JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

prvi kolokvij — 21. studenog 2016.

Zadatak 1. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije:

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt[16]{x - \sqrt[4]{x}}}{\sin x \cdot \cos x}\right) + \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{th} x)}.$$

Rješenje:

$$\langle 1, \frac{\pi}{2}\rangle \cup \bigcup_{k\geq 1} \langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\rangle$$

JMBAG　　　　IME I PREZIME　　　　BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

prvi kolokvij — 21. studenog 2016.

Zadatak 2. (6 bodova)

(a) Skicirajte grafove funkcija $h(x) = \operatorname{Arch}\big(\operatorname{ch}(x)\big)$ i $g(x) = \operatorname{ch}\big(\operatorname{Arch}(x)\big)$ na njihovim prirodnim domenama.

(b) Odredite eksplicitne formule za inverze restrikcija funkcije

$$f(x) = \operatorname{ch}\Big(\frac{\sin x}{\sin x - 2}\Big)$$

na maksimale (zatvorene) intervale njezinog strogog pada na intervalu $[0, \pi]$.

Rješenje.

(a) $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $\qquad g(x) = x,\ x \geq 1.$

(b)

- $f\Big|_{[0,\pi/2]}$ strogo raste,
- $f\Big|_{[\pi/2,\pi]}$ strogo pada.

$$f\Big|_{[\pi/2,\pi]}^{-1} : [\pi/2, \pi] \to [1, \operatorname{ch}(1)], \quad (f\Big|_{[\pi/2,\pi]})^{-1}(y) = \pi + \arcsin\Big(-2 + \frac{2}{\operatorname{Arch}(y) + 1}\Big).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

prvi kolokvij — 21. studenog 2016.

Zadatak 3. (7 bodova)

a) Odredite intervale rasta i pada funkcije $h(x) = x^{200} - x^{100}$ na $\mathbb{R}$.

b) Postoji li nekonstantni polinom p s pozitivnim koeficijentima takav da je funkcija $x \mapsto p(x^2) - p(x)$ padajuća na $[1, +\infty)$?

c) Postoji li strogo rastuća funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ takva da je funkcija $x \mapsto f(x) - \sqrt{f(x)}$ strogo padajuća na $\mathbb{R}$?

Skica rješenja.

(a) Kompozicija $x \mapsto x^2 - x$ i $x \mapsto x^{100}$.

(b) Za $1 \leq x < y$ i $n \in \mathbb{N}$ imamo $y^{2n} - x^{2n} = (y^n + x^n)(y^n - x^n) > y^n - x^n$, pa je $x \mapsto x^{2n} - x^n$ strogo rastuća na $[1, +\infty)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako polinom p ima pozitivne koeficijente i nekonstantan je, takav polinom ne postoji.

(c) Npr. $f(x) = \frac{1}{4\pi}\arctan(x) + \frac{1}{8}$, $f : \mathbb{R} \to (0, 1/4)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

prvi kolokvij — 21. studenog 2016.

Zadatak 4. (6 bodova)

a) Odredite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{3n+1}\sqrt{\sqrt{n}+1}}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+19}.$$

b) Neka je

$$a_n = \frac{\sqrt{n}-11}{\sqrt{n}+7}.$$

Da li je taj niz konvergentan? Ako jest, dokažite to direktno iz definicije limesa.

Rješenje.

a) Npr. po teoremu o sendviču pokaže se da je traženi limes jednak 0.

b) Očito je $\lim_n a_n = 1$.
Neka je $\epsilon > 0$. Stavimo $n_0 = \left\lfloor \frac{18^2}{\epsilon^2} \right\rfloor + 1$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

prvi kolokvij — 21. studenog 2016.

Zadatak 1. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije:

$$f(x) = \ln\left(-\frac{\sqrt[24]{x-\sqrt[3]{x}}}{\sin x \cdot \cos x}\right) + \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot (\operatorname{th} x - 1)}.$$

Rješenje.

$$(\langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle) \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle \frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\rangle\right) = \langle -1, 0\rangle \cup \bigcup_{k\geq 0} \langle \frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\rangle$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

prvi kolokvij — 21. studenog 2016.

Zadatak 2. (6 bodova)

(a) Odredite $f^{-1}[0,1]$, ako je $f(x) = \mathrm{Arch}\big(\mathrm{ch}(x)\big)$.

(b) Odredite eksplicitne formule za inverze restrikcija funkcije

$$h(x) = \mathrm{ch}\Big(\frac{\cos x - 1}{\cos x + 2}\Big)$$

na maksimalne (zatvorene) intervale njezinog strogog pada na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Rješenje.

(a) $f^{-1}([0,1]) = \mathrm{ch}^{-1}(\mathrm{Arch}^{-1}([0,1])) = \mathrm{ch}^{-1}([1, \mathrm{ch}(1)]) = [-1, 1]$.

(b)

- $h\Big|_{[-\pi/2,0]}$ strogo pada,
- $h\Big|_{[0,\pi/2]}$ strogo raste.

$$h\Big|_{[-\pi/2,0]}^{-1} : [-\pi/2, 0] \to [1, \mathrm{ch}(1/2)], \quad (h\Big|_{[-\pi/2,0]})^{-1}(y) = -\arccos\Big(-2 + \frac{3}{1 + \mathrm{Arch}(y)}\Big).$$

JMBAG — IME I PREZIME — BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

prvi kolokvij — 21. studenog 2016.

Zadatak 3. (7 bodova)

a) Odredite intervale rasta i pada funkcije $h(x) = x^{50} - x^{25}$ na $\mathbb{R}$.

b) Postoji li nekonstantni polinom p s negativnim koeficijentima takav da je funkcija $x \mapsto p(x^2) - p(x)$ rastuća na $[1, +\infty)$?

c) Postoji li strogo padajuća funkcija $f : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ takva da je funkcija $x \mapsto f(x) - \sqrt{f(x)}$ strogo rastuća na $\mathbb{R}$?

Skica rješenja.

(a) Kompozicija $x \mapsto x^2 - x$ i $x \mapsto x^{25}$.

(b) Za $1 \leq x < y$ i $n \in \mathbb{N}$ imamo $y^{2n} - x^{2n} = (y^n + x^n)(y^n - x^n) > y^n - x^n$, pa je $x \mapsto x^{2n} - x^n$ strogo rastuća na $[1, +\infty)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako polinom p ima pozitivne koeficijente i nekonstantan je, takav polinom ne postoji.

(c) Npr. $f(x) = -\frac{1}{4\pi}\arctan(x) + \frac{1}{8}$, $f : \mathbb{R} \to (0, 1/4)$.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

MATEMATIČKA ANALIZA 1

prvi kolokvij — 21. studenog 2016.

Zadatak 4. (6 bodova)

a) Odredite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{3n-1}\sqrt{\sqrt{n}-1}}{\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}+17}.$$

b) Neka je

$$a_n = \frac{n^2-4}{n^2+15}.$$

Da li je taj niz konvergentan? Ako jest, dokažite to direktno iz definicije limesa.

Rješenja.

a) Npr. po teoremu o sendviču pokaže se da je traženi limes jednak 0.

b) Očito je $\lim_n a_n = 1$.
Neka je $\epsilon > 0$. Stavimo $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{19}{\epsilon}} \right\rfloor + 1$.