

Fizika 2

Termodinamika, valovi i kvantna fizika

Miroslav Požek
Fizički odsjek
Prirodoslovno-matematički fakultet
Sveučilišta u Zagrebu

7. lipnja 2015.

Sadržaj

1	Tekućine	1
1.1	Fluidi	1
1.2	Tlak u tekućini	1
1.2.1	Hidrostatički tlak	1
1.2.2	Uzgon	2
1.2.3	Hidraulički tlak	3
1.3	Napetost površine	3
1.3.1	Granica tekućine i čvrste tvari – močenje	4
1.3.2	Kapilarnost	5
2	Gibanje fluida	6
2.1	Jednadžba kontinuiteta	6
2.2	Bernoullijeva jednadžba	7
2.3	Realni fluidi	9
2.3.1	Viskoznost	9
2.3.2	Protjecanje tekućine kroz cijev	10
2.3.3	Gibanje tijela u viskoznom mediju	11
3	Priroda topline	12
3.1	Toplina i energija	12
3.2	Makroskopsko i mikroskopsko stanje	14
3.3	Osnovni postulat statističke fizike	14
3.4	Lokalne fluktuacije	16
4	Toplinsko međudjelovanje	18
4.1	Toplinska ravnoteža	18
4.2	Uvjet toplinske ravnoteže	19
4.3	Temperatura	20
4.4	Nulti zakon termodinamike	21
4.5	Entropija	22
5	Klasična statistička fizika	25
5.1	Klasična aproksimacija	25
5.2	Ekviparticijski teorem	26
5.3	Toplinski kapacitet	28
5.3.1	Toplinski kapacitet čvrstih tvari	29
5.3.2	Toplinski kapacitet idealnog plina	30
5.4	Tlak idealnog plina	30
5.5	Jednadžbe stanja	32

6	Termodinamika	33
6.1	Rad prilikom promjene volumena	33
6.2	Prvi zakon termodinamike	34
6.3	Gotovo ravnotežni procesi	34
6.4	Neravnotežni procesi	36
6.5	Termodinamička ravnoteža	38
6.6	Drugi zakon termodinamike	38
6.7	Treći zakon termodinamike	40
6.8	Toplinski kapaciteti	41
6.9	Termodinamički potencijali	42
7	Termodinamika idealnog plina	47
7.1	Izotermna ekspanzija	47
7.2	Adijabatska ekspanzija	48
7.3	Izohorni proces	49
7.4	Izobarni proces	50
7.5	Entropija idealnog plina	50
7.6	Smjesa idealnih plinova	53
7.7	Carnotov kružni proces	54
8	Agregatna stanja čiste tvari	56
8.1	Realni plinovi	56
8.2	Ukapljivanje plina	57
8.3	Fazni dijagram	59
9	Prijenosne pojave	61
9.1	Neravnotežna termodinamika	61
9.2	Srednji slobodni put	62
9.3	Viskoznost	63
9.4	Difuzija	64
9.5	Vođenje topline	65
9.6	Prijenos naboja	67
10	Harmonijski oscilator	68
10.1	Slobodni harmonijski oscilator	68
10.2	Prisilno titranje harmonijskog oscilatora	70
11	Titranja sustava s više čestica	71
11.1	Sustav s dvije jednake čestice	71
11.2	Sustav s više čestica	72
11.3	Aproksimacija kontinuuma	73
11.4	Superpozicija modova	74
11.5	Prisilno gibanje sustava s više čestica	75
12	Valno gibanje	76
12.1	Putujući val	76
12.2	Longitudinalni valovi	79
12.2.1	Elastična šipka	79
12.2.2	Stupac zraka	80
12.3	Energija i snaga putujućeg vala	81
12.4	Superpozicija valova	82
12.4.1	Interferencija	83
12.5	Refleksija valova	84

12.6	Valovi u dvije dimenzije	85
13	Zvuk	86
13.1	Val pomaka i akustički tlak	86
13.2	Intenzitet zvuka	86
13.2.1	Decibelna skala	87
13.3	Glazbena vilica	88
13.3.1	Udari	88
13.4	Glazbeni instrumenti	89
13.5	Dopplerov efekt	90
14	Elektromagnetski valovi	93
14.1	Maxwellove jednadžbe	93
14.1.1	Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku	95
14.2	Elektromagnetski valovi	98
14.3	Valna jednadžba za elektromagnetski val	98
14.3.1	Elektromagnetski val je transverzalan	99
14.3.2	Električno i magnetsko polje međusobno su okomita	100
14.4	Veza električne i magnetske komponente	100
14.5	Energija i tlak elektromagnetskog vala	101
14.6	Elektromagnetski valovi u sredstvu	102
14.7	Spektar elektromagnetskih valova	103
15	Geometrijska optika	104
15.1	Zakoni geometrijske optike	104
15.2	Predmet i slika u geometrijskoj optici	105
15.3	Ravno zrcalo	106
15.4	Sferno zrcalo	106
15.4.1	Konkavno zrcalo	106
15.4.2	Jednadžba sfernog zrcala	107
15.4.3	Konstrukcija slike	108
15.4.4	Koeficijent povećanja	108
15.5	Lom svjetlosti	109
15.5.1	Predmet u vodi	109
15.5.2	Planparalelna ploča	109
15.5.3	Prizma	109
15.5.4	Leće	110
15.6	Optički instrumenti	111
16	Fizikalna optika	113
16.1	Interferencija elektromagnetskih valova	113
16.2	Huygensov princip	114
16.3	Youngov pokus	115
16.4	Interferencija na tankom filmu	116
16.5	Newtonovi kolobari	117
16.6	Ogib svjetlosti	118
16.6.1	Difrakcija na pukotini	118
16.6.2	Optička rešetka	120
16.6.3	Refleksijska rešetka	121
16.7	Rendgenska difrakcija	121
16.8	Polarizacija	122
16.8.1	Polarizacija refleksijom	123

