}{p_B}\right) = \frac{g}{R\bar{T}}(z_B - z_A)$$

$$\Delta z = z_B - z_A = \frac{R\bar{T}}{g} \ln\left(\frac{p_A}{p_B}\right)$$

$$\text{Konstante: } R = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}; g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$z_B = \frac{R\bar{T}}{g} \ln\left(\frac{p_A}{p_B}\right) + z_A = 309.47 \text{ m}$$

4. Dva susjedna stupca zraka pri tlu imaju iste tlakove $p_{01} = p_{02} = 1000 \text{ hPa}$, ali imaju različite temperature. Kolika je razlika tlakova u stupcima na visini od 1 km ako u prvom stupcu temperatura opada prema zakonu $T_1 = T_{01} - \gamma_1 z$, a u drugom $T_2 = T_{02} - \gamma_2 z$, gdje je $T_{01} = 270 \text{ K}$, $\gamma_1 = 0.5 \text{ °C/100 m}$, $T_{02} = 280 \text{ K}$, $\gamma_2 = 0.1 \text{ °C/100 m}$?

Rješenje:

$$p_{01} = p_{02} = 1000 \text{ hPa}$$

$$T_{01} = 270 \text{ K}$$

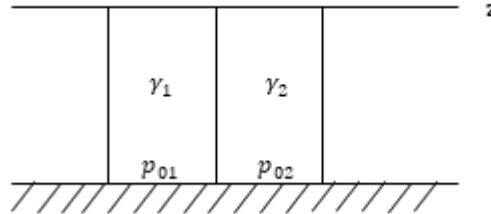
$$T_{02} = 280 \text{ K}$$

$$h = 1 \text{ km}$$

$$\gamma_1 = 0.5 \text{ °C/100 m}$$

$$\gamma_2 = 0.1 \text{ °C/100 m}$$

$$\Delta p(z = 1 \text{ km}) = ?$$



Hidrostaticka ravnoteža: $\partial p = -\rho g \partial z$

Jednadžba stanja idealnog plina: $p = \rho R T$

$$\partial p = -\frac{gp}{RT} \partial z \rightarrow \frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{RT} \partial z$$

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{R(T_0 - \gamma z)} \partial z \quad / \quad \int_{p_0, z=0}^{p(z), h}$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{g}{R} \int_{z=0}^h \frac{\partial z}{T_0 - \gamma z} = \left\{ \begin{array}{l} T_0 - \gamma z = x, \quad z = 0 \rightarrow x = T_0 \\ -\gamma z = \partial x, \quad z = h \rightarrow x = T_0 - \gamma h \end{array} \right\}$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{g}{R} \int_{T_0}^{T_0 - \gamma h} \left(-\frac{1}{\gamma} \right) \cdot \frac{\partial x}{x} = \frac{g}{R\gamma} \ln \frac{T_0 - \gamma h}{T_0}$$

$$p(z) = p_0 \cdot \left(\frac{T_0 - \gamma h}{T_0} \right)^{g/R\gamma}$$

$$\Delta p = p_2(z) - p_1(z) = p_{02} \cdot \left(\frac{T_{02} - \gamma_2 h}{T_{02}} \right)^{\frac{g}{R\gamma_2}} - p_{01} \cdot \left(\frac{T_{01} - \gamma_1 h}{T_{01}} \right)^{\frac{g}{R\gamma_1}}$$

$$\Delta p = 4.8 \text{ hPa}$$

5. Kako bi se mijenjao tlak s visinom kada bi temperatura bila eksponencijalna funkcija tlaka (tj. visine) oblika $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^n$, gdje su T_0 i p_0 temperatura i tlak na nekom referentnom nivou, te $n = \text{const.}$

Rješenje:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^n, n = \text{const.}$$

$$p(z) = ?$$

Hidrostaticka ravnoteža: $\partial p = -\rho g \partial z$

Jednadžba stanja idealnog plina: $p = \rho R T$

$$\partial p = -\frac{gp}{RT} \partial z \rightarrow \partial p = -\frac{gp}{RT_0} \left(\frac{p_0}{p} \right)^n \partial z$$

$$\partial p = -\frac{g}{RT_0} p^{1-n} p_0^n \partial z$$

$$p^{n-1} \partial p = -\frac{gp_0^n}{RT_0} \partial z \quad / \quad \int_{p_0, z=0}^{p(z), z}$$

$$\int_{p_0}^{p(z)} p^{n-1} dp = -\frac{gp_0^n}{RT_0} \int_0^z dz$$

$$\frac{1}{n} (p(z)^n - p_0^n) = -\frac{gp_0^n}{RT_0} z$$

$$p(z)^n = p_0^n - \frac{ngp_0^n}{RT_0} z = p_0^n \left(1 - \frac{ngz}{RT_0}\right)$$

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{ngz}{RT_0}\right)^{1/n}$$

6. Nađite apsolutni geopotencijal 700 hPa plohe ako je srednja temperatura atmosfere 20 °C, a tlak na srednjoj razini mora 1015 hPa. Izrazite rezultat preko geopotencijalne visine.

Rješenje:

$$p = 700 \text{ hPa}$$

$$\bar{T} = 293.15 \text{ K}$$

$$p_0 = 1015 \text{ hPa}$$

$$\phi(700 \text{ hPa}) = ?$$

Hidrostaticka ravnoteža i jednačba stanja idealnog plina: $\partial p = -\rho g \partial z = -\frac{gp}{RT} \partial z$

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{R\bar{T}} \partial z \quad / \quad \int_{p_0, z=0}^{p(z), z}$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{g}{R\bar{T}} z = -\frac{\phi}{R\bar{T}}$$

$$\phi = -R\bar{T} \ln \frac{p(z)}{p_0}$$

Apsolutni geopotencijal [J kg^{-1}]

$$\phi = 31261 \text{ J kg}^{-1}$$

Geopotencijalna visina [gpm]

$$Z = \frac{\phi}{9.8} = 3190 \text{ gpm}$$

7. Kolika je temperatura na 500 mbar plohi ako je visina relativne topografije $RT_{1000}^{500} = 5160 \text{ gpm}$? Vertikalni temperaturni gradijent je konstantan u cijelom sloju i iznosi 0.65 °C/100 m.

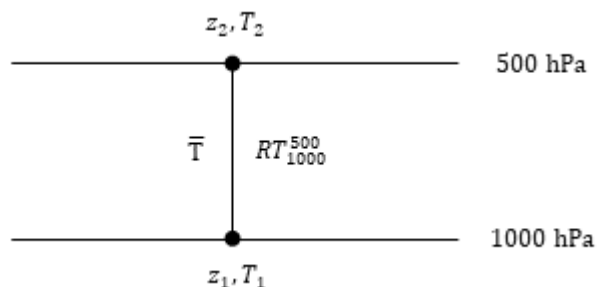
Rješenje:

$$p_2 = 500 \text{ hPa}$$

$$RT_{1000}^{500} = 5160 \text{ gpm}$$

$$\gamma = 0.65 \text{ °C/100 m}$$

$$T_2 = ?$$



$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = RT_{1000}^{500} = 5160 \text{ gpm} = 50568 \text{ J kg}^{-1}$$

$$\Delta\phi = g\Delta z \rightarrow \Delta z = \frac{\Delta\phi}{g} = \frac{50568 \text{ J kg}^{-1}}{9.81 \text{ m s}^{-2}} = 5154.74 \text{ m} = 5.16 \text{ km}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\gamma \rightarrow T(z) = T_0 - \gamma z$$

$$\partial p = -\rho g \partial z = -\frac{gp}{RT} \partial z$$

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{RT} \partial z \quad / \quad \int_{p_1, z_1}^{p_2, z_2}$$

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R\bar{T}} (z_2 - z_1) = -\frac{g\Delta z}{R\bar{T}} = -\frac{\Delta\phi}{R\bar{T}}$$

$$\bar{T} = -\frac{\Delta\phi}{R \ln \frac{p_2}{p_1}} = 254.2 \text{ K}$$

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2} \rightarrow 2\bar{T} = T_1 + T_2 = T_1 + T_1 - \gamma z = 2T_1 - \gamma z$$

$$\bar{T} = T_1 - \frac{\gamma z}{2} \rightarrow T_1 = \bar{T} + \frac{\gamma z}{2}$$

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2} \rightarrow T_2 = 2\bar{T} - T_1 = 2\bar{T} - \bar{T} - \frac{\gamma z}{2}$$

$$T_2 = \bar{T} - \frac{\gamma z}{2}$$

$$T_2 = T_{500 \text{ hPa}} = 237.45 \text{ K}$$

8. Kako se mijenja tlak u smjeru osi x na visini od 5.5 km ako se tlak pri tlu ne mijenja u smjeru osi x? Srednja temperatura sloja od tla do točke A u kojoj je tlak 500 hPa je 273 K, a promjena srednje temperature duž osi x iznosi 1 K/100 km.

Rješenje:

$$z = 5.5 \text{ km}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0$$

$$p(z) = 500 \text{ hPa}$$

$$\bar{T} = 273 \text{ K}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{1 \text{ K}}{100 \text{ km}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = ?$$

Hidrostatička ravnoteža i jednadžba stanja idealnog plina: $\partial p = -\rho g \partial z = -\frac{gp}{RT} \partial z$

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{g}{RT} \partial z \quad / \quad \int_{p_0, z=0}^{p(z), z}$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = -\frac{g}{R\bar{T}} z \quad / \quad \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \ln p(z) - \ln p_0$$

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} = -\frac{gz}{R} \left(-\frac{1}{\bar{T}^2} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{gzp}{R\bar{T}^2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1.26 \text{ hPa}}{100 \text{ km}}$$

9. Pokažite kakav treba biti vertikalni temperaturni gradijent γ u mirnoj i suhoj atmosferi kako bi atmosfera bila homogena.

Rješenje:

Uvjet za homogenu atmosferu: $\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$

$$p = \rho RT / \ln$$

$$\ln p = \ln \rho + \ln R + \ln T / \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad p = \rho RT$$

$$-\frac{\rho g}{\rho RT} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\rho g}{RT} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\rho}{T} \left(\frac{g}{R} + \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

$$0 = -\frac{\rho}{T} \left(\frac{g}{R} + \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{g}{R} = -0.03418 \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}} = -3.42 \frac{^\circ\text{C}}{100 \text{ m}}$$

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{3.42 \text{ } ^\circ\text{C}}{100 \text{ m}}$$

5 Termodinamika suhog zraka

Termodinamika se bavi proučavanjem promjena termodinamičkih varijabli (temperature, tlaka, gustoće itd.) kod plinova i čvrstih tijela koja su u stanju mirovanja. Pri analiziranju termodinamičkih sustava (za atmosferu se radi o plinu) pretpostavljamo da se taj sustav nalazi unutar cilindra te se volumen sustava mijenja pomicanjem položaja klipa. U tom slučaju, vrijednosti termodinamičkih varijabli mogu se mijenjati iz dva razloga: zbog razmjene topline s okolinom (plin prima ili gubi toplinu) ili promjene volumena plina (kompresija ili ekspanzija plina).

Prvi stavak termodinamike

Toplina Q je energija koja je prenesena na tijelo pri zagrijavanju tog tijela. Malu količinu topline koju prima tijelo mase m označavamo s δQ , gdje je δ oznaka za geometrijski diferencijal. Tijelo primljenu toplinu može utrošiti na povećanje unutarnje energije i na obavljanje rada. Stoga, prvi stavak termodinamike glasi:

$$\delta Q = dU + dW, \quad (5.1)$$

gdje je U unutarnja energija termodinamičkog sustava, a W rad.

U slučaju idealnog plina, unutarnja energija jednaka je kinetičkoj energiji plina te ovisi samo o njegovoj temperaturi:

$$dU = mc_v(T)dT, \quad (5.2)$$

gdje je m masa plina, $c_v(T)$ specifični toplinski kapacitet idealnog plina pri konstantnom volumenu.

Za raspon temperatura u atmosferi, specifični toplinski kapacitet idealnog plina je približno konstantan, pa pretpostavljamo da je $c_v = \text{const}$. Isto vrijedi i za specifični toplinski kapacitet pri konstantom tlaku c_p .

Entropija i drugi stavak termodinamike

Entropija S [J K⁻¹] je omjer male količine dodane topline i temperature pri kojoj se dodaje toplina. Za idealne, reverzibilne procese, promjena entropije izražava se drugim stavkom termodinamike:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (5.3)$$

gdje je dS promjena entropije, δQ mala količina topline koja se dodaje termodinamičkom sustavu, a T temperatura pri kojoj sustav prima toplinu.

Treći stavak termodinamike

$$\lim_{T \rightarrow 0} C(T) = 0, \quad (5.4)$$

gdje je $C(T)$ toplinski kapacitet koji mora iščezavati pri temperaturi koja je jednaka apsolutnoj nuli.

Entalpija

Entalpija H [J] je termodinamička varijabla definirana kao zbroj unutarnje energije te umnoška tlaka i volumena:

$$H = U + pV. \quad (5.5)$$

Specifična entalpija h je entalpija po jedinici mase termodinamičkog sustava:

$$h = u + p\alpha \quad (5.6)$$

gdje je $h = H/m$ specifična entalpija, $\alpha = V/m$ specifični volumen, p tlak, a m masa termodinamičkog sustava.

Helmholtzova i Gibbsova slobodna energija

Gibbsova slobodna energija G [J] je funkcija stanja termodinamičkog sustava:

$$G = H - TS = U - TS + pV \quad (5.7)$$

gdje je H entalpija, T temperatura, S entropija.

Helmholtzova slobodna energija F [J] je termodinamička varijabla definirana kao:

$$F = U - TS \quad (5.8)$$

gdje je U unutarnja energija termodinamičkog sustava, T temperatura, a S entropija.

5.1 Termodinamički procesi

Termodinamičke varijable mijenjaju se tijekom termodinamičkih procesa. Razlikujemo reverzibilni i ireverzibilne termodinamičke procese. Reverzibilni procesi su ravnotežni procesi na kraju kojih se sustav i okolina mogu dovesti u početno stanje bez ikakvih promjena. Kako bi proces bio reverzibilan mora se događati dovoljno sporo kako bi sustav imao dovoljno vremena postići ravnotežno stanje. Stoga su reverzibilni procesi kvazistatički procesi. Nakon ireverzibilnog procesa termodinamički se sustav ne može bez promjene vratiti u početno stanje.

Pod ravnotežne termodinamičke procese pripadaju izotermni, izosterni, izobarni i adijabatski procesi.

Izotermni procesi

Izotermni procesi događaju se pri konstantnoj temperaturi, $T = \text{const.}$ Jednadžba stanja za izotermni proces:

$$p\alpha = \text{const.} \quad (5.9)$$

Izosterni procesi

Izosterni procesi događaju se pri konstantnom specifičnom volumenu, $\alpha = \text{const.}$ Jednadžba stanja za izosterni proces:

$$pT^{-1} = \text{const.} \quad (5.10)$$

Izobarni procesi

Izobarni procesi događaju se pri konstantnom tlaku, $p = \text{const.}$ Jednadžba stanja za izobarni proces:

$$\alpha T^{-1} = \text{const.} \quad (5.11)$$

Adijabatski procesi

Tijekom adijabatskih procesa termodinamički sustav ne razmjenjuje energiju (toplino) s okolinom. Za adijabatske procese prvi stavak termodinamike ima oblik:

$$dU + dW = 0. \quad (5.12)$$

Adijabatski procesi su ujedno i izentropni ($dS = 0$). Temperatura česti se u adijabatskom procesu mijenja samo zbog kompresije ili ekspanzije, a ne zbog razmjene topline s okolinom.

Uvrstimo li u jednadžbu (5.12) izraz za specifičnu unutarnju energiju idealnog plina i specifični rad, uz pretpostavku da je $c_v(T) = \text{const.} = c_v$:

$$c_v dT + p d\alpha = 0 \quad (5.13)$$

Primjenom jednadžbe stanja idealnog plina $p\alpha = RT$ i dijeljenjem jednadžbe (5.13) s temperaturom, dobivamo:

$$(c_v + R) \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}, \quad (5.14)$$

što uz Mayerovu relaciju $c_p = c_v + R$, postaje:

$$c_p \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}. \quad (5.15)$$

Integriramo li prethodnu jednadžbu (5.15) od početnog tlaka p_0 i temperature $T_0 = \theta$ do krajnje temperature T i tlaka p , te sredimo izraz, dobiva se Poissonova jednadžba:

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}, \quad (5.16)$$

gdje je θ potencijalna temperatura, koja je sačuvana u adijabatskom procesu ($\theta = \text{const.}$).

