

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

drugi kolokvij — 3. veljače 2014.

**Zadatak 1.** (6 bodova) Izračunajte limese

(a) (3 boda)

$$\lim_n \frac{\ln\left(2^{\frac{1}{n}}\right) - \ln(n^2)}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}};$$

(b) (3 boda)

$$\lim_n \left( \sqrt[3]{\frac{\sin n}{n} + n^3} - n^2 - \sqrt[3]{n^3 + n} \right).$$

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

drugi kolokvij — 3. veljače 2014.

**Zadatak 2.** (6 bodova) Niz realnih brojeva  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  zadovoljava  $x_1 = 3$  i jednakost

$$\frac{2}{x_{n+1} - 3} - \frac{2}{x_n - 2} = 1$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Pokažite da taj niz konvergira i izračunajte mu limes.

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

drugi kolokvij — 3. veljače 2014.

**Zadatak 3.** (6 bodova) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \operatorname{sh} \left( \frac{(-1)^{n-2m}(m^2 - 1)}{2nm^2 + 4nm - 3m^2 - 6m} \right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

drugi kolokvij — 3. veljače 2014.

**Zadatak 4.** (7 bodova)

(a) (5 bodova) Izračunajte limese (bez upotrebe L'Hôpitalovog pravila):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e + x^2) - \cos x}{e^{x^2} - \cos x} \qquad \lim_{x \rightarrow 1} (3^x - 2^x)^{\frac{1}{x-1}}.$$

(b) (2 boda) Neka je  $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$  rastuća funkcija takva da je  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(2t)}{f(t)} = 1$ .Dokažite da je tada  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(at)}{f(t)} = 1$  za sve  $a \geq 1$ .

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

drugi kolokvij — 3. veljače 2014.

**Zadatak 1.** (6 bodova) Izračunajte limese

(a) (3 boda)

$$\lim_n \frac{\ln(n!) - \ln(n^n)}{n};$$

(b) (3 boda)

$$\lim_n \left( \sqrt[3]{n^2 + n^3} - \sqrt[3]{\frac{n}{e^n - 1} + n^{\frac{3}{2}} + n^3} \right).$$

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

drugi kolokvij — 3. veljače 2014.

**Zadatak 2.** (6 bodova) Niz realnih brojeva  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  zadovoljava  $x_1 = 1$  i jednakost

$$x_{n+1}^3 = 2x_n + 4$$

za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Pokažite da taj niz konvergira i izračunajte mu limes.

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

drugi kolokvij — 3. veljače 2014.

**Zadatak 3.** (6 bodova) Odredite, ako postoje, infimum i supremum skupa

$$B = \left\{ \operatorname{Arsh} \left( \frac{(-1)^{m-4n}(1-n^2)}{3mn^2 - 5n^2 + 9nm - 15n} \right) : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

drugi kolokvij — 3. veljače 2014.

**Zadatak 4.** (7 bodova)

(a) (5 bodova) Izračunajte limese (bez upotrebe L'Hôpitalovog pravila):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e+x) - e^x}{\cos^2 x - e^x} \qquad \lim_{x \rightarrow 1} (4^x - 3^x)^{\frac{1}{x-1}}.$$

(b) (2 boda) Pronađite sve neprekidne funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da vrijedi

$$f(0) = 1 \qquad \text{i} \qquad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} \text{ za sve } x \in \mathbb{R}.$$