16.8.2	Cirkularna polarizacija	124
17	Emisija i apsorpcija elektromagnetskih valova	125
17.1	Stojni elektromagnetski valovi	125
17.2	Toplinsko zračenje	126
17.2.1	Crno tijelo	126
17.2.2	Stefan-Boltzmannov zakon	127
17.2.3	Rayleigh-Jeansova katastrofa	127
17.2.4	Wienov zakon	128
17.3	Planckov zakon zračenja crnog tijela	129
18	Zametci kvantne fizike	130
18.1	Dvojna priroda svjetlosti	130
18.1.1	Zračenje crnog tijela	130
18.1.2	Toplinski kapacitet	130
18.1.3	Fotoelektrični efekt	131
18.1.4	Zakočno zračenje	132
18.1.5	Comptonovo raspršenje	132
18.1.6	Svjetlost je val i čestica	133
18.2	Rutherfordov atom	133
18.3	Bohrov model atoma	134
18.4	Valna priroda čestica	135
18.5	Heisenbergove relacije neodređenosti	136
18.5.1	Gedanken eksperiment	137
18.5.2	Valni paket	137
19	Kvantna fizika	139
19.1	Schrödingerova jednadžba	140
19.1.1	Operatori	140
19.1.2	Postuliranje Schrödingerove jednadžbe	141
19.1.3	Vremenski neovisna Schrödingerova jednadžba	141
19.1.4	Postupak rješavanja	142
19.1.5	Fizičke observable	142
19.2	Beskonačno duboka potencijalna jama	143
19.3	Konačno duboka potencijalna jama	145
19.4	Tuneliranje	146
19.5	Harmonijski oscilator	147
19.6	Trodimenzionalne potencijalne zamke	149
20	Struktura atoma	151
20.1	Vodikov atom	151
20.1.1	Vjerojatnost nalaženja elektrona	153
20.1.2	Kvantizacija kutne količine gibanja	155
20.1.3	Magnetski dipolni moment	155
20.1.4	Zeemanov efekt	156
20.1.5	Izborna pravila	156
20.1.6	Spin elektrona	156
20.1.7	Ukupna kutna količina gibanja	158
20.1.8	Paulijev princip	158
20.2	Višeelektronski atomi	159

21 Molekule	160
21.1 Vrste kemijskih veza	160
21.1.1 Ionska veza	160
21.1.2 Kovalentna veza	161
21.1.3 Van der Waalsova veza	161
21.1.4 Vodikova veza	162
21.2 Molekulski spektri	162
21.2.1 Rotacijski nivoi	162
21.2.2 Vibracijski nivoi	163
22 Atomska jezgra	164
22.1 Svojstva atomske jezgre	164
22.1.1 Energija vezanja	164
22.2 Radioaktivnost	165
22.2.1 Zakon radioaktivnog raspada	165
22.2.2 α -radioaktivnost	166
22.2.3 β -radioaktivnost	166
22.2.4 γ -radioaktivnost	166
22.2.5 Radioaktivnost u prirodi	167
22.2.6 Mjerenje radijacije	167
22.3 Nuklearne reakcije	167

Poglavlje 1

Tekućine

1.1 Fluidi

Fluidi su, za razliku od krutina, tvari koje mogu teći. Oni se oblikom prilagođavaju posudi u koju su postavljeni. Fluidi djeluju silom na stijenke posude, ali ne mogu se oduprijeti tangencijalnoj sili smicanja. Fluide dijelimo na tekućine i plinove.

Tekućine su tvari u agregatnom stanju između krutina i plinova. One su gotovo nestlačive slično krutinama, ali im se oblik prilagođava obliku posude slično plinovima. Nađe li se tekućina u posudi koja je u gravitacijskom polju, površina tekućine bit će okomita na gravitacijsko polje. Među česticama (atomima ili molekulama) tekućine jake su kohezijske sile. Stoga tekućine u bestežinskom stanju poprimaju oblik kugle – nastoje maksimalno smanjiti svoju površinu.

1.2 Tlak u tekućini

Tlak je fizikalna veličina koja se definira kao sila po jedinici površine:

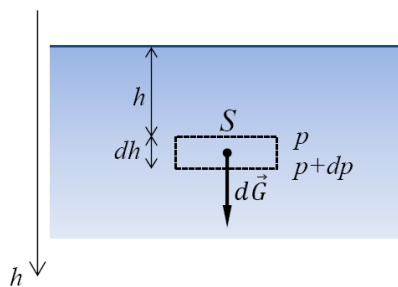
$$p = \frac{F}{S} . \quad (1.1)$$

Napomenimo da tlak nije vektorska veličina. U definiciju tlaka ulazi samo iznos sile, a ne i njezin smjer. Jedinica za tlak je N/m^2 , koja ima posebno ime *paskal* i oznaku Pa po francuskom fizičaru Blaiseu Pascalu. Veća dopuštena jedinica za tlak je *bar*, za koju vrijedi $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$. Standardni atmosferski tlak iznosi $1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