Iz Poissonove jednadžbe (5.16) i uvjeta da je potencijalna temperatura sačuvana u adijabatskom procesu, slijedi jednadžba adijabatskog procesa:

$$Tp^{-R/c_p} = \text{const.} \quad (5.17)$$

Uvedemo li veličinu $\kappa = c_p/c_v$ koja je za idealne dvoatomne plinove jednaka $\kappa = 7/5 = 1.4$ (što pretpostavljamo i za zrak), jednadžbu adijabatskog procesa možemo pisati u obliku:

$$T^\kappa p^{1-\kappa} = \text{const.} \quad (5.18)$$

Uzmemo li u obzir jednadžbu stanja idealnog plina iz koje slijedi $T = p\alpha/R$, dobivamo još jedan oblik jednadžbe adijabatskog procesa:

$$p\alpha^\kappa = \text{const.} \quad (5.19)$$

Politropni procesi

Politropni procesi nalaze se između izotermnih i adijabatskih procesa na (p, V) , tj. (p, α) dijagramu. Definicija politropnog procesa:

$$\delta q = c dT, \quad (5.20)$$

gdje je c općeniti specifični toplinski kapacitet.

Općeniti specifični toplinski kapacitet c je toplina koju je potrebno dodati termodinamičkom sustavu jedinične mase kako bi mu se temperatura povisila za 1 K, pri čemu se mogu mijenjati i tlak i volumen.

Koeficijent politropije v :

$$v = \frac{c_p - c}{c_v - c}. \quad (5.21)$$

Iz prvog stavka termodinamike slijede Emdenove jednadžbe politropa:

$$T \alpha^{v-1} = \text{const.}, \quad (5.22)$$

$$T^v p^{1-v} = \text{const.}, \quad (5.23)$$

$$p \alpha^v = \text{const.} \quad (5.24)$$

5.2 Termodinamika suhog zraka

Prvi stavak termodinamike za suhi zrak

$$\delta q = c_{vd}dT + p d\alpha, \quad (5.25)$$

gdje je δq dodana toplina po jedinici mase, $c_{vd} = 718 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ specifični toplinski kapacitet suhog zraka pri konstantnom volumenu.

Jednadžba stanja idealnog plina za suhi zrak

$$p\alpha = R_d T, \quad (5.26)$$

gdje je $R_d = 287 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ specifična plinska konstanta suhog zraka.

Diferenciramo li jednadžbu (5.25), dobivamo:

$$p d\alpha + \alpha dp = R_d dT, \quad (5.27)$$

iz čega slijedi da je član $p d\alpha$ jednak

$$p d\alpha = R_d dT - \alpha dp = R_d T - \frac{R_d T}{p} dp. \quad (5.28)$$

Uvrstimo li izraz (5.27) u prvi stavak termodinamike za suhi zrak, dobivamo njegov drugi oblik:

$$\delta q = c_{pd} dT - \alpha dp = c_{pd} T - \frac{R_d T}{p} dp. \quad (5.29)$$

jer je prema Mayerovoj relaciji $c_{pd} = c_{vd} + R$, $c_{pd} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ specifični toplinski kapacitet suhog zraka pri konstantnom tlaku.

5.3 Zadatci

1. Pri temperaturi od 10°C i tlaku od 980 hPa uzorku suhoga zraka mase 10 g dodamo 20 J topline, Koliko će se pritom promijeniti temperatura uzorka ako se tlak smanji za 70 hPa ?

Rješenje:

$$t = 10^\circ \text{C} \rightarrow T = 283.15 \text{ K}$$

$$p = 980 \text{ hPa}$$

$$m = 10 \text{ g}$$

$$\Delta Q = 20 \text{ J}$$

$$\Delta p = 70 \text{ hPa}, p_2 = p_1 - \Delta p \rightarrow p_2 - p_1 = -\Delta p$$

$$\Delta T = ?$$

Prvi stavak termodinamike: $\delta Q = m(c_{pd} dT - \alpha dp) \rightarrow \Delta Q = m(c_{pd} \Delta T - \alpha \Delta p)$

$$m c_{pd} \Delta T = \Delta Q + m \alpha \Delta p = \Delta Q + m \alpha (p_2 - p_1)$$

$$\Delta T = \frac{1}{m c_{pd}} \left[\Delta Q + m \frac{RT}{p} (-\Delta p) \right]$$

$$\Delta T = -3.79 \text{ K}$$

2. Uzorak suhog zraka mase 1 kg u početku se nalazi pri temperaturi 0°C i tlaku od 1000 hPa . Koliko je topline potrebno dodati uzorku kako bi mu se tlak smanjio za 50 hPa , a temperatura porasla za 16.9°C ?

Rješenje:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$t = 0^\circ \text{C} \rightarrow T = 273.15 \text{ K}$$

$$p = 1000 \text{ hPa}$$

$$\Delta p = 50 \text{ hPa}, p_2 = p_1 - \Delta p$$

$$\Delta T = 16.9^\circ \text{C} = 16.9 \text{ K}, T_2 = T_1 + \Delta T$$

$$\Delta Q = ?$$

Prvi stavak termodinamike: $\delta Q = m(c_{pd} dT - \alpha dp) \rightarrow \delta q = c_{pd} dT - \alpha dp$

$$\Delta q = c_{pd} \Delta T - \alpha \Delta p = c_{pd} \Delta T - \frac{RT}{p} \Delta p$$

$$\Delta q = c_{pd}(T_2 - T_1) - \frac{RT}{p}(p_2 - p_1)$$

$$\Delta q = c_{pd}\Delta T - \frac{RT}{p}(-\Delta p) = c_{pd}\Delta T + \frac{RT}{p}\Delta p$$

$$\Delta q = 20.9 \text{ kJ kg}^{-1}$$

3. Uzorak suhog zraka mase 2 kg dobije 1.5 kJ topline pri konstantnom volumenu, a zatim izgubi 1 kJ topline pri konstantnom tlaku. Koliko iznosi promjena temperature uzorka?

Rješenje:

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$\text{I)} \quad \alpha = \text{const.} \rightarrow \Delta Q_1 = 1.5 \text{ kJ}$$

$$\text{II)} \quad p = \text{const.} \rightarrow \Delta Q_2 = -1 \text{ kJ}$$

$$\Delta T = ?$$

$$\text{Prvi stavak termodinamike: } dQ = m(c_{pd}dT - \alpha dp) = m(c_{vd}dT + p d\alpha)$$

$$\Delta Q_1 = m(c_{vd}\Delta T_1 + p\Delta\alpha) = mc_{vd}\Delta T_1 \rightarrow \Delta T_1 = \frac{\Delta Q_1}{mc_{vd}}$$

$$\Delta Q_2 = m(c_{pd}\Delta T_2 - \alpha\Delta p) = mc_{pd}\Delta T_2 \rightarrow \Delta T_2 = \frac{\Delta Q_2}{mc_{pd}}$$

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{\Delta Q_1}{mc_{vd}} + \frac{\Delta Q_2}{mc_{pd}}$$

$$\Delta T = 0.55 \text{ K} = 0.55 \text{ }^\circ\text{C}$$

4. Koliko je topline potrebno da se temperatura suhog zraka pri konstantnom tlaku povisi za 5 °C?

Rješenje:

$$p = \text{const.}$$

$$\Delta T = 5 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\Delta Q = ?$$

$$\text{Prvi stavak termodinamike: } dQ = m(c_{pd}dT - \alpha dp), \quad dp = 0$$

$$\frac{dQ}{m} = dq = c_{pd}dT$$

$$\Delta q = c_{pd}\Delta T = 1005 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 5 \text{ K} = 5025 \text{ J kg}^{-1}$$

5. Koliki rad učini 1 kg idealnog plina izotermnom promjenom stanja i koliko pritom iznosi razmjena topline s okolinom?

Rješenje:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$T = \text{const.}$$

$$W = ?$$

$$\Delta Q = ?$$

$$dQ = dU + dW = mc_{vd}dT + mp d\alpha, \quad dT = 0$$

$$\begin{aligned} \delta Q &= dW, & dW &= mp d\alpha / \int \\ W_2 - W_1 &= m \int_1^2 p d\alpha = m \int_1^2 \frac{RT}{\alpha} d\alpha = mRT \int_1^2 \frac{d\alpha}{\alpha}, & W_1 &= 0 \\ W &= mRT \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ m &= 1 \text{ kg} \rightarrow w = RT \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \rightarrow w = \delta q \end{aligned}$$

6. Uzorak suhog zraka mase 1 kg ima temperaturu 283 K i tlak 1000 hPa. Zbog razmjene topline s okolinom i zbog rada temperatura mu se smanji za 10 K, a tlak padne za 100 hPa. Kolika je promjena potencijalne temperature tog uzorka?

Rješenje:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$T_1 = 283 \text{ K}$$

$$p_1 = 1000 \text{ hPa}$$

$$\Delta T = -10 \text{ K}$$

$$\Delta p = -100 \text{ hPa}$$

$$\Delta \theta = ?$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= T_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{R/c_p} \rightarrow \theta_1 = T_1 \left(\frac{1000 \text{ hPa}}{1000 \text{ hPa}} \right)^{R/c_p} \rightarrow \theta_1 = T_1 = 283 \text{ K} \\ p_2 &= p_1 - \delta p \rightarrow \Delta p = -\delta p \\ T_2 &= T_1 - \delta T \rightarrow \Delta T = -\delta T \\ \theta &= T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} / \ln \\ \ln \theta &= \ln T + \frac{R}{c_p} \ln p_0 - \frac{R}{c_p} \ln p / \partial \\ \frac{1}{\theta} \partial \theta &= \frac{1}{T} \partial T - \frac{R}{c_p p} \partial p / \int_1^2 \rightarrow \partial \rightarrow \Delta \\ \frac{\Delta \theta}{\theta} &= \frac{\Delta T}{T} - \frac{R \Delta p}{c_p p} \rightarrow \Delta \theta = \theta_1 \left(\frac{\Delta T}{T_1} - \frac{R \Delta p}{c_p p_1} \right) = T_1 \left(\frac{\Delta T}{T_1} - \frac{R \Delta p}{c_p p_1} \right) = \Delta T - \frac{RT_1 \Delta p}{c_p p_1} \\ \Delta \theta &= -\delta T - \frac{RT_1}{c_p p_1} (-\delta p) \\ \Delta \theta &= -1.92 \text{ K} \end{aligned}$$

7. Pokažite da je $pV^{c_p/c_v} = \text{const.}$ za idealni plin koj je podvrgnut adijabatskom procesu.

Rješenje:

$$\text{Adijabatski proces: } \delta q = c_p dT - \alpha dp = 0, \delta q = c_v dT + p d\alpha = 0$$

$$c_p dT - \frac{RT}{p} dp = 0 \text{ \& } dT = -\frac{p d\alpha}{c_v}$$

$$c_p \left(-\frac{p d\alpha}{c_v} \right) - \alpha dp = 0$$

$$-\frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dp}{p} \rightarrow -\frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{d(V/m)}{V/m} = \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{c_p}{c_v} \frac{dV}{V} \quad / \int_1^2$$

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{c_p}{c_v} \ln \frac{V_2}{V_1} \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{-\frac{c_p}{c_v}}$$

$$p_2 V_2^{\frac{c_p}{c_v}} = p_1 V_1^{\frac{c_p}{c_v}} \rightarrow p V^{\frac{c_p}{c_v}} = \text{const.}$$

8. Čest zraka volumena V dobije 50 J topline. Koliko će se promijeniti entalpija česti ako se tlak ne mijenja?

Rješenje:

$$\Delta Q = 50 \text{ J}$$

$$p = \text{const.}$$

$$dH = ?$$

$$\text{Entalpija: } H = U + pV \quad / : m \rightarrow h = u + p\alpha \quad / d$$

$$dh = du + p d\alpha + \alpha dp = \delta q + \alpha dp, \quad dp = 0$$

$$dh = \delta q \quad / \cdot m \rightarrow dH = \delta Q = 50 \text{ J}$$

9. Temperatura suhe česti zraka na nivou $p = 1000 \text{ hPa}$ je -3°C . Kolika je temperatura česti pri tlaku 700 hPa ako se čest na taj nivo podigne politropnim procesom? Politropni toplinski koeficijent iznosi $c = 400 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Rješenje:

$$p_1 = 1000 \text{ hPa}$$

$$T_1 = -3^\circ\text{C} = 270.15 \text{ K}$$

$$p_2 = 700 \text{ hPa}$$

$$c = 400 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$t_2 = ?$$

$$\text{Politropni proces: } \delta q = c dT$$

$$\text{Prvi stavak termodinamike: } \delta q = c_p dT - \alpha dp$$

$$c dT = c_p dT - \alpha dp$$

$$(c - c_p) dT = -\alpha dp$$

$$(c - c_p) dT = -\frac{RT}{p} dp$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{(c - c_p)} \frac{dp}{p} \quad / \int_1^2$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = -\frac{R}{(c - c_p)} \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{R}{(c_p - c)} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_p - c}}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{R}{c_p - c}} = 228.1 \text{ K}$$

10. Nađite poveznicu između potencijalne temperature suhog zraka i diferencijala specifične entropije.

Rješenje:

Specifična entropija: $ds = \frac{dq}{T}$

Prvi stavak termodinamike: $\delta q = c_p dT - \alpha dp$ /: T

$$\frac{\delta q}{T} = ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{\alpha}{T} dp = c_p \frac{dT}{T} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{T}$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} / \ln$$

$$\ln \theta = \ln T + \frac{R}{c_p} \ln p_0 - \frac{R}{c_p} \ln p \quad / \quad d$$

$$\frac{d\theta}{\theta} = \frac{dT}{T} - \frac{R}{c_p p} dp \quad / \cdot c_p$$

$$c_p \frac{d\theta}{\theta} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

$$ds = c_p \frac{d\theta}{\theta} = c_p d(\ln \theta)$$

11. Koliki rad izvrši 1 kg suhog zraka ako se adijabatski proširi na 2 puta veći volumen?
Početna temperatura iznosi 0 °C.

Rješenje:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\theta = \text{const.}$$

$$V_2 = 2V_1$$

$$t = 0 \text{ °C} \rightarrow T = 273.15 \text{ K}$$

$$W = ?$$

Adijabatski proces:

$$\delta q = c_v dT + p d\alpha = 0 \rightarrow p d\alpha = -c_v dT$$

$$c_v dT = -p d\alpha = -\frac{RT}{\alpha} d\alpha \quad / : T$$

$$c_v \frac{dT}{T} = -R \frac{d\alpha}{\alpha} \quad / \int_1^2$$

$$c_v \ln \frac{T_2}{T_1} = -R \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad / : c_v$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = -\frac{R}{c_v} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{-\frac{R}{c_v}} = T_1 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{R}{c_v}}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{V_1 m_2}{V_2 m_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{R}{c_v}}$$

$$dW = m p d\alpha = -m c_v dT \quad / \int_1^2$$

$$W_2 - W_1 = -mc_v(T_2 - T_1) = mc_v(T_1 - T_2), \quad W_1 = 0$$

$$W_2 = W = mc_v T_1 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{R}{c_v}} \right) = 47460.5 \text{ J}$$

12. Čest zraka jedinične mase kvazistatički se diže, te prima od okolnog zraka 2090 J kg⁻¹ svakih 100 m. Koliki je politropni eksponent ν ?

Rješenje:

$$\frac{\dot{d}q}{dz} = \frac{2090 \text{ J kg}^{-1}}{100 \text{ m}}$$

$\nu = ?$

Politropni eksponent: $\nu = \frac{c_p - c}{c_v - c}$

Politropni proces: $\dot{d}q = c dT$

Prvi stavak termodinamike: $\dot{d}q = c_p dT - \alpha dp$

$$cdT = c_p dT - \alpha dp$$

$$(c_p - c)dT = \alpha dp$$

$$(c_p - c)dT = \frac{RT}{p} dp \quad /: T$$

$$(c_p - c) \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}$$

$$c_p - c = \frac{RT}{p} \frac{dp}{dT} = \frac{RT}{p} \frac{dp}{dz} \frac{dz}{dT}$$

Hidrostatska ravnoteža: $c_p - c = \frac{RT}{p} \cdot (-\rho g) \frac{dz}{dT} = -\alpha \rho g \frac{dz}{dT} = -g \frac{dz}{dT}$

$$c_p - c = -\frac{g}{\frac{dT}{dz}}$$

$$c = c_p + \frac{g}{\frac{dT}{dz}}$$

$$\dot{d}q = c_p dT - \alpha dp \quad /: dz$$

$$\frac{\dot{d}q}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \alpha \frac{dp}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \alpha(-\rho g) = c_p \frac{dT}{dz} + g$$

$$\frac{\dot{d}q}{dz} - g = c_p \frac{dT}{dz} \quad /: c_p$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{c_p} \left(\frac{\dot{d}q}{dz} - g \right)$$

$$c = c_p + \frac{g}{\frac{dT}{dz}} = c_p + \frac{g}{\frac{1}{c_p} \left(\frac{\dot{d}q}{dz} - g \right)}$$

$$c = c_p \left(1 + \frac{g}{\left(\frac{\dot{d}q}{dz} - g \right)} \right)$$

$$c = 1894 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$v = \frac{c_p - c}{c_v - c} = 0.76$$

6 Stabilnost atmosfere

6.1 Statička stabilnost atmosfere

Statičku stabilnost atmosfere zovemo još i konvekcijska stabilnost.

