

MATEMATIČKA ANALIZA 2

Pisana provjera znanja – zadatci – 24. lipnja 2020.

Zadatak 1.

- (a) (10 bodova) Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Izračunajte $f^{(2020)}(0)$.

- (b) (10 bodova) Izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x^3}.$$

- (c) (10 bodova) Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Dokažite tvrdnju: Ako je f konveksna i omeđena funkcija, onda je ona konstantna.

Zadatak 2.

- (a) (10 bodova) Neka je $f(x) = ax^7 + x^4 + 2x$. Odredite realni broj a za koji funkcija $f'(x)$ ima točno jednu realnu nultočku. Za taj broj a odredite sve realne brojeve x za koje je $f(x) > x^4 + x$.

- (b) (10 bodova) Neka je a realni broj. Odredite prirodnu domenu, nultočke i intervale monotonosti za funkciju

$$f(x) = \ln((x-a)^2).$$

Zadatak 3.

- (a) (10 bodova) Izračunajte integral

$$\int (\cos^2 x - 2 \sin x - 2) \operatorname{ctg} x \, dx.$$

- (b) (10 bodova) Dokažite da integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} \, dx$$

konvergira i odredite njegovu vrijednost.

Zadatak 4.

- (a) (10 bodova) Razvijte u Taylorov red oko točke $c = 1$ funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \ln(x)$$

te odredite radijus konvergencije dobivenog reda.

(b) (10 bodova) Neka je, za svaki prirodan broj n , $a_n = \frac{2n-1}{4n}$, izračunajte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right).$$

(c) (10 bodova) Neka je $a_n = 2^n$, za svaki cijeli broj $n \geq 0$. Odredite sve realne brojeve x za koje red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+x^{a_n}}$$

konvergira. Za sve takve x odredite sumu reda.