1.2.1 Hidrostatički tlak

Ako se tekućina u posudi nalazi u gravitacijskom polju, ona će poprimiti oblik posude i tlačiti će dno posude kao i stijenke posude. Gravitacijska sila djeluje na svaku molekulu tekućine, a molekule djeluju svojom težinom na molekule ispod sebe. U svakoj točki tekućine koja se nalazi u gravitacijskom polju postoji tlak. Ako u tekućinu uronimo neko tijelo, ona tlači i sve stijenke tog tijela. Pokusom možemo izmjeriti tlak na nekom mjestu u tekućini tako da na to mjesto uronimo malu probnu plohu i promatramo silu na tu plohu. Uočavamo da tlak ovisi o dubini na kojoj se ploha nalazi. Ako plohu možemo rotirati, uočavamo da je na nekoj dubini sila na plohu jednaka bez obzira na to kako je ploha orijentirana. Kažemo da je tlak izotropan – jednak u svim smjerovima.

Da bismo odredili kako tlak ovisi o dubini, razmotrimo mali element volumena tekućine, kao na ovoj slici. Promatrajmo silu na taj probni volumen. Dubina mjerena od površine tekućine je h . Iznos probnog volumena je $dV = S dh$, pri čemu je S površina gornje i donje plohe probnog volumena. Pretpostavimo da se tlak kontinuirano mijenja s dubinom. Neka je iznos tlaka na dubini h jednak p , a na dubini $h + dh$ neka iznosi $p + dp$. Sile koje djeluju na probni volumen su: pritisak na gornju plohu koji iznosi pS prema dolje, pritisak na donju plohu $(p + dp)S$ prema gore i gravitacijska sila



$\rho g S dh$ prema dolje, pri čemu je ρ gustoća tekućine. Budući da probni volumen miruje, vektorski zbroj tih triju sila je nula, odnosno

$$pS + \rho g S dh = (p + dp)S \quad , \quad (1.2)$$

iz čega slijedi

$$dp = \rho g dh \quad . \quad (1.3)$$

Ako je na površini $p = 0$, onda tlak na dubini dobijemo integriranjem:

$$p = \int_0^h dp = \rho g \int_0^h dh \quad , \quad (1.4)$$

što nam daje poznati izraz za *hidrostatički tlak*:

$$p = \rho g h \quad . \quad (1.5)$$

1.2.2 Uzgon

Zamislimo neko pravilno tijelo uronjeno u tekućinu. Promotrimo sile na to tijelo. Hidrostatički tlak djeluje okomito na svaku plohu tog tijela. Tlak na mjestu gornje plohe je $p(h_1) = \rho g h_1$, a na mjestu donje plohe je $p(h_2) = \rho g h_2$, pri čemu je ρ gustoća tekućine. Volumen tijela je $V_t = S(h_2 - h_1)$, a njegova težina je $G = \rho_t g S (h_2 - h_1)$, pri čemu je ρ_t gustoća uronjenog tijela. Tekućina gornju plohu tijela pritišće silom $F_1 = \rho g S h_1$ prema dolje, a donju plohu tijela pritišće silom $F_2 = \rho g S h_2$ prema gore. Rezultanta tih sila usmjerena je prema gore i iznosi:

$$F_u = \rho g S (h_2 - h_1) = V_t \rho g \quad . \quad (1.6)$$

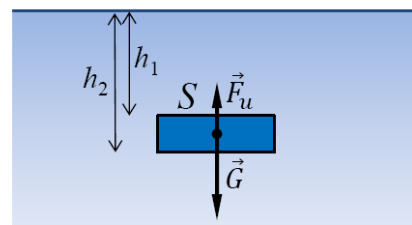
Ta sila zove se *sila uzgona* i vidimo da ovisi o volumenu uronjenog tijela te o gustoći tekućine. Uočimo da i okomito na bočne stranice uronjenog tijela djeluju sile, ali za svaku silu s jedne strane tijela postoji suprotna sila s druge strane tijela pa je njihova rezultanta jednaka nuli. Zato ih ovdje nismo razmatrali.

Ukupna sila na tijelo je

$$G - F_u = g V_t (\rho_t - \rho) \quad . \quad (1.7)$$

Time smo izrekli *Arhimedov zakon*:

Tijelo uronjeno u tekućinu prividno gubi na težini onoliko koliko teži istisnuta tekućina.



1.2.3 Hidraulički tlak

I dalje razmatramo tekućinu u gravitacijskom polju, ali pretpostavimo da uz gravitacijsku silu na površini tekućine djeluje još konstantna sila koja potječe ili od atmosferskog tlaka ili od pritiska nekog stapa. Taj vanjski tlak p_a zovemo *hidraulički tlak*.

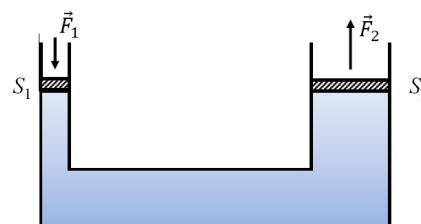
Tlak na nekoj dubini u tekućini jednak je hidrostatičkome tlaku na toj dubini uvećanom za iznos vanjskog tlaka:

$$p = p_a + \rho g h \quad . \quad (1.8)$$

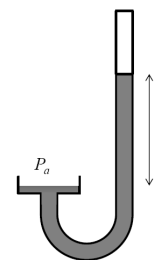
Za razliku od hidrostatičkoga, hidraulički tlak jednak je u svim točkama tekućine. To je *Pascalov zakon*:

Tlak primijenjen na bilo kojem mjestu u nestlačivoj tekućini prenosi se jednako u svim točkama tekućine.