Ako je čest zraka vlažna, ali nezasićena, tada se čest ponaša kao da je potpuno suha. Suha ili nezasićena čest je podvrgnuta suhoadijabatskom procesu. Pri dizanju čest se hladi zbog adijabatske ekspanzije (čest dolazi na manji tlak). Pri spuštanju čest se grije zbog adijabatske kompresije (čest dolazi na veći tlak).

Suhoadijabatička stopa ohlađivanja

Promjena temperature česti pri vertikalnom gibanju proporcionalna je suhoadijabatičkoj stopi ohlađivanja:

$$\delta = \delta_d = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_{pd}}, \quad (6.1)$$

gdje je $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ akceleracija sile teže, a $c_{pd} = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ specifična toplina suhog zraka pri konstantnom tlaku.

Mokroadijabatička stopa ohlađivanja

Ako je čest zasićena i giba se duž vertikale, tada je promjena temperature česti proporcionalna mokroadijabatičkoj stopi ohlađivanja:

$$\delta_s = \frac{\delta}{1 + \frac{L_{lv}}{\bar{c}_{pm}} \frac{dr_s}{dT}} < \delta, \quad (6.2)$$

gdje je δ suhoadijabatička stopa ohlađivanja, $L_{lv} = 2500 \text{ J kg}^{-1}$ latentna toplina isparavanja, r_s maksimalni omjer miješanja vodene pare, a $\bar{c}_{pm}$ srednja specifična toplina vlažne česti pri konstantnom tlaku.

Specifična toplina vlažne česti pri konstantnom tlaku ovisi o omjeru miješanja r :

$$\bar{c}_{pm} \approx c_{pd}(1 + 0.8 r). \quad (6.3)$$

Vertikalni temperaturni gradijent

Krivulja koja prikazuje promjenu temperature okoliša s visinom naziva se krivulja stanja ili vertikalni profil temperature, a zadan je vertikalnim temperaturnim gradijentom:

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z} \quad (6.4)$$

Potencijalna ekvivalentna temperatura za adijabatski proces

$$\theta_{e,a} = \theta_d \exp\left(\frac{r_s L_{lv}}{c_{pd} T}\right) \quad (6.5)$$

gdje je θ_d potencijalna temperatura suhog zraka zadana Poissonovom jednađbom $\theta_d = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_{pd}}$.

Konvektivna potencijalna nestabilnost javlja se ako je na nekoj visini u sloju vrijedi:

$$\frac{\partial \theta_{e,a}}{\partial z} < 0. \quad (6.6)$$

Ekvivalentna temperatura za adijabatski proces

$$T_{e,a} = T \exp\left(\frac{r_s L_{lv}}{c_{pd} T}\right). \quad (6.7)$$

Veza između ekvivalentne temperature za adijabatski proces i potencijalne ekvivalentne temperature za adijabatski proces:

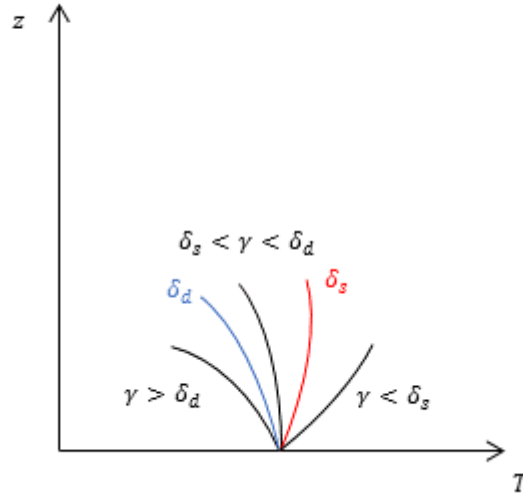
$$\theta_{e,a} = \theta_d \exp\left(\frac{r_s L_{lv}}{c_{pd} T}\right) = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_{pd}} \exp\left(\frac{r_s L_{lv}}{c_{pd} T}\right), \quad (6.8)$$

$$\theta_{e,a} = T_{e,a} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_{pd}}. \quad (6.9)$$

Iz jednađbi (6.5) i (6.7) slijedi da je $T_{e,a} > T$, te $\theta_{e,a} > \theta_d$.

Na slici 6.1. prikazana je stabilnost zraka u ovisnosti o vertikalnom temperaturnom gradijentu. Sa slike vidimo da vrijedi odnos između mokre i suhe adijabate:

$$\delta_s < \delta_d \quad (6.10)$$



Slika 6.1: Stabilnost zraka u ovisnosti o vertikalnom temperaturnom gradijentu γ . Suha adijabata δ_d označena je plavom bojom, a mokra adijabata δ_s crvenom. U slučaju kada vrijedi $\gamma < \delta_s$ imamo apsolutnu stabilnost, tj. za $\gamma > \delta_d$ imamo apsolutnu nestabilnost. Kada se vertikalni temperaturni gradijent nalazi između suhe i mokre adijabate $\delta_d < \gamma < \delta_s$ imamo uvjetnu nestabilnost zraka.

Stabilnost česti

Stabilnost suhe česti možemo odrediti prema odnosu između vertikalnog temperaturnog gradijenta atmosfere i suhoadijabatičke stope ohlađivanja:

$$\delta_d > \gamma \Rightarrow \text{čest je stabilna}$$

$$\delta_d = 0 \Rightarrow \text{čest je neutralna}$$

$$\delta_d < \gamma \Rightarrow \text{čest je nestabilna}$$

Primjenom prirodnog logaritma i deriviranjem po visini, iz jednadžbe za potencijalnu temperaturu $\theta_d = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_{pd}}$ dobivamo:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{c_{pd}} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (6.11)$$

Uvrstimo li u jednadžbu (6.16) izraz za hidrostatičku ravnotežu $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ i izrazimo li tlak preko jednadžbe stanja idealnog plina $p = \rho RT$ slijedi:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R}{c_{pd}} \frac{1}{\rho RT} (-\rho g), \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{T} \frac{g}{c_{pd}} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_{pd}} \right). \quad (6.13)$$

Pomnožimo li jednadžbu (6.13) s θ i uvrstimo definiciju suhadijabatičke stope ohlađivanja $\delta = \frac{g}{c_{pd}}$ i vertikalnog temperaturnog gradijenta $-\gamma = \frac{\partial T}{\partial z}$, dobivamo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T} (\delta - \gamma) \quad (6.14)$$

Iz jednadžbe (6.14) slijedi:

$$\gamma < \delta \Rightarrow \text{stabilna atmosfera} \Leftarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$$

$$\gamma = \delta \Rightarrow \text{neutralna atmosfera} \Leftarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$\gamma > \delta \Rightarrow \text{nestabilna atmosfera} \Leftarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$$

Uzgonska frekvencija

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (6.15)$$

Ovisno o vrijednosti uzgonske frekvencije možemo odrediti stabilnost atmosfere:

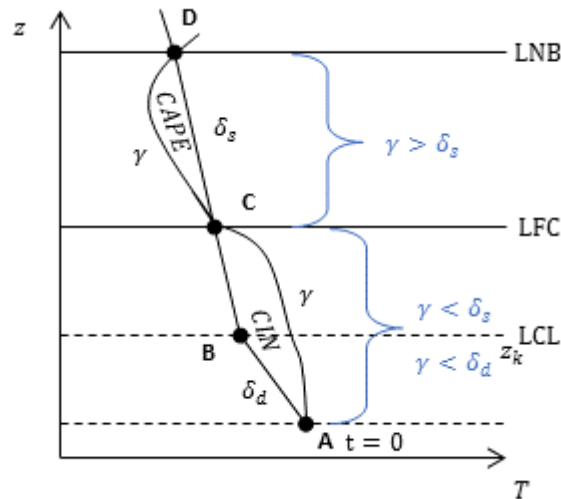
$$N^2 > 0 \text{ stabilna atmosfera}$$

$$N^2 = 0 \text{ neutralna atmosfera}$$

$$N^2 < 0 \text{ nestabilna atmosfera}$$

6.2 Slobodna konvekcija

Čest koja je uvjetno nestabilna $\delta_s < \gamma < \delta_d$ može zbog prisilnog dizanja postati nestabilna. Takva čest posjeduje latentnu nestabilnost. Na slici 6.2 prikazan je proces slobodne konvekcije.



Slika 6.2: Slobodna konvekcija. Vertikalni temperaturni gradijent γ opisuje krivulju stanja atmosfere, δ_d je suha adijabata, a δ_s mokra adijabata. Čest se u početnom trenutku nalazi u točki A. U točki B čest se nalazi na nivou kondenzacije (z_k) ili LCL (*lifting condensation level*). U točki C čest se nalazi na nivou slobodne konvekcije LFC (*level of free convection*). Nakon prelaska tog nivoa čest postaje toplija od okolnog zraka, tj. nestabilna u odnosu na okoliš. Točka D nalazi se na ravnotežnom nivou LNB (*level of neutral bouyancy*) na kojoj više nema uzgona, a temperatura česti se izjednačava s temperaturom okolnog zraka. Iznad visine LNB čest je hladnija od okoliša (tj. stabilna u odnosu na okoliš). Površina između točaka C i D, koja je omeđena mokrom adijabatom δ_s i vertikalnim temperaturnim gradijentom γ odgovara raspoloživoj konvektivnoj potencijalnoj energiji (CAPE). Površina između točaka A i C, koja je omeđena suhom adijabatom δ_d i vertikalnim temperaturnim gradijentom γ odgovara energiji inhibicije konvekcije (CIN).

Na primjer, prilikom prelaska česti preko topografske prepreke čest se hladi suhoadijabatski jer je nezasićena. Hladi se suhoadijabatski sve dok ne dođe do nivoa kondenzacije B, koji se nalazi na visini z_k . Ako se čest nastavi dalje dizati hladi se mokroadijabatski. Na nivou C gustoća česti jednaka je gustoći okoliša, tj. temperatura česti jednaka je temperaturi okoliša, te daljnje podizanje uzrokuje neravnotežu sile gradijenta tlaka i sile teže (narušava se hidrostatička ravnoteža). Čest koja je sada lakša i rjeđa od okoliša nastavi se dizati zbog uzgona. Od točke C konvekcija se nastavlja slobodno (samo zbog labilnosti).

Latentna nestabilnost prešla je u pravu, stvarnu nestabilnost. Za to je potrebno:

- 1) Dovoljno jak mehanički poticaj na dizanje, tako da se nadvlada stabilnost u donjem sloju, odnosno energija inhibicije konvekcije (CIN). Prisilno dizanje mora postojati i nakon postizanja zasićenja.
- 2) Količina vodene pare u česti mora biti dovoljno velika, tako da čest može postati zasićena relativno brzo.

Nivo C je nivo slobodne konvekcije (LFC – level of free convection).

Daljnijim vertikalnim gibanjem u vis, količina vodene pare u česti se smanjuje jer se vodena para kondenzira.

Na nivou D u česti više nema vodene pare, te je temperatura česti jednaka temperaturi okoliša i slobodna konvekcija prestaje.

Na nivou kondenzacije mogu se formirati oblaci, čija je baza na visini z_k , a ako je podizanje dovoljno da dovede čest do nivoa slobodne konvekcije (LFC), oblaci se vertikalno protežu sve do ravnotežnog nivoa (LNB).

Ovaj pristup zove se metoda česti (idealizacija u odnosu na realnu atmosferu jer npr. okolni zrak jednim dijelom uvlači u čest, pa su vertikalna gibanja samo približno adijabatska).

Raspoloživa konvektivna potencijalna energija (CAPE)

Raspoloživa konvektivna potencijalna energija je direktna mjera nestabilnost. CAPE je količina energije koja česti zbog uzgona stoji na raspolaganju za vertikalno uzdizanje.

CAPE ovisi o toplini česti zraka u odnosu na okoliš, stoga se koristi prilikom procjene područja u kojima se može očekivati oluja.

$$CAPE = g \int_{LFC}^{LNB} \frac{\theta_{vp} - \bar{\theta}_{ve}}{\bar{\theta}_{ve}} dz \quad (6.16)$$

gdje je $\theta_{vp} = T_{vp} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R_m/c_{pm}}$ virtualna potencijalna temperatura česti (p - parcel), a $\bar{\theta}_{ve}$ virtualna potencijalna temperatura okoliša (e - environment). Virtualna temperatura $T_v = T(1 + 0.605 r)$, univerzalna plinska konstanta za vlažni zrak $R_m = R_d(1 + 0.605 r)$, specifični toplinski kapacitet vlažnog zraka $c_{pm} = c_{pd}(1 + 0.8 r)$.

Energija inhibicije konvekcije (CIN)

CIN je energija potrebna da se čest podigne uvis iz početnog položaja do razine slobodne konvekcije. Ako je CIN velik, neće doći do razvoja duboke konvekcije unatoč tome što drugi uvjeti mogu biti povoljni za razvoj konvekcije.

Uz pretpostavku da vrijedi hidrostatička ravnoteža $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ i da je tlak česti jednak tlaku okoliša $p_{cest}(z) = p_{okoliš}(z)$, energiju inhibicije definiramo kao:

$$CIN = - \int_{p_A}^{p_C} R_d (T_{vp} - T_{ve}) d \ln p \quad (6.17)$$

gdje je p_A tlak u početnom položaju, p_C tlak na nivou slobodne konvekcije, T_{vp} i T_{ve} virtualne temperature česti (p - parcel) i okoliša (e - environment).

6.3 Zadatci

1. U mirnoj atmosferi čest koja nije zasićena vodenom parom vertikalno oscilira. Čest se giba adijabatički s malom amplitudom. Izračunajte period oscilacija pri slijedećim vertikalnim temperaturnim gradijentima: $\gamma = 0.8, 0.5, 0, -1.0, -10.0$ °C/100 m. Virtualna temperatura zraka iznosi 273 K. Zanimarite otpor zraka te pretpostavite da je pri tlu temperatura česti jednaka temperaturi okoline.

Rješenje:

$$T_V = 273 \text{ K}$$

$$T_{\text{čest}}(p_0) = T_{\text{okoliš}}(p_0)$$

$$\tau = ?$$

$$\text{čest: } \frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\text{okoliš: } 0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \rightarrow \text{hidrostatička ravnoteža } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\frac{dw}{dt} = \ddot{z} = -g - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\ddot{z} = -g + \frac{1}{\rho'} \rho g \rightarrow \ddot{z} = g \frac{\rho - \rho'}{\rho'}$$

$$p = \rho RT \rightarrow \rho = \frac{p}{RT} \quad \& \quad \rho' = \frac{p}{RT'}$$

$$T_V = T(1 + 0.605 r)$$

$$\ddot{z} = g \frac{1 + 0.605 r \frac{p}{RT} - \frac{p}{RT'}}{1 + 0.605 r \frac{p}{RT'}} = g \frac{1 + 0.605 r \frac{T' - T}{TT'}}{1 + 0.605 r \frac{T' - T}{TT'}} T'$$

$$\ddot{z} = g \frac{T'_V - T_V}{T_V}$$

$$T'_V = T_{V0} - \delta z, \quad T_V = T_{V0} - \gamma z$$

$$T'_V - T_V = T_{V0} - \delta z - T_{V0} + \gamma z = z(\gamma - \delta)$$

$$\ddot{z} - g \frac{\gamma - \delta}{T_{V0} - \gamma z} z = 0$$

$$\text{razvoj u red oko } z = 0: 1/(T_{V0} - \gamma z) = 1/T_{V0}$$

$$\ddot{z} - g \frac{\gamma - \delta}{T_{V0}} z = 0, \quad v^2 = g \frac{\delta - \gamma}{T_{V0}}$$

$$\ddot{z} + v^2 z = 0$$

$$z = A \sin(vt) + B \cos(vt)$$

$$t = 0, z = 0 \rightarrow B = 0$$

$$z = A \sin(vt)$$

$$\tau = \frac{2\pi}{v} = 2\pi \left(\frac{T_{V0}}{g(\delta - \gamma)} \right)^{1/2}$$

$$\delta = \frac{g}{c_{pd}} = 1 \text{ K/100 m}$$

γ [°C/ 100 m]	1.0	0.8	0.5	0.0	-1.0	-10.0
τ [min]	$2\pi/0$	12.4	7.8	5.5	3.9	1.7

2. Čest suhog zraka diže se vertikalno i prima toplinu u iznosu od 200 J kg^{-1} svakih 100 m . Vertikalni temperaturni gradijent atmosfere je $0.65 \text{ K} / 100 \text{ m}$. Odredite statičku stabilnost.

