

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2021.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, te službene formule koje će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Niti u jednom zadatku nije dozvoljena upotreba L'Hôpitalovog pravila.
- Rješenja će biti objavljena na web-stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do ponedjeljka, 8. veljače 2021. na web-stranici kolegija.

Zadatak 1.

- (a) (2 boda) Korištenjem tabličnih limesa pokažite da je za sve $a < 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{a}{n+1}} = 1.$$

- (b) (4 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1}\right)^{2k} k^2}{n^3 + \sum_{k=1}^n k^{\frac{2k}{k+1}}}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2021.

Zadatak 2. (7 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \sin \left(\frac{(-1)^n n m^2 + 2m^2 + (-1)^n n + 2}{2nm^2 + nm + 10m^2 + 5m} \right) : n, m \in \mathbf{N} \right\}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2021.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Koristeći teorem o sendviču odredite limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^{n+1} + 2^{n+2} + 3^{n+3} + \dots + 2021^{n+2021}}.$$

(b) (4 boda) Neka je $f: \mathbf{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ padajuća funkcija, te neka je niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ takav da je $a_1 = 1$ i

$$a_{n+1} = a_n + f(a_n) \quad \text{za sve } n \in \mathbf{N}.$$

Dokažite da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 1. veljače 2021.

Zadatak 4.

- (a) (4 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \ln \cos x^2}{x^7 \operatorname{tg} x}.$$

- (b) (2 boda) Neka je $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funkcija neprekidna u bar jednoj točki takva da vrijedi

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{za sve } x, y \in \mathbf{R}.$$

Dokažite da je f neprekidna na cijelom \mathbf{R} .