Ovaj zakon ima veliku primjenu u svakodnevnom životu. Na slici desno prikazan je princip rada hidrauličke dizalice. Djelujući malom silom na malu plohu na površinu tekućine, dobije se velika sila na veliku plohu (tlak je jednak). Osim dizalica, na tom principu rade kočnice automobila, servo volani ili hidrauličke preše.

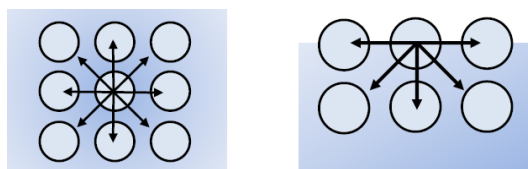


Isti taj Pascalov zakon primjenjuje se u živinom barometru prikazanom na slici lijevo. Savijena staklena cijev ispunjena je živom. Jedan (viši) kraj cijevi je hermetički zatvoren, a drugi spojen na širu posudu koja je otvorena prema atmosferskom tlaku. Na živu u otvorenoj posudi djeluje vanjski tlak, a u zatvorenoj cijevi iznad razine tekućine nema tlaka (vakuum). Da bi živa na dnu cijevi mirovala, mora tlak u oba kraja cijevi na nekoj visini biti jednak. Zato vanjski tlak u otvorenom kraju cijevi treba uravnotežiti hidrostatičkim tlakom u zatvorenom kraju cijevi. Razlika razina žive u dva kraja cijevi h određena je vanjskim tlakom prema formuli:



$$p_a = \rho g h \quad . \quad (1.9)$$

1.3 Napetost površine



Energija čestica na površini tekućine razlikuje se od energije čestica koje se nalaze negdje u unutrašnjosti. Na molekulu u tekućini djeluju sile susjednih molekula. One djeluju sa svih strana pa je rezultantna sila na pojedinu molekulu jednaka nuli (tlak je izotropan). Međutim, rezultantna sila na molekulu koja se nalazi na površini tekućine nije jednaka nuli, već je usmjerena prema unutrašnjosti tekućine. Stoga tekućina nastoji poprimiti oblik koji će imati najmanju površinu (kap

vode u bestežinskom stanju ima oblik kugle). Za povećanje površine tekućine potreban je rad. Definiramo *specifičnu površinsku energiju* neke tekućine

$$\gamma = \frac{dW}{dA} \quad (1.10)$$

koja nam kaže koliki je rad dW potrebno uložiti da se površina tekućine poveća za dA . Specifičnu površinsku energiju možemo shvatiti i kao silu F koja djeluje okomito na rub tekućine duljine l , tangencijalno površini tekućine. Tada tu veličinu nazivamo *napetost površine*:

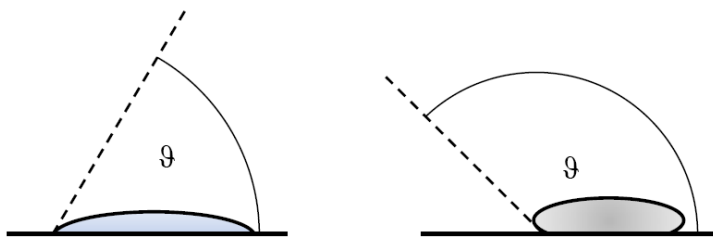
$$\gamma = \frac{F}{l} \quad (1.11)$$

Riječ je o istoj veličini definiranoj na dva različita načina. Mjerna jedinica za specifičnu površinsku energiju, odnosno za napetost površine jest N/m.

U raznim pokusima sa sapunicom možemo vidjeti kako opna od sapunice nastoji maksimalno smanjiti svoju površinu. Pritom treba imati na umu da svaka opna od sapunice ima dvije površine pa je sila koja djeluje na neku duljinu ruba opne l dana s $F = 2\gamma l$.

1.3.1 Granica tekućine i čvrste tvari – močenje

Prethodno razmatranje proveli smo za slučaj kad promatramo granicu tekućine i vakuuma ili tekućine i plina. Međutim, situacija je složenija kad promatramo granicu između tekućine i čvrste tvari. Međudjelovanje molekula tekućine i molekula čvrste tvari može biti jače ili slabije nego međudjelovanje molekula u samoj tekućini.



Ako su sile između molekula tekućine i molekula podloge jače, onda će sustav nastojati povećati površinu dodira jer time snižava ukupnu energiju. U idealnom slučaju, tekućina će se razliti po podlozi dok ne postigne debljinu jednog molekulskog sloja. U praksi se to nikad ne događa, ali se tekućina može razliti tako da kut dodira između tekućine i podloge ϑ bude malen. Tipičan primjer takvog razlijevanja je ponašanje kapljice vode na čistom (nemasnom) staklu kao na lijevoj slici. Ovdje je kut dodira ϑ manji od 90° . Kažemo da voda dobro moči staklo. Kad bi kut dodira (koji se još naziva i okrajnji kut) bio 0° , rekli bismo da tekućina savršeno moči podlogu.