Rješenje:

$$\frac{dq}{dz} = 200 \text{ J kg}^{-1} / 100 \text{ m}$$

$$\gamma = 0.65 \text{ K} / 100 \text{ m}$$

$$dq = c_p dT - \alpha dp \quad /: dz$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \alpha \frac{dp}{dz}$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \alpha(-\rho g) = c_p \frac{dT}{dz} + g$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{c_p} \left(\frac{dq}{dz} - g \right)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} (2 \text{ J kg}^{-1} \text{ m}^{-1} - 9.81 \text{ m s}^{-2}) = -0.0078 \text{ K m}^{-1}$$

$$\frac{dT}{dz} = -0.78 \text{ K} / 100 \text{ m}$$

$$\delta = -\frac{dT}{dz} = 0.78 \text{ K} / 100 \text{ m}$$

$\delta > \gamma \rightarrow$ statički stabilna atmosfera

3. Čest suhog zraka koja se diže vertikalno prima toplinu $\frac{dq}{dz} = 430 \text{ J kg}^{-1} / 100 \text{ m}$. Vertikalni temperaturni gradijent atmosfere je $\gamma = 0.6 \text{ °C} / 100 \text{ m}$. Odredite statičku stabilnost.

Rješenje:

$$\frac{dq}{dz} = 430 \text{ J kg}^{-1} / 100 \text{ m}$$

$$\gamma = 0.6 \text{ K} / 100 \text{ m}$$

$$dq = c_p dT - \alpha dp \quad /: dz$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \alpha \frac{dp}{dz}$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \alpha(-\rho g) = c_p \frac{dT}{dz} + g$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{c_p} \left(\frac{dq}{dz} - g \right)$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \left(\frac{430 \text{ J kg}^{-1}}{100 \text{ m}} - 9.81 \text{ m s}^{-2} \right) = -0.55 \text{ K} / 100 \text{ m}$$

$$\delta = -\frac{dT}{dz} = 0.55 \text{ K} / 100 \text{ m}$$

$\delta < \gamma \rightarrow$ statički nestabilna atmosfera

4. Čest zraka jedinične mase diže se u kvazistatičkoj atmosferi i pri tome joj se dovodi toplina od 500 J kg^{-1} svakih 100 m . Za koliko se promijeni temperatura česti pri podizanju za 500 m ? Pretpostavite da je gustoća česti jednaka gustoći okoline.

Rješenje:

$$\frac{dq}{dz} = 500 \text{ J kg}^{-1} / 100 \text{ m}$$

$$\Delta z = 500 \text{ m}$$

$$\rho_{\text{čest}} = \rho_{\text{okolis}}$$

$$\Delta T' = ?$$

Kvazistatički uvjet: promjene tlaka unutar česti zbog dizanja česti jednake su promjenama tlaka u okolini $p' = p$, $\rho' = \rho$

$$dq = c_p dT' - \alpha' dp' / \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT'}{dz} - \alpha' \frac{dp'}{dz}$$

Kvazistatički uvjeti: $\frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT'}{dz} + \alpha \frac{g}{\alpha} = c_p \frac{dT'}{dz} + g$$

$$\frac{dT'}{dz} = \frac{1}{c_p} \left(\frac{dq}{dz} - g \right) / \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$\Delta z = z_2 - z_1 = 500 \text{ m}$$

$$\Delta T' = \frac{1}{c_p} \left(\frac{dq}{dz} - g \right) \Delta z$$

$$\Delta T' = \frac{1}{1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \left(\frac{500 \text{ J kg}^{-1}}{100 \text{ m}} - 9.81 \text{ m s}^{-2} \right) \cdot 500 \text{ m} = -2.39 \text{ K}$$

5. Koliko topline treba izgubiti čest suhog zraka da bi joj gustoća pri kvazistatičkom dizanju ostala konstantna?

Rješenje:

$$\frac{d\rho}{dz} = 0$$

$$dq = ?$$

Kvazistatičko dizanje: $p' = p \rightarrow \frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}$

$$p = \rho RT / \ln$$

$$\ln p = \ln \rho + \ln R + \ln T / \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{d\rho}{dz} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$-\frac{1}{p} \rho g = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{T \rho g}{p} = -\frac{T \rho g}{\rho RT} = -\frac{g}{R}$$

$$dq = c_p dT - \alpha dp / \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \alpha \frac{dp}{dz} = c_p \left(-\frac{g}{R} \right) - \alpha (-\rho g) = -c_p \frac{g}{R} + g = g \left(1 - \frac{c_p}{R} \right)$$

$$\frac{dq}{dz} = 9.81 \text{ m s}^{-2} \left(1 - \frac{1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \right) = -24.54 \text{ J kg}^{-1} \text{ m}^{-1} = -2454 \text{ J kg}^{-1} / 100 \text{ m}$$

6. Za koliko se promijeni gustoća suhog zraka u adijabatičkoj atmosferi temperature 0 °C i tlaka 1000 hPa ako se čest zraka adijabatički podigne za 100 m? Kolika je promjena unutarnje energije i specifičnog volumena česti?

Rješenje:

$$T = 0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K}$$

$$p = 1000 \text{ hPa}$$

$$\Delta z = 100 \text{ m}$$

$$\Delta U = ?$$

$$\Delta \alpha = ?$$

$$p = \rho RT / \ln$$

$$\ln p = \ln \rho + \ln R + \ln T \quad / \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho \left(\frac{1}{p} (-\rho g) - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\rho \left(\frac{\rho g}{p} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\frac{\rho}{T} \left(\frac{g}{R} + \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$\rho = \frac{p}{RT} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{p}{RT^2} \left(\frac{g}{R} + \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$\text{Suhi zrak: } \frac{\partial T}{\partial z} = -\delta = -1 \text{ K/100 m}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta z} = -\frac{10^5 \text{ N m}^{-2}}{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot (273.15 \text{ K})^2} \left(\frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} - \frac{1 \text{ K}}{100 \text{ m}} \right)$$

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta z} = -0.01129 \text{ kg m}^{-3}/100 \text{ m}$$

$$\text{Adijabatičko dizanje: } \delta q = du + p d\alpha = 0$$

$$du = -p d\alpha \quad / : dz$$

$$\frac{du}{dz} = -p \frac{d\alpha}{dz} \rightarrow \frac{\Delta u}{\Delta z} = -p \frac{\Delta \alpha}{\Delta z}$$

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{d\alpha}{dz} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dz} \rightarrow \frac{\Delta \alpha}{\Delta z} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\Delta \rho}{\Delta z} = -\frac{R^2 T^2}{p^2} \frac{\Delta \rho}{\Delta z} = 0.006938 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}/100 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = -p \frac{\Delta \alpha}{\Delta z} = p \frac{R^2 T^2}{p^2} \frac{\Delta \rho}{\Delta z} = \frac{R^2 T^2}{p} \frac{\Delta \rho}{\Delta z} = -693.84 \text{ J kg}^{-1}/100 \text{ m}$$

7. Kolika je vertikalna promjena specifične topline česti zraka mase 1 kg koja se giba vertikalno uvis u mirnoj atmosferi, ako se temperatura česti mijenja s visinom kao:

a) $\frac{dT}{dz} = -1 \text{ K/100 m}$

b) $\frac{dT}{dz} = -0.65 \text{ K/100 m}$

Rješenje:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$\frac{\delta q}{dz} = ?$$

$$\delta q = c_p dT - \alpha dp \quad / : dz$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \alpha \frac{dp}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} - \alpha(-\rho g), \quad \alpha = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} + g$$

- a) $\frac{dT}{dz} = -1 \text{ K} / 100 \text{ m} \rightarrow \frac{dq}{dz} = -24 \text{ J kg}^{-1} / 100 \text{ m}$
 b) $\frac{dT}{dz} = -0.65 \text{ K} / 100 \text{ m} \rightarrow \frac{dq}{dz} = 328 \text{ J kg}^{-1} / 100 \text{ m}$

8. Vertikalni temperaturni gradijent atmosfere iznosi $\gamma = 0.6 \text{ }^\circ\text{C} / 100 \text{ m}$. Koliko bi topline trebala primiti čest zraka jedinične mase ako joj se visina kvazistatički poveća za jedinicu visine kako bi imala jednaku temperaturu kao i okolni zrak na svim visinama?

Rješenje:

$\gamma = 0.6 \text{ }^\circ\text{C} / 100 \text{ m} = 0.6 \text{ K} / 100 \text{ m}$ (jer se radi o iznosu promjene temperature s visinom)

$$T_{\text{čest}} = T_{\text{okolina}}$$

$$\frac{dq}{dz} = ?$$

$$dq = c_p dT' - \alpha dp' / dz$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT'}{dz} - \alpha' \frac{dp'}{dz}$$

U član $\frac{dp}{dz}$ uključujemo okolinu.

Kvazistatički proces: $\frac{dp'}{dz} = \frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g$, $p' = p = \rho RT$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT'}{dz} + \frac{RT}{p} \frac{p}{RT} g = c_p \frac{dT'}{dz} + g$$

$$\frac{dT}{dz} = \frac{dT'}{dz}, \quad T = T'$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \frac{dT}{dz} + g = c_p(-\gamma) + g$$

$$\frac{dq}{dz} = c_p \left(\frac{g}{c_p} - \gamma \right) = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \left(\frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} - \frac{0.6 \text{ K}}{100 \text{ m}} \right)$$

$$\frac{dq}{dz} = 3.78 \text{ J kg}^{-1} \text{ m}^{-1} = 378 \text{ J kg}^{-1} / 100 \text{ m}$$

7 Mjere vlažnosti zraka

7.1 Definicije mjera vlažnosti zraka

Tlak vodene pare

Sve dok je tlak vodene pare e manji od parcijalnog tlaka zasićene vodene pare pri istoj temperaturi e_s , tj. $e < e_s$, vlažni zrak mora zadovoljavati plinsku jednadžbu:

$$(p_d + e)\alpha_m = R_m T \quad (7.1)$$

gdje je $p_m = p_d + e$ tlak vlažnog zraka.

Omjer miješanja

Najviše se koristi u teorijskim istraživanjima (modelima atmosferskih procesa) za vlažni zrak. Omjer miješanja r jednak je omjeru mase vodene pare (v – *vapour*) i mase suhog zraka (d – *dry air*) u promatranom volumenu V :

$$r = \frac{m_v}{m_d} = \frac{\rho_v V}{\rho_d V} = \frac{\rho_v}{\rho_d}, \quad (7.2)$$

gdje je $\rho_v \ll \rho_d$.

$$r = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{p_d}{R_d T}} = \frac{R_d e}{R_v p_d} = \frac{R_d}{R_v} \frac{e}{p - e} = \varepsilon \frac{e}{p - e}, \quad (7.3)$$

gdje je $p = p_d + e$ tlak vlažnog zraka, $\varepsilon = \frac{R_d}{R_v} = 0.6225$ omjer plinske konstante za suhi zrak $R_d = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ i plinske konstante za vodenu paru $R_v = 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Omjer miješanja uobičajeno iznosi oko 10^{-2} do 10^{-3} .

Za zasićenu vodenu paru definiramo maksimalni mogući omjer miješanja:

$$r_s = \frac{\varepsilon e_s}{p - e_s}. \quad (7.4)$$

gdje je e_s maksimalni (ravnotežni) tlak vodene pare.

Relativna vlažnost

Relativna vlažnost u je omjer stvarnog i maksimalnog (ravnotežnog) omjera miješanja vodene pare izražen u postotcima,

$$u = \frac{r}{r_s} \cdot 100 [\%], \quad (7.5)$$

$$u = \frac{\frac{\varepsilon e}{p-e}}{\frac{\varepsilon e_s}{p-e_s}} = \frac{e}{e_s} \frac{p-e_s}{p-e} \approx \frac{e}{e_s}, \quad (7.6)$$

jer je $p \gg e_s$ i $p \gg e$.

Specifična vlažnost

$$q = \frac{m_v}{m_v + m_d} = \frac{\rho_v}{\rho_v + \rho_d} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{e}{R_v T} + \frac{p-e}{R_d T}} = \frac{\frac{e}{R_v T}}{\frac{e R_d + (p-e) R_v T}{R_d R_v T}} \quad (7.7)$$

gdje je $m_m = m_v + m_d$ masa vlažnog zraka.

$$q = \frac{R_d e}{R_d e + R_v p - R_v e} = \frac{R_d e}{R_v (\frac{e R_d}{R_v} + p - e)} = \frac{\varepsilon e}{p - e(1 - \varepsilon)}, \quad (7.8)$$

gdje je $\varepsilon = \frac{R_d}{R_v} = 0.6225$,

$$q = \frac{0.623e}{p - 0.377e}. \quad (7.9)$$

Za $e \ll p$:

$$q \approx \frac{\varepsilon e}{p} = \frac{0.623e}{p}. \quad (7.10)$$

Za zasićenu vodenu paru:

$$q = \frac{\varepsilon e_s}{p - e_0(1 - \varepsilon)}. \quad (7.11)$$

Apsolutna vlažnost

Apsolutna vlažnost a je količina vodene pare u 1 m^3 zraka $[\text{g m}^{-3}]$.

$$e \alpha_v = R_v T \rightarrow \frac{e}{\rho_v} = R_v T \rightarrow e \frac{V}{m_v} = R_v T \quad (7.12)$$

$$m_v = \frac{eV}{R_v T}, \quad (7.13)$$

gdje je volumen $V = 1 \text{ m}^3$.

$$a = \frac{m_v}{V} = \frac{e}{R_v T}, \quad (7.14)$$

$$a = 0.217 \frac{e}{T} [\text{kg m}^{-3}], \quad (7.15)$$

$$a = 217 \frac{e}{T} [\text{g m}^{-3}]. \quad (7.16)$$

Gustoća vlažnog zraka

$$m_m = m_v + m_d /: V \quad (7.17)$$

$$\rho_m = \rho_v + \rho_d, \quad (7.18)$$

gdje je $\rho_v = \frac{e}{R_v T}$ gustoća vodene pare, a $\rho_d = \frac{p-e}{R_d T}$ gustoća suhog zraka.

$$\rho_m = \frac{e}{R_v T} + \frac{p-e}{R_d T} = \frac{p}{R_d T} \left(\frac{R_d}{R_v} \frac{e}{p} + 1 - \frac{e}{p} \right), \quad (7.19)$$

$$\rho_m = \frac{p}{R_d T} \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{e}{p} \right] = \frac{p}{R_d T} \left(1 - 0.377 \frac{e}{p} \right), \quad (7.20)$$

$$\rho_m = \rho_d \left(1 - 0.377 \frac{e}{p} \right). \quad (7.21)$$

Vlažni zrak je rjeđi i lakši od suhog zraka, $\rho_m < \rho_d$.

Plinska konstanta za vlažni zrak

Plinska konstanta za vlažni zrak R_m [$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$]. Uvijek vrijedi $R_m > R_d$.

$$R_m \approx R_d (1 + 0.605 r), \quad (7.22)$$

$$0.605 = \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1}{R_d/R_v} - 1 = \frac{R_v}{R_d} - 1, \quad (7.23)$$

$$R_m \approx R_d \left[1 + \left(\frac{R_v}{R_d} - 1 \right) r \right]. \quad (7.24)$$

Virtualna temperatura

Virtualna temperatura T_V je temperatura koju bi imao suhi zrak da ima istu gustoću i tlak kao vlažni zrak temperature T , tlaka p i omjera miješanja r :

$$T_V = \frac{R_m}{R_d} T, \quad (7.25)$$

$$T_V = (1 + 0.605 r) T. \quad (7.26)$$

Specifična toplina vlažnog zraka

Specifična toplina (ili toplinski kapacitet) vlažnog zraka pri konstantnom tlaku

$$c_{pm} = \left(\frac{dq}{dT} \right)_{pm} :$$

$$c_{pm} \approx c_{pd}(1 + 0.8 r) \quad (7.27)$$

Specifična toplina vlažnog zraka pri konstantnom volumenu $c_{vm} = \left(\frac{dq}{dT}\right)_{vm}$:

$$c_{vm} \approx c_{vd}(1 + 0.9 r) \quad (7.28)$$

7.2 Termodinamika vlažnog zraka

Vlažni zrak se sastoji od suhog zraka i vodene pare. Kada dođe do promjene agregatnog stanja, energija se transformira zbog oslobađanja ili apsorpcije latentne topline.

