

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Rješenja će biti objavljena danas na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do srijede, 31. siječnja 2018. u 21 sat na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u četvrtak, 1. veljače 2018. u 12 sati u prostoriji 006.

**Zadatak 1.** (6 bodova) Neka je  $a > 0$  i neka je  $(x_n)$  niz zadan s

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}.$$

Dokažite da je niz  $(x_n)$  konvergentan i odredite mu limes.

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

## Zadatak 2.

- (a) (5 bodova) U ovisnosti o parametru  $\alpha \in (0, \frac{2}{5}]$ , izračunajte limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{1}{k^{1/5}}\right)}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}.$$

*Napomena.* Nizovi u brojniku i nazivniku su strogo rastući i neograničeni i te tvrdnje nije potrebno dokazivati.

- (b) (2 boda) Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija takva da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ . Je li tada nužno i  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ?  
Obrazložite svoj odgovor.

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

**Zadatak 3.** (6 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{2nm^2 + 4nm - 2n - 3m^2 - 6m + 3}{nm^2 + 2mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \operatorname{ch} \left( 4 - \frac{5}{x} \right) : x \in [1, +\infty) \right\}.$$

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

## Zadatak 4.

(a) (5 bodova) Odredite limes

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}\right)(e^x - e^2)}.$$

(b) (1 bod) Ispitajte postoji li limes funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\lfloor x+1 \rfloor)}{\lfloor x+1 \rfloor}, & \lfloor x+1 \rfloor \neq 0 \\ 0, & \lfloor x+1 \rfloor = 0 \end{cases}$$

u točki  $c = -1$ . Ukoliko postoji, odredite ga.

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Rješenja će biti objavljena danas na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do srijede, 31. siječnja 2018. u 21 sat na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u četvrtak, 1. veljače 2018. u 12 sati u prostoriji 006.

**Zadatak 1.** (6 bodova) Neka je  $a > 0$  i neka je  $(x_n)$  niz zadan s

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{2x_n + 2}.$$

Dokažite da je niz  $(x_n)$  konvergentan i odredite mu limes.

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

## Zadatak 2.

- (a) (5 bodova) U ovisnosti o parametru  $\alpha \in (0, \frac{2}{3}]$ , izračunajte limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{1}{k^{1/3}}\right)}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}.$$

*Napomena.* Nizovi u brojniku i nazivniku su strogo rastući i neograničeni i te tvrdnje nije potrebno dokazivati.

- (b) (2 boda) Neka je  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija takva da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ . Je li tada nužno i  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ?  
Objasnite svoj odgovor.

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

**Zadatak 3.** (6 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{3nm^2 + 3nm - 3n - 4m^2 - 4m + 4}{nm^2 + mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \operatorname{ch} \left( 2 - \frac{3}{x} \right) : x \in [1, +\infty) \right\}.$$

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 29. siječnja 2018.

## Zadatak 4.

(a) (5 bodova) Odredite limes

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \ln\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\ln\left(\frac{x^2+3x+3}{-(x+1)}\right)(e^x - e^{-2})}.$$

(b) (1 bod) Ispitajte postoji li limes funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\lfloor x+1 \rfloor)}{\lfloor x+1 \rfloor}, & \lfloor x+1 \rfloor \neq 0 \\ 0, & \lfloor x+1 \rfloor = 0 \end{cases}$$

u točki  $c = -1$ . Ukoliko postoji, odredite ga.