Suprotan primjer je ponašanje kapljice žive na staklenoj podlozi, kao na slici desno. Kohezijske sile atoma žive jače su od privlačnih sila između atoma žive i stakla. Živa nastoji smanjiti dodirnu površinu sa staklom pa je kut dodira ϑ veći od 90° . Živa ne moči staklo. Za savršeno nemočenje kut dodira bio bi 180° .

1.3.2 Kapilarnost

Površina tekućine koja dobro moči stijenke posude zakrivit će se u blizini stijenke tako da dodirni kut između površine i stijenke bude $\vartheta < 90^\circ$. To će uzrokovati da sila napetosti površine vode ima komponentu u vertikalnom smjeru. Isto će se dogoditi ako se takva tekućina nađe u kapilari. Sila napetosti u tom slučaju može biti dovoljno jaka da se vidljivo suprotstavi sili teže koja djeluje na tekućinu u kapilari.

Razmotrimo kapilaru unutarnjeg polumjera r koja je dijelom uronjena u posudu s tekućinom koja dobro moči stijenke (slika desno). U kapilari granica površine tekućine ima obod $l = 2r\pi$. Sila napetosti na dijelici oboda iznosi $|\Delta\vec{F}| = \gamma\Delta l$. Smjer te sile je pod kutom ϑ u odnosu na vertikalu. Horizontalne komponente sile po obodu se međusobno poništavaju, a vertikalne komponente se sve zbrajaju. Vertikalna komponenta sile na tom djeliću oboda je $\Delta F_y = \gamma \cdot \Delta l \cdot \cos \vartheta$. Ukupna sila koja podiže tekućinu u kapilari je

$$F_y = \gamma \cdot l \cdot \cos \vartheta = 2r\pi\gamma \cdot \cos \vartheta \quad . \quad (1.12)$$

Kad tekućina u kapilari miruje, ta se sila poništava s težinom stupca tekućine koji je izdignut u kapilari za visinu h :

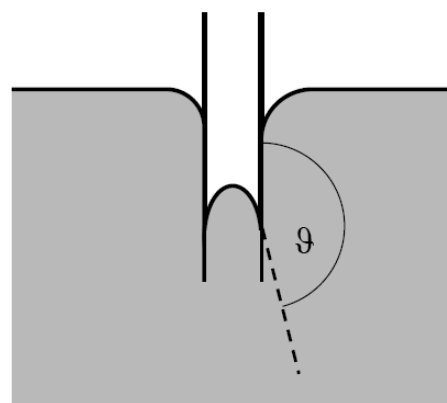
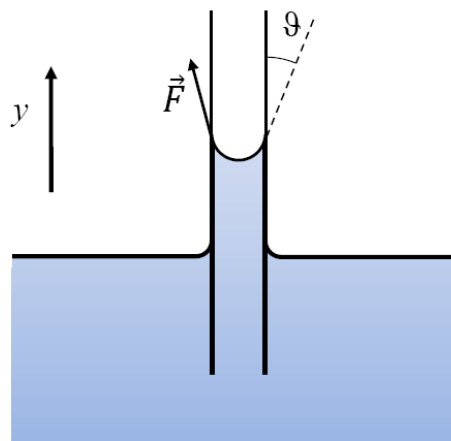
$$F_y = \rho \cdot g \cdot h \cdot S \quad , \quad (1.13)$$

pri čemu je $S = r^2\pi$ poprečni presjek kapilare. Izjednačavanjem gornje dvije jednačbe dobivamo visinu tekućine u kapilari:

$$h = \frac{2\gamma \cos \vartheta}{\rho g r} \quad . \quad (1.14)$$

Budući da je $\vartheta < 90^\circ$, h je pozitivna veličina, što znači da se tekućina u kapilari uzdiže iznad razine tekućine u vanjskoj posudi. Ova pojava zove se *kapilarna elevacija*.

Ako tekućina u kapilari ne moči stijenku, situacija je suprotna. Kut dodira je $\vartheta > 90^\circ$ pa je površina tekućine uz stijenku zakrivljena prema dolje. Sada sila napetosti vuče tekućinu prema dolje. Ta sila napetosti suprotstavlja se hidrostatičkom tlaku koji nastaje zbog razlike razina tekućine u kapilari i u vanjskoj posudi. Visina tekućine u kapilari dana jednačbom (1.14) sada je negativna ($h < 0$). Tekućina se u kapilari spušta ispod razine vanjske posude. Ova pojava zove se *kapilarna depresija*. Tipičan primjer ovakvog ponašanja je živa u staklenoj kapilari.



Poglavlje 2

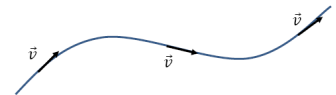
Gibanje fluida

U mehanici smo vidjeli da sva gibanja tijela i uzroke gibanja možemo u principu opisati s pomoću tri Newtonova zakona. Međutim, često je takvo opisivanje pojava u prirodi vrlo komplicirano pa smo uveli dodatne koncepte kao što je energija, ili zakoni sačuvanja. Kada želimo promatrati gibanje fluida, vrlo je nepraktično promatrati sile na svaku česticu fluida i pratiti gibanje svake čestice u vremenu. To bi bilo nemoguće, čak i uz uporabu najjačih postojećih računala. Srećom, nas u takvim slučajevima ne zanima gibanje svake pojedine čestice. Obično nas zanima ponašanje fluida u nekoj točki prostora i vremena. Zanima nas iznos i smjer brzine fluida na nekom mjestu. Fluid možemo podijeliti na male volumene u kojima se sve čestice gibaju jednako. Gibanje tih djelića volumena ovisi o gibanju svih ostalih djelića pa je opet nemoguće primijeniti Newtonove zakone.