Specifična toplina vodene pare pri konstantnom volumenu:

$$c_{vv} = 1350 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (7.29)$$

Specifična toplina vodene pare pri konstantnom tlaku:

$$c_{pv} = 1810 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (7.30)$$

Specifična toplina vode:

$$c_l = 4190 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (7.31)$$

Specifična toplina leda:

$$c_i = 1950 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (7.32)$$

Za nezasićenu vodenu paru vrijedi plinska jednadžba:

$$e\alpha_v = R_v T \quad (7.33)$$

gdje je $R_v = \frac{R^*}{M} = \frac{8314 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{18 \text{ kg mol}^{-1}} = 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ plinska konstanta za vodenu paru.

Za zasićenu vodenu paru ($e \rightarrow e_s$) ne vrijedi plinska jednadžba, nego Van der Waalsova jednadžba:

$$\left(p + \frac{a}{\alpha^2}\right)(\alpha + b) = RT, \quad (7.34)$$

gdje je a konstanta koja mjeri jakost kohezije u realnom plinu, b je konstanta smanjenja volumena plina u prostoru.

U praksi se ipak koristi plinska jednadžba

$$e_s = R_v \rho_v T. \quad (7.35)$$

Clausius-Clapeyronova jednadžba

Clausius-Clapeyronova jednadžba je diferencijalna jednadžba koja povezuje promjenu tlaka s promjenom temperature u sustavu u kojem se dva agregatna stanja iste tvari nalaze u ravnoteži

(npr. u oblaku u kojem se uz oblačne kapljice nalazi i vodena para u stanju zasićenja). Ova jednadžba opisuje promjenu tlaka zasićenja vodene pare u ovisnosti o temperaturi:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{T(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad (7.36)$$

gdje indeksi 1 i 2 označavaju agregatno stanje tvari. L_{12} je latentna toplina promjene agregatnog stanja, α specifični volumen, T temperatura.

Latentna toplina

Latentna toplina je toplina potrebna da se 1 kg tvari iz jednog agregatnog stanja prevede u 1 kg iste tvari u drugom agregatnom stanju pri konstantnoj temperaturi i tlaku suhog zraka. Latentna toplina se mijenja s temperaturom, ali je pri atmosferskim temperaturama približno konstantna.

Kada dođe do promjene agregatnog stanja energija se transformira oslobađanjem latentne topline.

Latentna toplina sublimacije/kristalizacije:

$$L_{iv} = 2234 \text{ kJ kg}^{-1}. \quad (7.37)$$

Latentna toplina isparavanja/kondenzacije:

$$L_{lv} = 2501 \text{ kJ kg}^{-1}. \quad (7.38)$$

Latentna toplina taljenja/zaleđivanja:

$$L_{il} = 334 \text{ kJ kg}^{-1}. \quad (7.39)$$

Specifični volumeni:

$$\alpha_v = 1.674 \text{ m}^3 \text{kg}^{-1}, \quad (7.40)$$

$$\alpha_l = 10^{-3} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1}, \quad (7.41)$$

$$\alpha_i = 1.091 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1}. \quad (7.42)$$

Analitički izrazi za $e_s = e_s(T)$

- 1) $e_s = 6.11 \cdot 10^{8.619 - \frac{235.3}{T}}$, gdje je T temperatura u Kelvinima, a e_s maksimalni (ravnotežni) tlak vodene pare u hPa.
- 2) Magnus - Tetensova formula: $e_0 = e_{s0} \cdot 10^{at/(b+t)}$, gdje je t temperatura u stupnjevima Celzijevim, te a i b konstante koje se razlikuju za vodu i led (tablica 6.1).

Tablica 6.1: Konstante u Magnus-Tetensovoj formuli.

	led	voda
a	9.5	7.5
b	265.5	237.3

Opća svojstva vlažnog zraka

Vlažni zrak je lakši i rjeđi od suhog zraka.

Ukupni sadržaj topline u vlažnoj česti veći je nego u suhoj česti. Entalpija mjeri ukupnu količinu topline u česti. Entalpija je zbroj manifestne (tj. senzibilne) topline (toplina čiju temperaturu mjerimo) i latentne topline (toplina koja je sadržana u kinetičkoj energiji molekula vode).

Kondenzacijom se oslobađa latentna toplina i raste manifestna toplina, dok entalpija ostaje ista.

Prvi stavak termodinamike:

$$\delta q = c_v dT + p d\alpha = c_p dT - \alpha dp, \quad (7.43)$$

$$\delta q = du + dw \quad (7.44)$$

Iz jednadžbe (7.44) slijedi da su promjena unutarnje energije i rada jednake:

$$du = c_v dT, \quad (7.45)$$

$$dw = p d\alpha. \quad (7.46)$$

Entalpija

$$h = u + p\alpha, \quad (7.47)$$

$$dh = du + p d\alpha + \alpha dp = \delta q + \alpha dp, \quad (7.48)$$

$$\delta q = dh - \alpha dp. \quad (7.49)$$

Kombiniranjem prvog stavka termodinamike (7.43) i jednadžbe (7.49) dobivamo izraz za promjenu entalpije:

$$dh = c_p dT \quad (7.50)$$

Slijedi izraz za entalpiju:

$$h = c_p T, \quad (7.51)$$

gdje se uzima da je $h = 0$ za $T = 0$.

Entropija vlažnog zraka veća je od entropije suhog zraka:

$$s_m > s_d. \quad (7.52)$$

Entropija vodene pare:

$$s_v = s_l + s_{lv} \quad (7.53)$$

gdje je s_l entropija tekuće vode, a s_{lv} entropija transformacije vode u paru.

Vodena para u česti zraka može biti dovedena u stanje zasićenja na dva načina: hlađenjem i isparavanjem u blizini vodenih površina.

7.3 Procesi vlažnog zraka

Izobarni procesi vlažnog zraka

Čest može postati zasićena:

- a) izobarnim ohlađivanjem
- b) dodavanjem vodene pare (isparavanjem vode u čest)

Temperatura rosišta

Temperatura rosišta T_d je temperatura na kojoj čest zraka izobarnim ohlađivanjem postaje zasićena vodenom parom. Ako se zrak izobarno ohladi do temperature rosišta (npr. to se može dogoditi noću zbog radijacijskog ohlađivanja), tada će se na tlu pojaviti rosa ($T_d > 0\text{ °C}$) ili mraz ($T_d < 0\text{ °C}$).

Temperaturu rosišta možemo odrediti grafički iz termodinamičkog dijagrama ili je možemo izračunati pomoću integralnog oblika Clausius – Clayperonove jednačbe:

$$e_s(T) = e_{s0} \exp\left(\frac{L_{lv}}{R_v}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right), \quad (7.54)$$

gdje je $e_s(T)$ ravnotežni tlak vodene pare pri temperaturi T .

U prethodnu jednačbu (7.54) uvrstimo uvjet da je stvarni tlak vodene pare pri temperaturi T jednak maksimalnom (ravnotežnom) tlaku vodene pare na temperaturi rosišta $e(T) = e_s(T_d)$:

$$e_s(T_d) = 6.11 \cdot \exp\left(\frac{L_{lv}}{R_v}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_d}\right)\right), \quad (7.55)$$

te iz poznatog tlaka vodene pare $e(T)$ možemo izračunati rosište.

Temperatura mokrog termometra

Izobarna temperatura mokrog termometra $T_{w,i}$ je temperatura koju bi čest imala ako bi se pri konstantnom tlaku adijabatski ohladila do zasićenja isparavanjem vode ili sublimacijom leda u čest. Pritom se čest ohlađuje jer troši toplinu na isparavanje (ili sublimaciju).

Temperaturu mokrog termometra očitavamo s mokrog termometra na psihrometru.

Ako kapljice unutar oblaka isparavaju, te se kapljica tada ohlađuje do temperature $T_{w,i}$.

Temperatura mokrog termometra razlikuje se od temperature rosišta, $T_{w,i} \neq T_d$.

Psihrometrijska razlika

Što je zrak vlažniji, to je manja razlika između temperature zraka (T) i izobarne temperature mokrog termometra ($T_{w,i}$). Razliku $T - T_{w,i}$ zovemo psihrometrijska razlika i upotrebljavamo je kod određivanja tlaka vodene pare e :

$$e \approx e_s - \frac{p - e}{\varepsilon L_{lv}} \overline{c_{pm}} (T - T_{w,i}), \quad (7.56)$$

gdje je $\overline{c_{pm}} \approx c_{pd}(1 + 0.8 r)$. Ovu formulu koristimo u teorijskim istraživanjima.

U praksi pretpostavljamo da je $\overline{c_{pm}} \approx c_{pd}$ (gdje ne radimo veliku pogrešku jer je omjer miješanja mali), te $p - e \approx p$. Koristeći ove pretpostavke dobivamo psihrometrijsku formulu:

$$T - T_{w,i} \approx \frac{(e_s - e)\varepsilon L_{lv}}{p c_{pd}}. \quad (7.57)$$

Ekvivalentna temperatura

Vodena para u česti smanjuje se kondenzacijom ($r \rightarrow 0$). Ekvivalentna temperatura $T_{e,i}$ je temperatura koju bi čest imala nakon što se sva vodena para u njoj izobarno kondenzirala, a oslobođena latentna toplota zagrijala čest:

$$T_{e,i} = T + \frac{L_{lv} r}{c_{pd}}. \quad (7.58)$$

Termodinamička veza između, T , $T_{w,i}$ i $T_{e,i}$ u izobarnom procesu

Čest u početnom trenutku ima temperaturu T i omjer miješanja r . Ako omjer miješanja teži k nuli, tada temperatura teži k ekvivalentnoj temperaturi, $r \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow T_{e,i}$. Ako omjer miješanja teži k maksimalnom omjeru miješanja, tada temperatura teži k temperaturi mokrog termometra, $r \rightarrow r_s \Rightarrow T \rightarrow T_{w,i}$.

$$\begin{aligned} L_{lv} dr &= -\overline{c_{pm}} dT / \int_{r, T}^{r_s, T_{w,i}} \\ L_{lv}(r_s - r) &= -\overline{c_{pm}} (T_{w,i} - T) \\ L_{lv}(r_s - r) &= \overline{c_{pm}} (T - T_{w,i}) \\ T_{w,i} &= T - \frac{L_{lv}}{\overline{c_{pm}}} (r_s - r) \end{aligned} \quad \begin{aligned} L_{lv} dr &= -\overline{c_{pm}} dT / \int_{r, T}^{0, T_{e,i}} \\ L_{lv}(-r) &= -\overline{c_{pm}} (T_{e,i} - T) \\ L_{lv} r &= \overline{c_{pm}} (T_{e,i} - T) \\ T &= T_{e,i} - \frac{L_{lv} r}{\overline{c_{pm}}} \end{aligned}$$

$$T_{w,i} = T_{e,i} - \frac{L_{lv} r}{\overline{c_{pm}}} - \frac{L_{lv}}{\overline{c_{pm}}} (r_s - r) \quad (7.59)$$

$$T_{w,i} = T_{e,i} - \frac{L_{lv} r_s}{\overline{c_{pm}}} \quad (7.60)$$

$$T_{e,i} = T_{w,i} + \frac{L_{lv} r_s}{\overline{c_{pm}}} \quad (7.61)$$

Ekvivalentna temperatura $T_{e,i}$ i temperatura mokrog termometra $T_{w,i}$ su invarijantne, tj. predstavljaju konzervativno svojstvo vlažne česti u izobarnim procesima isparavanja i kondenzacije.

7.4 Zadatci

1. Ako je omjer miješanja $r = 6 \cdot 10^{-3}$, tlak zraka 1000 hPa i temperatura 14 °C, nađite:

- specifičnu vlažnost (q)
- relativnu vlažnost (u)
- apsolutnu vlažnost (a).

Rješenje:

$$T = 14 \text{ °C} = 287.15 \text{ K}$$

$$p = 1000 \text{ hPa}$$

$$r = 6 \cdot 10^{-3}$$

$$q = ?$$

$$u = ?$$

$$a = ?$$

$$q = \frac{m_v}{m_m} = \frac{m_v}{m_v + m_d} \quad /: m_d$$

$$q = \frac{m_v/m_d}{\frac{m_v}{m_d} + 1}, \quad \frac{m_v}{m_d} = r$$

$$q = \frac{r}{1 + r} = 5.96 \cdot 10^{-3}$$

$$u = \frac{r}{r_s} \cdot 100$$

$$u = \frac{e}{e_s} \frac{p - e_s}{p - e} \approx \frac{e}{e_s}$$

$$e_s = e_{s0} \exp\left(\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right), e_{s0} = 6.11 \text{ hPa}, T_0 = 273.15 \text{ K}, L_{lv} = 2500 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$e_s = 16.1 \text{ hPa}$$

$$r = \frac{\varepsilon e}{p - e} \rightarrow pr - er = \varepsilon e \rightarrow e = \frac{pr}{\varepsilon + r} = 9.5 \text{ hPa}, \quad \varepsilon = R_d/R_v$$

$$u = \frac{e}{e_s} = \frac{9.5 \text{ hPa}}{16.1 \text{ hPa}} = 59 \%$$

$$a = \frac{e}{R_v T} = 7.18 \text{ g m}^{-3}$$

2. Izračunajte gustoću vodene pare koja se nalazi pri temperaturi od 20 °C, ako joj je tlak 9 hPa.

Rješenje:

$$T = 20 \text{ °C} = 293.15 \text{ K}$$

$$e = 9 \text{ hPa}$$

$$\rho_v = ?$$

$$e \alpha_v = R_v T \rightarrow e = \rho_v R_v T \rightarrow \rho_v = \frac{e}{R_v T}$$

$$R_v = 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\rho_v = 6.66 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$$

3. Ako je omjer miješanja vlažnog zraka 5.5 g kg⁻¹, a ukupni tlak vlažnog zraka 1026.8 hPa, izračunajte tlak vodene pare.

Rješenje:

$$r = 5.5 \text{ g kg}^{-1} = 5.5 \cdot 10^{-3}$$

$$p = p_d + e = 1026.8 \text{ hPa}$$

$$e = ?$$

$$r = \frac{m_v}{m_d} = \frac{\rho_v V}{\rho_d V} = \frac{\rho_v}{\rho_d}, \quad \rho_v = \frac{e}{R_v T}, \quad \rho_d = \frac{p_d}{R_d T}$$

$$r = \frac{e R_d}{p_d R_v} = \frac{e R_d}{(p - e) R_v}$$

$$R_v p r - R_v e r = R_d e \rightarrow e(R_d + R_v r) = R_v p r$$

$$e = \frac{R_v p r}{R_d + R_v r} = 8.99 \text{ hPa}$$

4. Specifična vlaga zraka pri 30 °C je 0.0196. Kolika je virtualna temperatura? Ako je ukupni tlak vlažnog zraka 1014 hPa, kolika je gustoća?

Rješenje:

$$T = 30 \text{ °C} = 303.15 \text{ K}$$

$$q = 0.0196$$

$$p = 1014 \text{ hPa}$$

$$T_v = ?, \quad \rho_m = ?$$

$$T_v = T(1 + 0.605 r)$$

$$r = \frac{m_v}{m_d}, \quad q = \frac{m_v}{m_v + m_d}$$

$$\frac{r}{q} = \frac{\frac{m_v}{m_d}}{\frac{m_v}{m_v + m_d}} = \frac{m_v + m_d}{m_d} = 1 + \frac{m_v}{m_d}$$

$$r = q \left(1 + \frac{m_v}{m_d} \right) = q(1 + r) \rightarrow r(1 - q) = q \rightarrow r = \frac{q}{1 - q}$$

$$T_v = T \left(1 + 0.605 \frac{q}{1-q} \right) = 306.8 \text{ K} \rightarrow t_v = 33.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$p = \rho_m R_m T, \quad T_v = \frac{R_m}{R_d} T \rightarrow R_m T = R_d T_v$$

$$p = \rho_m T_v R_d$$

$$\rho_m = \frac{p}{T_v R_d} = 1.15 \text{ kg m}^{-3}$$

5. Izračunajte latentnu toplinu isparavanja vode pri 100 °C i 1013.25 hPa. Specifični volumen vodene pare je 1674 cm³g⁻¹, vode 1 cm³g⁻¹. Promjena tlaka zasićene vodene pare je 36 mbar K⁻¹.