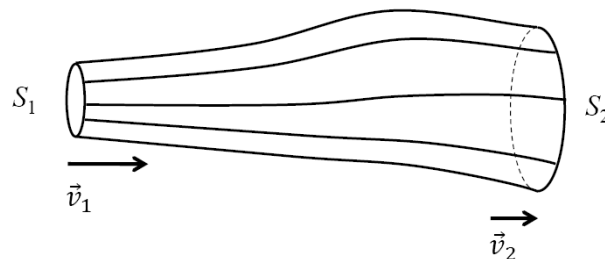
U sljedećim razmatranjima pretpostavit ćemo da promatramo *stacionaran protok* fluida, tj. da se u nekoj točki prostora brzina fluida ne mijenja s vremenom. U tu točku stalno dolaze nove čestice, a one koje su tamo bile ranije odlaze na nova mjesta, međutim, brzina čestica u promatranoj točki uvijek je ista.

2.1 Jednadžba kontinuiteta

Promatramo za početak gibanje jednog malog dijela fluida Δm koji zauzima mali volumen ΔV . Neka je brzina središta mase tog djelića jednaka \vec{v} . Putanja kojom se giba taj djelić fluida naziva se *strujnica* (slika desno). Ako je protok fluida stacionaran, strujnice se ne mijenjaju u vremenu – istom putanjom gibaju se novi dijelovi fluida koji se u kasnijem trenutku nađu na istom mjestu.



Zamislimo da je dio prostora u obliku nepravilne cijevi omeđen stacionarnim strujnicama. Budući da je plašt cijevi sastavljen od strujnica, neće biti ulazaka ili izlazaka čestica iz zamišljene cijevi. Neka je na početku cijevi njezin poprečni presjek S_1 , a na kraju cijevi S_2 . Jednaka količina tvari koja u nekom vremenskom intervalu uđe kroz S_1 mora u istom vremenskom intervalu izaći kroz S_2 . Neka je brzina fluida na ulazu u cijev \vec{v}_1 , a na izlazu iz cijevi \vec{v}_2 . U vremenu Δt na ulazu prođe masa $\Delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t$. U isto vrijeme kroz izlaz prođe $\Delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$. Budući da te



dvije mase moraju biti jednake, možemo pisati:

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \quad . \quad (2.1)$$

To je jedan oblik zapisa *jednadžbe kontinuiteta*, koja ima veliku primjenu u mnogim područjima fizike. Ako je promatrani fluid nestlačiva tekućina, onda je gustoća na ulazu i izlazu jednaka ($\rho_1 = \rho_2$) pa za tekućine vrijedi:

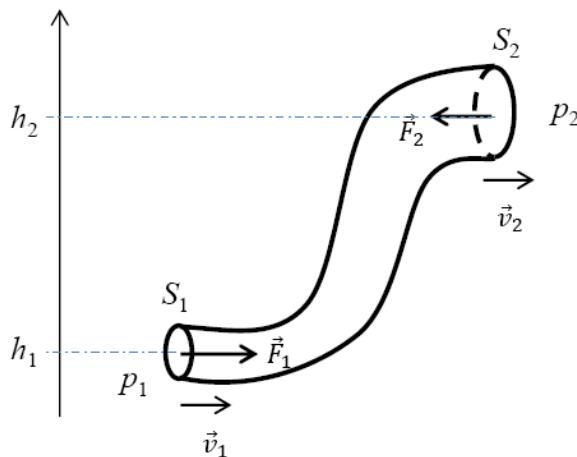
$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \quad . \quad (2.2)$$

2.2 Bernoullijeva jednadžba

Razmatranje gibanja fluida započet ćemo proučavanjem idealnih fluida.

Idealni fluid ne gubi energiju prilikom tečenja. To znači da ne postoji viskozno trenje ili neki drugi način pretvaranja mehaničke energije u toplinsku. Dakle, za razmatranje idealnih fluida možemo primijeniti zakon sačuvanja mehaničke energije.

Promotrimo zamišljenu cijev omeđenu stacionarnim strujnicama koja se nalazi u homogenom gravitacijskom polju. Neka se ulaz u cijev i izlaz iz cijevi nalaze na različitim visinama, h_1 odnosno h_2 (tj. različitim gravitacijskim potencijalima). Neka je poprečni presjek cijevi na ulazu S_1 , a



brzina fluida na ulazu v_1 . Poprečni presjek izlaza je S_2 , a brzina fluida na izlazu je v_2 . U nekom vremenskom intervalu Δt , masa fluida koja prođe kroz ulaz iznosi $\Delta m_1 = \rho S_1 v_1 \Delta t$, a masa fluida koja prođe kroz izlaz je $\Delta m_2 = \rho S_2 v_2 \Delta t$. Zbog jednadžbe kontinuiteta vrijedi $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m$. Zbroj potencijalne i kinetičke energije te mase na ulazu je:

$$\Delta E_1 = \Delta m g h_1 + \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 \quad , \quad (2.3)$$

a na izlazu

$$\Delta E_2 = \Delta m g h_2 + \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 \quad . \quad (2.4)$$

Ukupna energija mase Δm promijeni se od ulaza do izlaza za

$$\Delta E = \Delta E_2 - \Delta E_1 \quad . \quad (2.5)$$

Ta energija promijenila se zbog rada vanjskih sila. Proučimo koje vanjske sile djeluju na fluid u cijevi. Ako je tlak na ulazu jednak p_1 , a tlak na izlazu p_2 , onda sila na ulazu iznosi $F_1 = p_1 S_1$, a sila na izlazu je $F_2 = -p_2 S_2$. Put koji masa prijeđe u vremenu Δt na ulazu je $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$, a na izlazu $\Delta x_2 = v_2 \Delta t$. Rad na ulazu je $W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \Delta m / \rho$, a na izlazu $W_2 = -p_2 \Delta m / \rho$. Ukupni rad je

$$W = \frac{\Delta m}{\rho} (p_1 - p_2) \quad . \quad (2.6)$$

Izjednačimo li sada $\Delta E = W$ dobit ćemo:

$$\Delta mgh_2 + \frac{1}{2}\Delta mv_2^2 - \Delta mgh_1 - \frac{1}{2}\Delta mv_1^2 = \frac{\Delta m}{\rho}p_1 - \frac{\Delta m}{\rho}p_2 . \quad (2.7)$$

Ako tu jednadžbu pomnožimo s ρ i podijelimo s Δm , te reorganiziramo, dobit ćemo *Bernoullijevu jednadžbu* za idealne fluide:

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 . \quad (2.8)$$

Hidrodinamički tlak

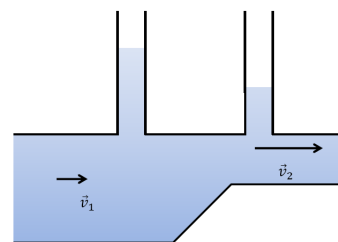
Kada imamo fluid u gibanju, možemo definirati veličinu hidrodinamički tlak:

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2 . \quad (2.9)$$

Uz tu definiciju možemo Bernoullijevu jednadžbu lako izreći riječima:

U idealnom fluidu je zbroj svih tlakova (hidrauličkog, hidrostatickog i hidrodinamičkog) jednak na svakom mjestu.

Valjanost ovog zakona možemo provjeriti pokusom. Možemo promatrati hidrostaticki tlak na raznim mjestima u cijevi kojom protječe idealni fluid. Ako je cijev promjenjivog poprečnog presjeka, mijenjat će se i brzina fluida. Na užem dijelu cijevi brzina je veća pa je time veći i hidrodinamički tlak. To se kompenzira smanjenim hidrostatickim tlakom, zbog čega je stupac tekućine u vertikalnoj cijevi na tom mjestu niži.



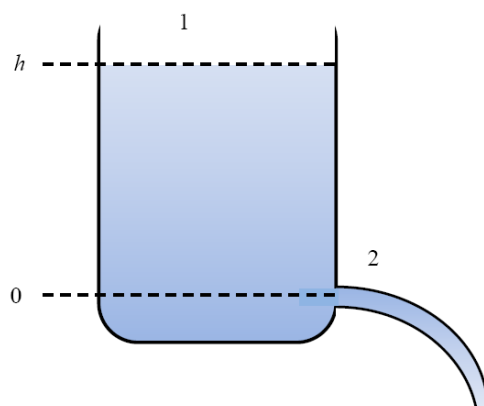
Toricellijev zakon istjecanja

Primjer primjene Bernoullijeve jednadžbe prikazan je na slici desno. Možemo izračunati kojom brzinom tekućina istječe iz otvora na dnu posude. Hidraulički tlak p_a jednak je na mjestima 1 i 2, tj. na vrhu posude i pri dnu. Bernoullijeva jednadžba daje nam:

$$p_a + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 . \quad (2.10)$$

Budući da je površina tekućine pri vrhu posude mnogo veća od otvora na dnu ($S_1 \ll S_2$), možemo zanemariti brzinu v_1 . Kao rezultat dobivamo brzinu istjecanja tekućine kroz otvor na mjestu 2:

$$v_2 = \sqrt{2gh} . \quad (2.11)$$



Zanimljivo, ovaj rezultat daje nam istu brzinu koju bi čestica dobila u slobodnom padu s visine h . Međutim, ovdje brzina fluida na izlazu ne ovisi o smjeru istjecanja. S obzirom na to da je tlak izotropna veličina, iznos brzine bit će jednak bez obzira na to kako bila okrenuta mlaznica na izlazu.

2.3 Realni fluidi

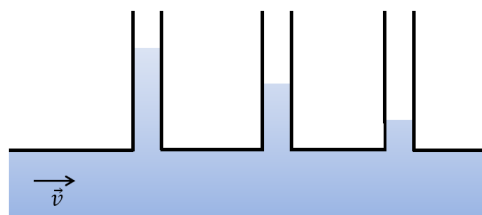
Za razliku od idealnih fluida, u realnim fluidima postoji unutarnje trenje. Protjecanjem fluida, promjena mehaničke energije ne pretvara se samo u mehanički rad, već se dio energije pretvara u toplinu. Možemo pisati

$$\Delta E = W + Q \quad , \quad (2.12)$$

pri čemu je toplina negativna veličina ($Q < 0$) jer se predaje okolini. Umjesto Bernoullijeve jednadžbe, za dvije točke na istoj strujnici vrijedi Bernoullijeva nejednadžba:

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 > p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad . \quad (2.13)$$

Značenje ove jednadžbe možemo pokazati jednostavnim pokusom prikazanim na slici desno. Vidimo da hidrostatički tlak u cijevi opada duž smjera protjecanja tekućine. Kada ne bi bilo razlike tlakova, tekućina ne bi protjecala. Valja zapamtiti ovu važnu posljednicu Bernoullijeve nejednadžbe za realne fluide:



Za protjecanje realnog fluida kroz vodoravnu cijev potrebno je održavati razliku tlakova.