Rješenje:

$$T = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373.15 \text{ K}$$

$$p = 1013.25 \text{ hPa}$$

$$\alpha_v = 1.674 \text{ m}^3\text{kg}^{-1}$$

$$\alpha_l = 10^{-3} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}$$

$$\frac{de_s}{dT} = 36 \text{ mbar K}^{-1}$$

$$L_{lv} = ?$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{T(\alpha_2 - \alpha_1)} \rightarrow L_{12} = L_{lv} = T(\alpha_v - \alpha_l) \frac{de_s}{dT}$$

$$L_{lv} = 373.15 \text{ K} \cdot 1.673 \text{ m}^3\text{kg}^{-1} \cdot 3600 \frac{\text{Pa}}{\text{K}} = 2247.4 \text{ kJ kg}^{-1}$$

6. Izračunajte promjenu tlaka zasićene vodene pare iznad leda ako se temperatura vodene pare smanji s 0 °C na -10 °C pomoću Magnus-Tetensove jednadžbe.

Rješenje:

$$T_1 = 0 \text{ }^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K}$$

$$T_2 = -10 \text{ }^\circ\text{C} = 263.15 \text{ K}$$

$$\Delta e_s = ?$$

Magnus-Tetensove jednadžba:

$$e_s = e_{s0} \cdot 10^{\frac{at}{b+t}}$$

$$e_s(t = -10 \text{ }^\circ\text{C}) = 6.11 \text{ hPa} \cdot 10^{\frac{9.5(-10 \text{ }^\circ\text{C})}{265.5 - 10 \text{ }^\circ\text{C}}} = 6.11 \cdot 10^{-\frac{95}{2555}} = 2.6 \text{ hPa}$$

$$e_s(t = 0 \text{ }^\circ\text{C}) = 6.11 \text{ hPa}$$

$$\Delta e_s = e_{s2} - e_{s1} = -3.51 \text{ hPa}$$

7. Polazeći od Clausius - Clapeyronove jednadžbe pokažite da vrijedi:

$$\ln \frac{e_s}{6.11 \text{ hPa}} = \frac{L}{R_v} \left(\frac{1}{273 \text{ K}} - \frac{1}{T} \right),$$

Iz gornje jednadžbe izračunajte tlak zasićenja vodene pare pri 20 °C.

Rješenje:

$$T = 20 \text{ }^\circ\text{C} = 293.15 \text{ K}$$

$$e_s = ?$$

Clausius – Clapeyronova jednačba:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{T(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$\alpha_1 = \alpha_i = 1.091 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ ili } \alpha_1 = \alpha_l = 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$$

$$\alpha_2 = \alpha_v = 1.674 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$$

Zbog $\alpha_v \gg \alpha_l, \alpha_i$ slijedi:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{\alpha_2 T} = \frac{L_{lv}}{\alpha_v T}$$

$$e_s \alpha_v = R_v T \rightarrow \alpha_v = R_v T / e_s$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv} e_s}{R_v T^2} \rightarrow \frac{de_s}{e_s} = \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2} \int_1^2$$

$$\ln \frac{e_{s2}}{e_{s1}} = -\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

$$\text{Za } T_1 = 273 \text{ K} \rightarrow e_s = e_{s1} = 6.11 \text{ hPa}$$

$$\ln \frac{e_s}{e_{s0}} = \frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \rightarrow \ln \frac{e_s}{6.11 \text{ hPa}} = \frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{273 \text{ K}} - \frac{1}{T} \right)$$

$$e_s(t = 20^\circ \text{C}) = 6.11 \text{ hPa} e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{T} \right)}$$

$$R_v = 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, L_{lv} = 2.5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$$

$$e_s(t = 20^\circ \text{C}) = 23.93 \text{ hPa}$$

8. Izračunajte promjenu temperature taljenja leda ako se tlak povisi s 1 atm na 2 atm. Specifični volumeni iznose $\alpha_i = 1.0908 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$ i $\alpha_l = 1.001 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$ i $L_{il} = 334 \text{ kJ kg}^{-1}$, gdje su specifični volumeni dani za normalni atmosferski tlak i temperaturu od 0°C .

Rješenje:

$$p_1 = 1 \text{ atm} = 1013.25 \text{ hPa}$$

$$p_2 = 2 \text{ atm}$$

$$\Delta T = ?$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{12}}{T(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

Taljenje leda:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{il}}{T(\alpha_l - \alpha_i)}$$

$$p = p_d + e / d$$

$$dp = dp_d + de, \quad dp_d = 0 \rightarrow dp = de$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L_{il}}{T(\alpha_l - \alpha_i)} \rightarrow dT = \frac{T(\alpha_l - \alpha_i)}{L_{il}} dp \rightarrow \Delta T = \frac{T(\alpha_l - \alpha_i)}{L_{il}} \Delta p$$

$$\Delta T = -0.01 \text{ K}$$

9. Vlažni zrak volumena 20 l pri temperaturi 20°C ima relativnu vlažnost 60% i izotermno se komprimira do volumena 4 l. Kolika je masa kondenzirane vode?

Rješenje:

$$V_1 = 20 \text{ l} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T = 20^\circ \text{C} = 293.15 \text{ K} = \text{const.}$$

$$u_1 = 60\%$$

$$V_2 = 4 \text{ l} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$m_l = ?$$

$$u = 0.6 = \frac{r}{r_s} = \frac{\frac{\varepsilon e}{p - e}}{\frac{\varepsilon e_s}{p - e_s}} = \frac{e}{e_s} \frac{p - e_s}{p - e} \approx \frac{e}{e_s} \rightarrow e = u e_s$$

I.	$\Rightarrow$	II.
$m_{uk} = m_m = m_{v1} + m_d$	$T = \text{const.}$	$m_{uk} = m_{v2} + m_d + m_l$
V_1, e_1	kompresija	$V_2, e_2, u_2 = 100\%$

Iz I. i II. slijedi: $m_{v1} + m_d = m_{v2} + m_d + m_l$
 $m_{v1} = m_{v2} + m_l$

Izotermna kompresija: $p\alpha = \text{const.}$

$$p_1 \frac{V_1}{m_{uk}} = p_2 \frac{V_2}{m_{uk}} \rightarrow p_1 V_1 = p_2 V_2 \rightarrow p_1 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = p_2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}$$

$$p_2 = 5p_1$$

I.	vodena para	II.	$u_2 = 100\%, e = e_s$
	$e_1 \alpha_{v1} = R_v T \rightarrow e_1 \frac{V_1}{m_{v1}} = R_v T$		$e_2 = u_2 e_s = e_s$
	$m_{v1} = \frac{e_1 V_1}{R_v T}$		$e_2 = e_s = e_{s0} \exp\left(\frac{L}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$
	$e_1 = u_1 e_s = u_1 e_{s0} \exp\left(\frac{L}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$		$e_2 = 23.71 \text{ hPa}$
	$m_{v1} = \frac{V_1}{R_v T} u_1 e_{s0} \exp\left(\frac{L}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right)$		$e_2 \alpha_{v2} = R_v T \rightarrow e_2 \frac{V_2}{m_{v2}} = R_v T$
	$m_{v1} = 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$		$m_{v2} = \frac{e_2 V_2}{R_v T} = 7.02 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$
	$m_l = m_{v1} - m_{v2} = \frac{e_1 V_1 - e_2 V_2}{R_v T} = 0.14 \text{ g}$		

10. Zrak koji je zasićen vodenom parom hladi se zbog radijacije. Za koliko će se smanjiti temperatura zraka ako se kondenzira 0.01 g vodene pare po 1 m³ zraka? Početna temperatura je 293 K.

Rješenje:

$$T = 293 \text{ K}$$

$$\Delta \rho_v = -0.01 \text{ g m}^{-3}$$

$$\Delta T = ?$$

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{T(\alpha_v - \alpha_l)}$$

$$\alpha_v \gg \alpha_l \rightarrow \frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{\alpha_v T}$$

$$de_s = \frac{L_{lv}}{\alpha_v T} dT$$

$$e_s \alpha_v = R_v T / d \rightarrow de_s = R_v \rho_v dT + R_v T d\rho_v$$

$$\begin{aligned}
R_v \rho_v dT + R_v T d\rho_v &= \frac{L_{lv}}{T} \rho_v dT \\
R_v T d\rho_v &= \left(\frac{L_{lv}}{T} \rho_v - R_v \rho_v \right) dT \\
dT &= \frac{R_v T d\rho_v}{\frac{L_{lv}}{T} \rho_v - R_v \rho_v} = \frac{R_v T d\rho_v}{\rho_v \left(\frac{L_{lv}}{T} - R_v \right)} = \frac{R_v T d\rho_v}{\frac{e_s}{R_v T} \left(\frac{L_{lv}}{T} - R_v \right)} = \frac{R_v^2 T^2 d\rho_v}{e_s \left(\frac{L_{lv}}{T} - R_v \right)} \\
e_s &= e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)} = 23.7 \text{ hPa} \\
\Delta T &= \frac{R_v^2 T^2 d\rho_v}{e_s \left(\frac{L_{lv}}{T} - R_v \right)} = -0.95 \text{ K}
\end{aligned}$$

11. Tijekom dana temperatura zraka se promijeni za 15 °C, a parcijalni tlak vodene pare za 2 mbar. Za koliko se postotaka promijeni relativna vlažnost zraka samo zbog promjene temperature, a koliko zbog promjene parcijalnog tlaka vodene pare? Srednja dnevna temperatura iznosi $\bar{T} = 280 \text{ K}$, a srednji tlak vodene pare $\bar{e} = 8 \text{ hPa}$.

Rješenje:

$$\Delta T = 15 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\Delta e = 2 \text{ mbar}$$

$$\bar{T} = 280 \text{ K}$$

$$\bar{e} = 8 \text{ hPa}$$

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right|_{T=\text{const.}} = ?$$

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right|_{e=\text{const.}} = ?$$

$$\text{Relativna vlažnost: } u = \frac{e}{e_s} / \ln$$

$$\ln u = \ln e - \ln e_s / d$$

$$\frac{du}{u} = \frac{de}{e} - \frac{de_s}{e_s}$$

Clausius – Clayperonova jednačba:

$$\frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{T(\alpha_v - \alpha_l)} = \frac{L_{lv}}{T\alpha_v} = \frac{L_{lv}e_s}{T^2 R_v}$$

jer je $\alpha_v \gg \alpha_l$, te vrijedi $\alpha_v = R_v T / e_s$.

$$\frac{de_s}{e_s} = \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{de}{e} - \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2}$$

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right|_{T=\text{const.}} = \left| \frac{\Delta e}{e} \right| = 0.25 = 25\%$$

$$\left| \frac{\Delta u}{u} \right|_{e=\text{const.}} = \left| -\frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2} \right| = 1.038 = 103.8\%$$

12. Zadana je dozvoljena promjena relativne vlažnosti $\Delta u = \pm 10 \%$ od stanja zraka koje je određeno s $T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$, $p = 1000 \text{ mbar}$, $u = 60\%$. Koliko iznosi maksimalno moguće povećanje temperature zraka ako je zadano kolebanje tlaka $\Delta p = \pm 1 \text{ mbar}$, a specifična vlažnost je konstantna?

Rješenje:

$$\Delta u = \pm 10 \%$$

$T = 10\text{ }^{\circ}\text{C} = 283.15\text{ K}$
 $p = 1000\text{ mbar}$
 $u = 60\%$
 $\Delta p = \pm 1\text{ mbar}$
 $q = \text{const.}$

$\Delta T = ?$

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{e}{e_s} / \ln \\
 \ln u &= \ln e - \ln e_s / d \\
 \frac{du}{u} &= \frac{de}{e} - \frac{de_s}{e_s} \\
 q &= \text{const.} \rightarrow dq = 0 \\
 q &= \frac{\varepsilon e}{p + (\varepsilon - 1)e} \approx \frac{\varepsilon e}{p} / \ln \\
 \ln q &= \ln \varepsilon + \ln e - \ln p / d \\
 \frac{dq}{q} &= \frac{de}{e} - \frac{dp}{p} = 0 \rightarrow \frac{de}{e} = \frac{dp}{p} \\
 \frac{de_s}{dT} &= \frac{L_{lv}}{T(\alpha_v - \alpha_l)} \\
 \alpha_v \gg \alpha_l &\rightarrow \frac{de_s}{dT} = \frac{L_{lv}}{\alpha_v T}, \quad \alpha_v = \frac{R_v T}{e_s} \\
 \frac{de_s}{dT} &= \frac{L_{lv} e_s}{R_v T^2} \rightarrow \frac{de_s}{e_s} = \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2} \\
 \frac{du}{u} &= \frac{dp}{p} - \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{dT}{T^2} \rightarrow \frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta p}{p} - \frac{L_{lv}}{R_v} \frac{\Delta T}{T^2} \\
 \Delta T &= R_v T^2 / L_{lv} \left(\frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta u}{u} \right)
 \end{aligned}$$

Povećanje temperature bit će maksimalno kada je $\Delta p = +1\text{ mbar}$ i $\Delta u = -10\%$.

$$\Delta T = \frac{283.15^2\text{ K}^2 \cdot 461\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}}{2.5 \cdot 10^6\text{ J kg}^{-1}} \left(\frac{1\text{ hPa}}{1000\text{ hPa}} + \frac{0.1}{0.6} \right) = 2.48\text{ K}$$

13. Čest zraka adijabatskim dizanjem postaje zasićena na 700 hPa. Izračunajte parcijalni tlak vodene pare pri tlu ako je prizemni tlak 1000 hPa, a temperatura 280 K.

Rješenje:

$p_1 = 1000\text{ hPa}$
 $T_1 = 280\text{ K}$
 $p_2 = p_k = 700\text{ hPa}$

$e_1 = ?$

Adijabatski procesi (v. izvod u 16. zadatku): $\left(\frac{T_k}{T_1} \right) = \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{R/c_p}$, $\frac{p_k}{p_1} = \frac{e_k}{e_1}$

$$T_k = T_0 \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{R/c_p} = 252.88\text{ K}$$

$$e_k = e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_k} \right)} = 1.25\text{ hPa}$$

$$\frac{p_k}{p_1} = \frac{e_k}{e_1} \rightarrow \left(\frac{T_k}{T_1} \right) = \left(\frac{e_k}{e_1} \right)^{R/c_p}$$

$$e_1 = \frac{p_1}{p_k} e_k = 1.786 \text{ hPa}$$

14. Kolika je temperatura rosišta ako je tlak vodene pare 16 mbar?

Rješenje:

$$e = 16 \text{ mbar}$$

$$\tau = T_d = ?$$

Za rosište vrijedi: $e = e_s$

$$\begin{aligned} e_s &= e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)} \\ e &= e_s, \quad T = \tau \\ e &= e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right)} \rightarrow \frac{e}{e_{s0}} = e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right)} / \ln \\ \ln \frac{e}{e_{s0}} &= \frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right) \\ \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{T_0} - \frac{R_v}{L_{lv}} \ln \frac{e}{e_{s0}} = \frac{1}{273.15 \text{ K}} - \frac{461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{2.5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}} \cdot \ln \frac{16 \text{ hPa}}{6.11 \text{ hPa}} = 0.00348 \text{ K}^{-1} \\ \tau &= 287.07 \text{ K} \end{aligned}$$

15. Čest vlažnog zraka pri tlu ima temperaturu od 20 °C. Adijabatskim dizanjem čest postaje zasićena na izobarnoj plohi od 800 mbar. Nađite temperaturu rosišta ako je prizemni tlak 1000 mbar.

Rješenje:

$$p_1 = 1000 \text{ hPa}$$

$$T_1 = 280 \text{ K}$$

$$p_2 = p_k = 800 \text{ hPa}$$

$$\tau = T_d = ?$$

Adijabatski proces: $\delta q = c_p dT - \alpha dp = 0$

$$c_p dT = \alpha dp, \quad p\alpha = RT$$

$$c_p dT = \frac{RT}{p} dp$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} / \int_1^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{R/c_p}$$

Za adijabatske procese u kojima je $r = \text{const.}$

$$\begin{aligned} r &= \frac{m_v}{m_d} = \text{const.} \rightarrow r_1 = r_k \rightarrow \frac{\varepsilon e_1}{p_1 - e_1} = \frac{\varepsilon e_k}{p_k - e_k} / \cdot \frac{1}{\varepsilon} \frac{p_k - e_k}{e_1} \\ \frac{p_k - e_k}{p_1 - e_1} &= \frac{e_k}{e_1} / \cdot \frac{p_1 - e_1}{e_k} \\ \frac{p_k}{e_k} - 1 &= \frac{p_1}{e_1} - 1 \rightarrow \frac{p_k}{e_k} = \frac{p_1}{e_1} \end{aligned}$$

Za $T_2 = T_k$, i $p_2 = p_k$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_k}{T_1} \right) &= \left(\frac{p_k}{p_1} \right)^{R/c_p} \rightarrow \left(\frac{T_k}{T_1} \right) = \left(\frac{e_k}{e_1} \right)^{R/c_p} \\ T_k &= 275.05 \text{ K} \end{aligned}$$

$$e_2 = e_k = e_s(T_2) = e_{s0} \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_k} \right)}$$

$$e_k = 7.082 \text{ hPa}$$

$e_k = e_s(T_k)$ je maksimalni parcijalni tlak vodene pare pri temperaturi T_k i tlaku p_k
 e_1 je stvarni tlak vodene pare na tlaku 1000 hPa i temperaturi 20 °C i mora biti jednak maksimalnom tlaku vodene pare na 1000 hPa i temperaturi τ

$$\frac{T_k}{T_1} = \left(\frac{e_k}{e_1} \right)^{R/c_p} \rightarrow \left(\frac{T_k}{T_1} \right)^{c_p/R} = \frac{e_k}{e_1}$$

$$e_1 = e_k \left(\frac{T_1}{T_k} \right)^{c_p/R} = 8.852 \text{ hPa}$$

$$e_1(T_1, p_1) = e_s(\tau, p_1) = 6.11 \cdot e^{\frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$\ln \frac{e_s}{6.11} = \frac{L_{lv}}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right)$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_0} - \frac{R_v}{L_{lv}} \ln \frac{e}{6.11} = \frac{1}{273.15 \text{ K}} - \frac{461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}}{2.5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}} \cdot \ln \frac{8.852 \text{ hPa}}{6.11 \text{ hPa}}$$

$$\tau = 287.35 \text{ K} = 5.2 \text{ °C}$$

16. Čest zraka temperature 17 °C i apsolutne vlage 7 g m³ adijabatski se diže. Za koliko će se smanjiti apsolutna vlaga ako se čest podigne za 100 m, a pritom nema razmjene vlage s okolinom?

Rješenje:

$$T = 17 \text{ °C} = 290.15 \text{ K}$$

$$a = 7 \text{ g m}^3$$

$$\Delta z = 100 \text{ m}$$

$$dq = 0$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta z} = ?$$

$$a = \frac{e}{R_v T} / \ln$$

$$\ln a = \ln e - \ln R_v - \ln T / d$$

$$\frac{da}{a} = \frac{de}{e} - \frac{dT}{T}$$

Specifična vlažnost $q = \text{const.}$

$$q = \frac{\varepsilon e}{p + (\varepsilon - 1)e} \approx \frac{\varepsilon e}{p} / \ln$$

$$\ln q = \ln \varepsilon + \ln e - \ln p / d$$

$$\frac{dq}{q} = \frac{de}{e} - \frac{dp}{p} = 0 \rightarrow \frac{de}{e} = \frac{dp}{p}$$

$$\frac{da}{a} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} / : dz$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dz} = \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = \frac{1}{\rho R T} (-\rho g) - \frac{1}{T} \frac{dT}{dz}$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dz} = \frac{1}{T} \left(-\frac{g}{R} - \frac{dT}{dz} \right)$$

Adijabatičko dizanje: $\dot{d}q = c_p dT - \alpha dp = 0$

$$c_p dT = \alpha dp, \quad \alpha = \frac{RT}{p}$$

$$\begin{aligned}
c_p dT &= \frac{RT}{p} dp \\
\frac{dT}{T} &= \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} = \frac{R}{c_p p} \frac{dp}{dz} dz \\
\frac{dT}{T} &= \frac{R}{c_p p} (-\rho g) dz = -\frac{R\rho g}{c_p \rho RT} dz = -\frac{g}{c_p T} dz \\
\frac{dT}{dz} &= -\frac{g}{c_p} = -1^\circ\text{C}/100 \text{ m} \\
\frac{\Delta a}{\Delta z} &= -\frac{a}{T} \left(-\frac{g}{R} - \frac{g}{c_p} \right) = -\frac{7 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^3}{290.15 \text{ K}} \left(\frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} - \frac{9.81 \text{ m s}^{-2}}{1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} \right) \\
\frac{\Delta a}{\Delta z} &= -0.06 \text{ g m}^3 / 100 \text{ m}
\end{aligned}$$

8 Meteorološki termodinamički dijagrami

Termodinamički dijagram je karta čije su koordinate varijable stanja. Postoji više vrsta termodinamičkih dijagrama koji se koriste u meteorologiji, a međusobno se razlikuju po izboru koordinatnih osi. Matematičkim transformacijama moguće je iz jedne vrste termodinamičkog dijagrama dobiti drugi. Svi meteorološki termodinamički dijagrami sadrže izobare, izoterme, izolinije maksimalnog omjera miješanja, suha i mokre adijabate.

Stüve dijagram

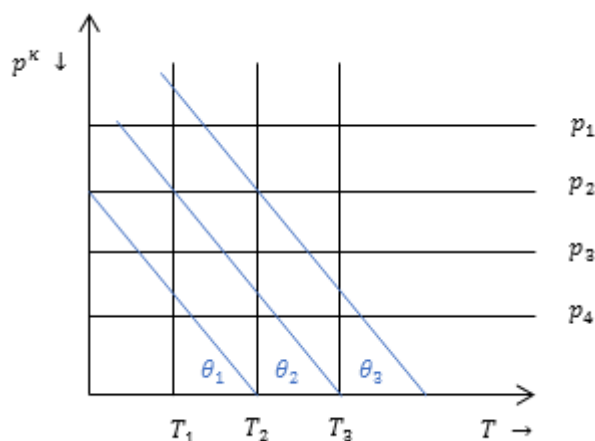
Stüve dijagram ili adijabatički dijagram je termodinamički dijagram koji se temelji na adijabatičkoj jednadžbi:

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}, \quad (8.1)$$

gdje je $p_0 = 1000 \text{ hPa}$.

Jednadžba (8.1) pokazuje da za danu vrijednost potencijalne temperature θ postoji linearna veza između temperature T i p^{R/c_p} . Adijabatički procesi prate pravocrtnu liniju na termodinamičkom dijagramu s koordinatama T u ovisnosti o p^κ , gdje je $\kappa = \frac{R}{c_p}$.

Linija duž koje je $\theta = \text{const.}$ zove se adijabata.



Slika 8.1: Stüve dijagram ili adijabatički dijagram gdje su koordinatne osi temperatura T i p^κ . Na dijagramu su označene izobare, izoterme i adijabate. Strelicama uz osi su prikazani smjerovi u kojima raste tlak i temperatura.

Tefigram

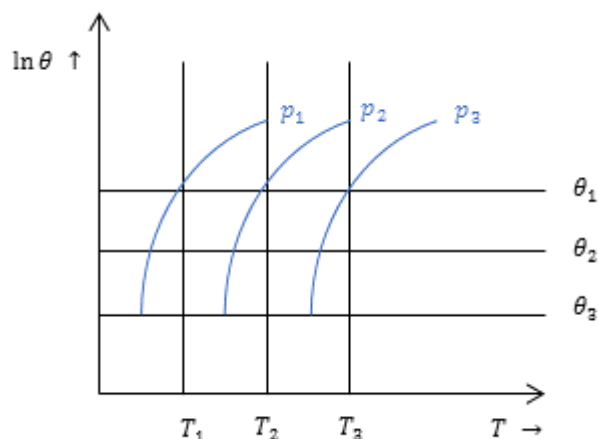
Naziv za tefigram je nastao od originalnog imena „ $T - \phi$ – dijagram“, gdje je jedna os na dijagramu temperatura T , a druga entropija ϕ .

Iz definicije entropije slijedi da je ukupna toplina u kružnom procesu jednaka:

$$\oint dq = \oint T ds = \oint T \cdot \frac{1}{T} (c_p dT - \alpha dp) \quad (8.2)$$

$$\oint c_p dT - \alpha dp = \oint c_p T d(\ln \theta) = c_p \oint T d(\ln \theta) \quad (8.3)$$

Tefigram je karta s koordinatama T i $\ln \theta$. Tefigram se najčešće rotira tako da su izobare približno horizontalne.



Slika 8.2: Tefigram je termodinamički dijagram gdje su koordinatne osi T i $\ln \theta$. Na dijagramu su označene izobare, izoterme i adijabate. Strelicama uz osi su prikazani smjerovi u kojima raste temperatura i potencijalna temperatura.

Emagram

Emagram (eng. *energy per mass diagram*) je tzv. pravi termodinamički dijagram u kojem je područje unutar zatvorene krivulje proporcionalno energiji (ili radu) uz istu konstantu proporcionalnosti na cijelom dijagramu.

Najčešće varijable stanja za opis atmosfere su tlak i temperatura. Moguće je konstruirati pravi termodinamički dijagram s koordinatama p i T .

$$dw = pd\alpha = R_d dT - \alpha dp \quad (8.4)$$

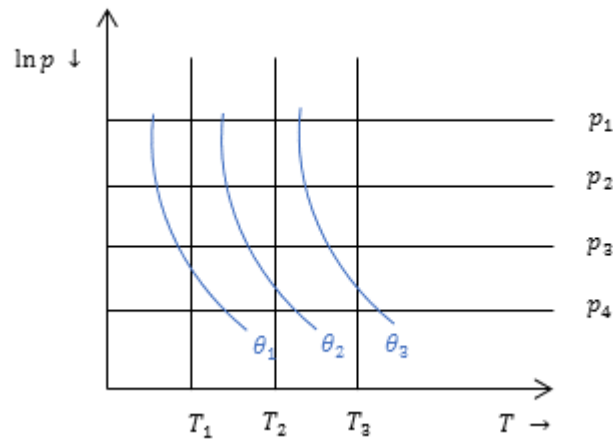
Za reverzibilni proces:

$$\oint dw = \oint R_d dT - \oint R_d T \frac{dp}{p} \quad (8.5)$$

$$\oint R_d dT = 0 \quad (8.6)$$

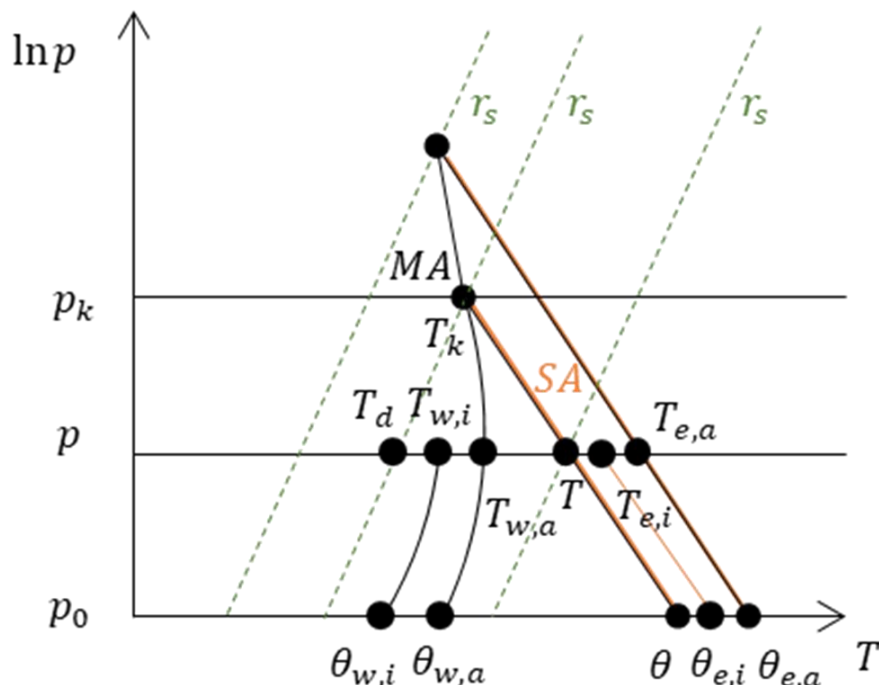
$$\oint dw = -R \oint T d(\ln p) \quad (8.7)$$

gdje rezultat upućuje na ovisnost T o $\ln p$.



Slika 8.3: Emagram je termodinamički dijagram gdje su koordinatne osi T i $\ln p$. Na dijagramu su označene izobare, izoterme i adijabate. Strelicama uz osi su prikazani smjerovi u kojima raste temperatura i tlak.

Na emagramu su izolinije tlaka i temperature okomite. Na kosom emagramu (eng. *skew-T*), koji se najčešće koristi u praksi, linije tlaka i temperature nisu pod pravim kutom.



Slika 8.4: Mokroadijabatski procesi na emagramu. MA je mokra adijabata, SA suha adijabata, r_s maksimalni omjer miješanja, $T_{e,a}$ ekvivalentna adijabatska temperatura, $T_{e,i}$ ekvivalentna izobarna temperatura, T_d rosište, $T_{w,a}$ temperatura mokrog termometra u adijabatskom procesu, $T_{w,i}$ temperatura mokrog termometra u izobarnom procesu, θ_w potencijalna temperatura mokrog termometra, $\theta_{e,a}$ ekvivalentna adijabatska potencijalna temperatura.

Psihrometrijska formula:

$$T - T_w \approx \frac{\varepsilon L_{lv}(e_s - e)}{p c_{pd}}. \quad (8.8)$$

Ekvivalentna adijabatska temperatura $T_{e,a}$ je temperatura koju bi čest imala kad bi se sva vlaga u njoj kondenzirala, a sva latentna toplina utrošila na zagrijavanje česti,

$$T_{e,a} = T \exp\left(\frac{r_s L_{lv}}{c_{pd} T}\right) \approx T \left(1 + \frac{r_s L_{lv}}{c_{pd} T}\right). \quad (8.9)$$

Ekvivalentna potencijalna temperatura $\theta_{e,a}$ je konzervativno svojstvo mokroadijabatskog procesa:

$$\theta_{e,a} = T_{e,a} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p}. \quad (8.10)$$

8.1 Zadatci

1. Zrak ima relativnu vlažnost 50% i omjer miješanja 10 g kg^{-1} . Ako je tlak zraka 1000 hPa odredite:
 - a) temperaturu mokrog termometra
 - b) visinu nivoa kondenzacije
 - c) temperaturu zraka.

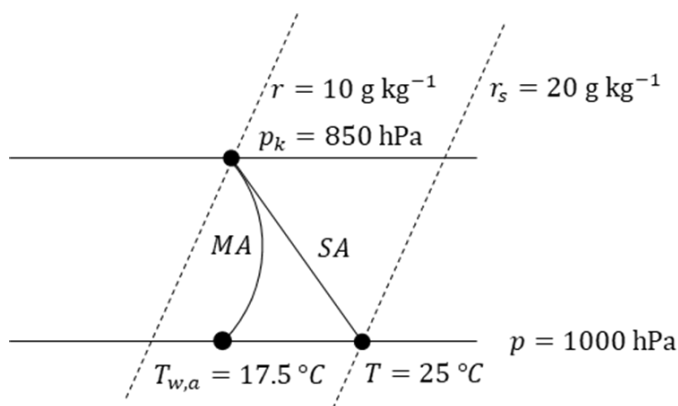
Rješenje:

$$u = 50\% \text{ K}$$

$$r = 10 \text{ g kg}^{-1}$$

$$p = 1000 \text{ hPa}$$

$$T_{w,a} = ? \quad p_k = ? \quad T = ?$$



$$u = \frac{r}{r_s} \rightarrow r_s = \frac{r}{u} = \frac{10 \text{ g kg}^{-1}}{0.5} = 20 \text{ g kg}^{-1}$$

Najprije određujemo temperaturu zraka T , tako da nađemo sjecište maksimalnog omjera miješanja $r_s = 20 \text{ g kg}^{-1}$ i tlaka $p = 1000 \text{ hPa}$. Iz emagrama slijedi da je temperatura zraka $T \approx 25 \text{ °C}$.

Zatim se od nađene temperature zraka T penjemo suhoadijabatskom stopom do omjera miješanja $r = 10 \text{ g kg}^{-1}$ i tu se nalazi nivo kondenzacije $p_k = 850 \text{ hPa}$.

S nivoa kondenzacije se mokrom adijabatom spustimo do početnog tlaka $p = 1000 \text{ hPa}$, gdje se očitava vrijednost temperature mokrog termometra $T_{w,a} = 17.5 \text{ °C}$.

2. Temperatura mokrog termometra je 10 °C . Tlak zraka je 1000 hPa , a nivo kondenzacije je na 900 hPa . Odredite relativnu vlažnost i virtualnu temperaturu.

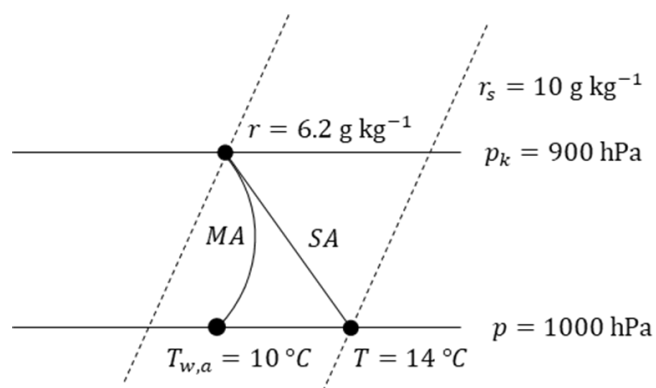
Rješenje:

$$T_{w,a} = 10 \text{ °C}$$

$$p = 1000 \text{ hPa}$$

$$p_k = 900 \text{ hPa}$$

$$u = ? \quad T_V = ?$$



Od temperature mokrog termometra $T_{w,a} = 10 \text{ °C}$ mokrom adijabatom se penje do nivoa kondenzacije $p_k = 900 \text{ hPa}$ i tu se očitava vrijednost omjera miješanja: $r = 6.2 \text{ g kg}^{-1}$.

S nivoa kondenzacije se po suhoj adijabati spušta do početnog tlaka zraka $p = 1000 \text{ hPa}$, gdje se očitava vrijednost temperature zraka $T = 14 \text{ °C}$ i pripadni maksimalni omjer miješanja $r_s = 10 \text{ g kg}^{-1}$.

Relativna vlažnost se izračuna iz očitanih vrijednosti:

$$u = \frac{r}{r_s} = \frac{6.2}{10} = 0.62 = 62\%$$

Virtualna temperatura:

$$T_V = T(1 + 0.605 r) = 287.15 \text{ K} (1 + 0.605 \cdot 6.2 \cdot 10^{-3}) = 288 \text{ K}$$

3. Pri tlaku od 900 hPa temperatura zraka je 15 °C , a temperatura mokrog termometra je 10 °C . Odredite nivo kondenzacije.

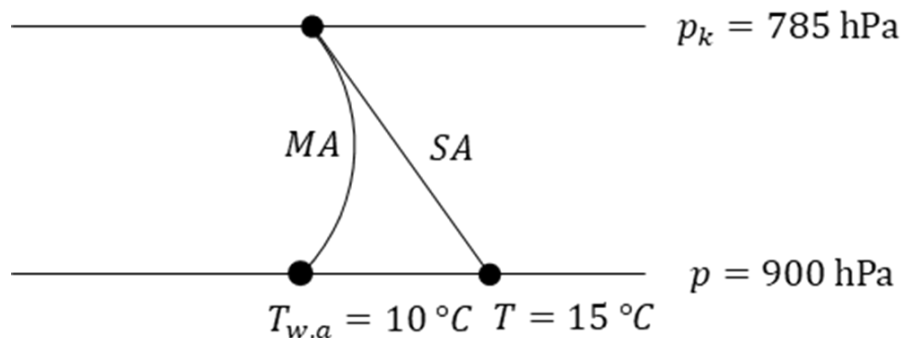
Rješenje:

$$p = 900 \text{ hPa}$$

$$T = 15 \text{ °C}$$

$$T_{w,a} = 10 \text{ °C}$$

$$p_k = ?$$



Nivo kondenzacije se nalazi na sjecištu mokre adijabate na kojoj se nalazi temperatura mokrog termometra $T_{w,a}$ i suhe adijabate na kojoj se nalazi temperatura zraka T : $p_k = 785$ hPa.

4. Čest vlažnog zraka pri tlu ima temperaturu 20 °C. Adijabatičkim dizanjem čest postaje zasićena na 800 hPa. Kolika je temperatura rosišta ako je tlak 1000 hPa?

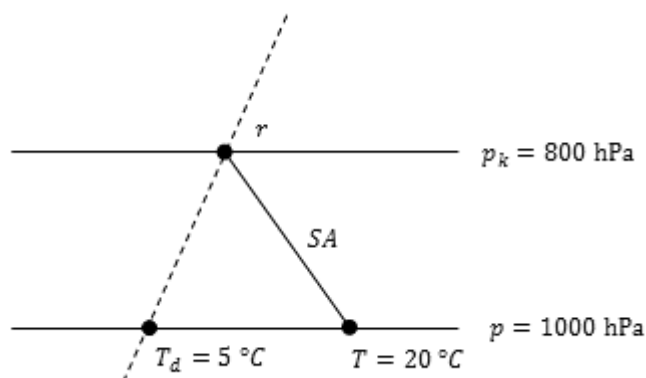
Rješenje:

$$p_k = 800 \text{ hPa}$$

$$T = 20 \text{ °C}$$

$$p = 1000 \text{ hPa}$$

$$T_d = ?$$



S nivoa početnog tlaka 1000 hPa i temperature zraka 20 °C suhom adijabatom se penjemo do nivoa kondenzacije 800 hPa. Tu je temperatura jednaka 2 °C. Zatim se prateći izoliniju omjera miješanja spušta do početnog tlaka 1000 hPa, gdje se očitava temperatura rosišta: $T_d = 5$ °C.

5. Temperatura vlažnog zraka je 280 K, tlak 900 hPa, a nivo kondenzacije se nalazi na 820 hPa. Odredite relativnu vlagu i temperaturu mokrog termometra.

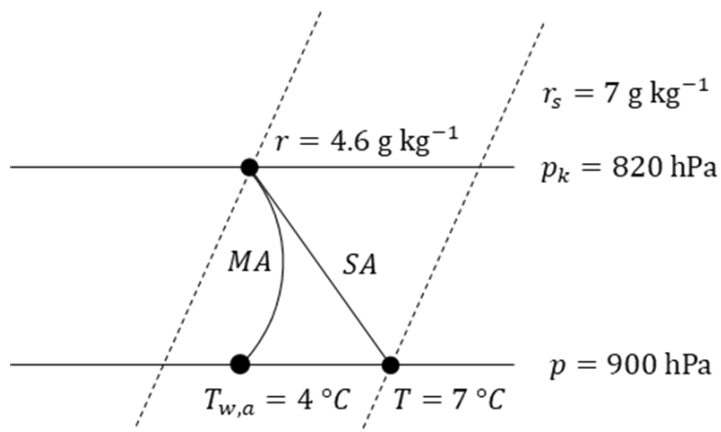
Rješenje:

$$T = 280 \text{ K} = 7 \text{ °C}$$

$$p = 900 \text{ hPa}$$

$$p_k = 820 \text{ hPa}$$

$$u = ? \quad T_{w,a} = ?$$



Na početnom tlaku 900 hPa i temperaturi 7 °C maksimalni omjer miješanja je $r_s = 7 \text{ g kg}^{-1}$. Penjući se po suhoj adijabati do nivoa kondenzacije 820 hPa očita se omjer miješanja $r = 4.6 \text{ g kg}^{-1}$. Iz toga slijedi da je relativna vlažnost jednaka:

$$u = \frac{r}{r_s} = \frac{4.6}{7} = 65.7\%$$

S nivoa kondenzacije se po mokroj adijabati spusti do početnog tlaka 900 hPa i očita se temperatura mokrog termometra: $T_{w,a} = 4 \text{ °C}$.

6. Čest vlažnog zraka nalazi se pri tlaku 920 hPa i temperaturi 11 °C. Nivo kondenzacije je 800 hPa. Nađite temperaturu rosišta i temperaturu mokrog termometra.

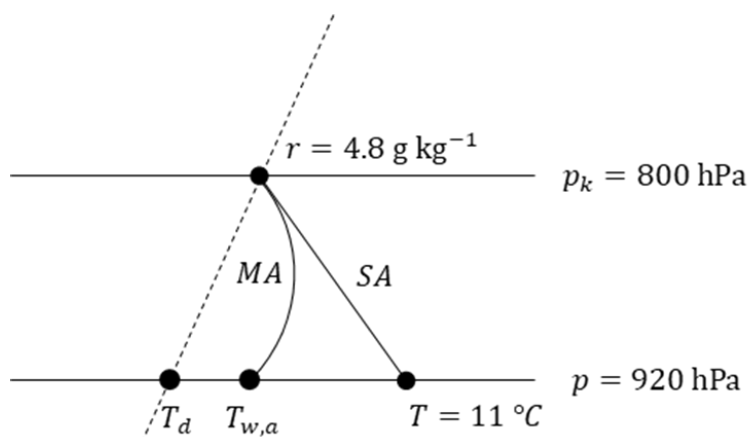
Rješenje:

$$T = 11 \text{ °C}$$

$$p = 920 \text{ hPa}$$

$$p_k = 800 \text{ hPa}$$

$$T_d = ? \quad T_{w,a} = ?$$



Od početne temperature 11 °C i tlaka 920 hPa po suhoj adijabati se penje do nivoa kondenzacije na 800 hPa. Na sjecištu suhe adijabat i nivoa kondenzacije omjer miješanja jednak je $r = 4.8 \text{ g kg}^{-1}$. Zatim se tom izoliniom omjera miješanja spušta do početnog tlaka i očita se temperatura rosišta: $T_d = 2 \text{ °C}$.

Od početne temperature $11\text{ }^{\circ}\text{C}$ i tlaka 920 hPa po suhoj adijabati se penje do nivoa kondenzacije na 800 hPa . Od te se točke mokrom adijabatom spušta do početnog tlaka i očita se temperatura mokrog termometra: $T_{w,a} = 6.8\text{ }^{\circ}\text{C}$.

7. Čest zraka ima početnu temperaturu $15\text{ }^{\circ}\text{C}$, a je rosište na 2°C . Adijabatički se podiže s nivoa 1000 hPa . Nađite nivo kondenzacije i temperaturu na tom nivou. Ako se čest podigne za daljnjih 200 hPa , kolika će joj tada biti temperatura? Koliko se vode kondenziralo pri podizanju?

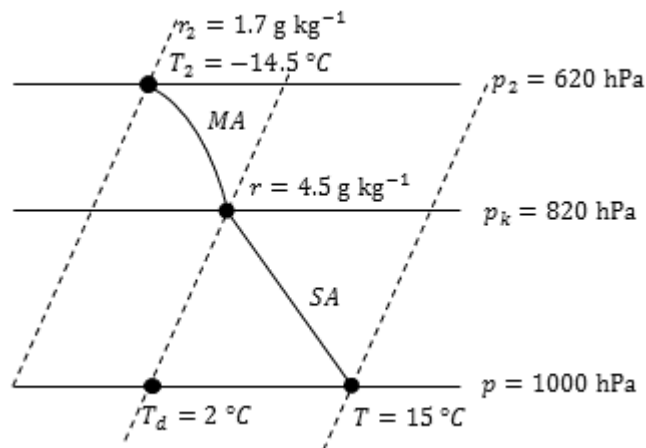
Rješenje:

$$T = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T_d = 2\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$p = 1000\text{ hPa}$$

$$T_k = ? \quad p_k = ? \quad T_2(p_k + 200\text{ hPa}) = ? \quad \Delta r = ?$$



Na sjecištu suhe adijabate koja ima ishodište na početnoj temperaturi $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ i izolinije omjera miješanja koji ima ishodište u temperaturi rosišta 2°C , nalazi se nivo kondenzacije: $p_k = 820\text{ hPa}$, gdje je $T_k = -0.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ i $r_1 = 4.5\text{ g kg}^{-1}$.

Ako se čest podigne za još 200 hPa po mokroj adijabati, doći će na nivo $p_2 = 620\text{ hPa}$, a temperatura na tom nivo iznosi $T_2 = -14.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ i $r_2 = 1.7\text{ g kg}^{-1}$.

Pri podizanju česti s 820 na 620 hPa po svakom kilogramu zraka kondenziralo se:

$$\Delta r = r_1 - r_2 = 4.5\text{ g kg}^{-1} - 1.7\text{ g kg}^{-1} = 2.8\text{ g kg}^{-1}$$

8. U nekoj točki na navjetrinskoj strani planine izmjerene su vrijednosti: $t = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$, $u = 90\%$, $p = 900\text{ hPa}$. Kolika je temperatura zraka na početnom tlaku nakon što zrak prijeđe preko planine visoke 2000 m ? Tlak na vrhu planine iznosi 800 hPa .

Rješenje:

$$T_1 = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$$

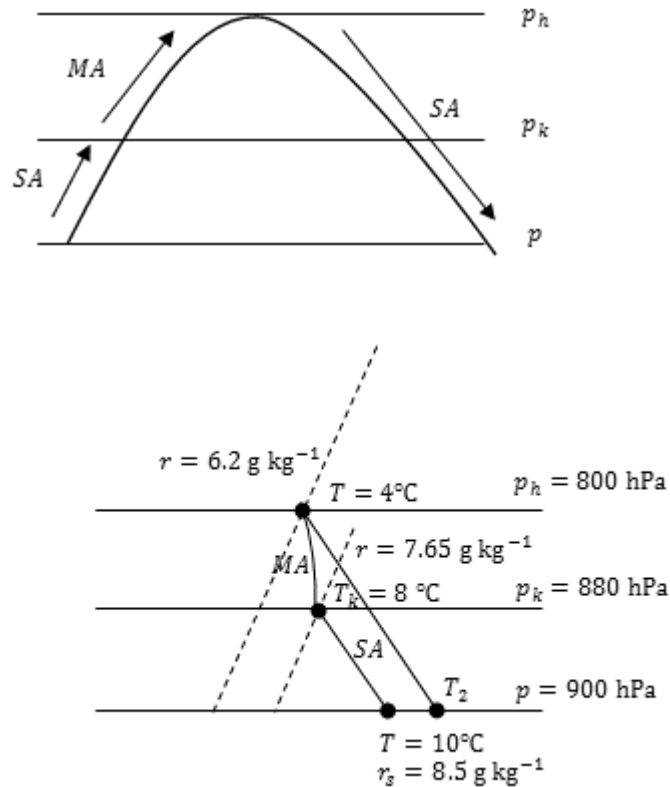
$$u = 90\%$$

$$p = 900\text{ hPa}$$

$$h = 2000\text{ m}$$

$$p_h = 800\text{ hPa}$$

$$T_2 = ?$$



Na emagramu se najprije pronađe sjecište tlaka (900 hPa) i temperature (10 °C) i u toj se točki očita $r_s = 8.5 \text{ g kg}^{-1}$. Omjer miješanja se izračuna pomoću zadanog iznosa relativne vlažnosti i očitanoj maksimalnoj omjera miješanja:

$$u = \frac{r}{r_s} \rightarrow r = ur_s = 0.9 \cdot 8.5 \text{ g kg}^{-1} = 7.65 \text{ g kg}^{-1}$$

Zatim se po suhoj adijabati penje do sjecišta suhe adijabate i omjera miješanja kojeg smo izračunali u prethodnom koraku. Na tom sjecištu se nalazi nivo kondenzacije: $p_k = 880 \text{ hPa}$.

S nivoa kondenzacije se po mokroj adijabati treba uspeti do tlaka na vrhu planine (800 hPa) i od te točke se spustiti po suhoj adijabati do početnog tlaka (900 hPa). Pri početnom tlaku se očita temperatura zraka nakon prelaska planine: $T_2 = 13 \text{ °C}$.

9 Pomoćni izvori i materijali

Pojmovnik

http://jadran.gfz.hr/pojmovnik_e.html

DWD sinoptičke karte

<http://www1.wetter3.de/animation.html>

Radiosondažni podaci

<http://weather.uwyo.edu/upperair/sounding.html>

https://meteo.hr/podaci.php?section=podaci_mjerenja¶m=sondaze

<https://www.weather.gov/upperair/factsheet>

MetEd: Principi konvekcije, uzgon, CAPE

https://www.meted.ucar.edu/sign_in.php?go_back_to=/mesoprim/cape/index.htm

Kosi emagram

<http://tornado.sfsu.edu/geosciences/classes/m201/buoyancy/SkewTMastery/mesoprim/skewt/intro.htm>

https://www.meted.ucar.edu/training_module.php?id=225

http://jadran.gfz.hr/pojmovnik_t.html#termo_dijagram

https://www.wikiwand.com/en/Skew-T_log-P_diagram

<https://youtu.be/7p7c85hhgOo>

Vizualizacija strujanja u atmosferi i oceanu

<https://earth.nullschool.net/>

MetPy – Python paket za rad s meteorološkim podacima

<https://unidata.github.io/MetPy/latest/index.html>