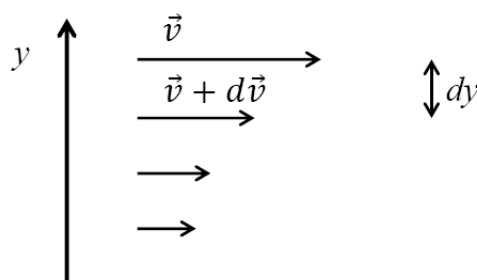
U stvarnim sustavima razliku tlakova potrebnu za kontinuirano protjecanje fluida stvaraju razne pumpe, kao što je srce u ljudskom tijelu ili kompresori u visokotlačnim cjevovodima.

2.3.1 Viskoznost

Unutarnje trenje u realnim fluidima uzrokovano je činjenicom da razni dijelovi fluida imaju različite brzine. Neka je tok stacionaran, a tekućina nestlačiva. Budući da susjedni slojevi koji se gibaju paralelno imaju različite brzine, među njima postoji sila trenja. Brži sloj djeluje na sporiji silom F pokušavajući ga ubrzati, a sporiji sloj djeluje na brži silom istog iznosa pokušavajući ga usporiti. To unutarnje trenje u fluidu zovemo *viskoznost*.

Ako je dodirna površina među slojevima S , naprezanje smicanja F/S je to veće što je veća razlika brzina gibanja razmatranih slojeva. Ako su slojevi razmaknuti za dy , a brzine gibanja im se razlikuju za dv , onda je

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dy} \quad . \quad (2.14)$$



Protjecanje tekućine je u smjeru x . Veličina η mjera je unutarnjeg trenja fluida i zove se *koeficijent viskoznosti*.

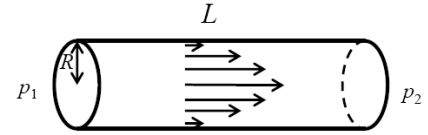
Mjerna jedinica za η je Pa·s, a stara mjerna jedinica zvala se centipoaz (cP). Odnos tih jedinica je $1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Viskoznost čiste vode pri sobnoj temperaturi iznosi 1 centipoaz. U tablici su prikazane vrijednosti koeficijenta viskoznosti za nekoliko fluida pri temperaturi 300 K.

fluid	zrak	voda	masl. ulje	glicerol
(Pa·s)	$1.8 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}	10^{-1}	1.5

2.3.2 Protjecanje tekućine kroz cijev

Brzina kojom će fluid protjecati kroz cijev ovisit će o razlici tlakova na krajevima cijevi i o viskoznosti samog fluida. Želimo proučiti zakonitosti po kojima viskozna tekućina protječe kroz čvrstu cijev. I dalje pretpostavljamo da je tok fluida stacionaran, tj. da se strujnice ne mijenjaju u vremenu, posebno da nema turbulencija.

Jasno je da zbog trenja brzina fluida neće biti jednaka na cijelom poprečnom presjeku cijevi. Slojevi fluida neposredno uz stijenku cijevi se ne gibaju, a brzina fluida u sredini cijevi je najveća. Promotrimo stacionaran protok tekućine kroz cijev duljine L i radijusa R . Neka je na ulazu u cijev tlak p_1 , a na izlazu p_2 . Mora vrijediti $p_1 > p_2$.



Kao prvi zadatak, odredit ćemo kako brzina nekog sloja ovisi o položaju tog sloja u cijevi. Zbog simetrije problema jasno je da će brzina svih slojeva koji su jednako udaljeni od središnje osi cijevi biti jednaka. To znači da će sve strujnice koje se nalaze na udaljenosti r od središta činiti plašt valjka koji se giba određenom brzinom. Taj plašt je ustvari dodirna površina između unutarnjeg



valjka radijusa r i vanjskog šupljeg valjka. Ploština dodirne površine je $S = 2r\pi L$. Vanjske sile koje djeluju na unutarnji valjak određene su tlakovima p_1 i p_2 . To su sile $F_1 = p_1 r^2 \pi$ i $F_2 = -p_2 r^2 \pi$ koje djeluju u suprotnim smjerovima. Ukupna vanjska sila na taj valjak je

$$\Delta F = (p_1 - p_2) \cdot r^2 \pi \quad . \quad (2.15)$$

Budući da se valjak giba stalnom brzinom, jasno je da je ta vanjska sila kompenzirana silom unutarnjeg trenja, tj. viskoznom silom F_v . Prema definiciji (2.14), vrijedi

$$\frac{F_v}{2r\pi L} = \eta \frac{dv}{dr} \quad . \quad (2.16)$$

Izjednačimo li sada viskoznu silu F_v s vanjskom silom ΔF (po iznosu), dobivamo diferencijalnu jednadžbu za brzinu u ovisnosti o radijusu:

$$\eta 2r\pi L \frac{dv}{dr} + (p_1 - p_2) \cdot r^2 \pi = 0 \quad , \quad (2.17)$$

koju možemo riješiti. Najprije ćemo izdvojiti diferencijal brzine:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r \cdot dr \quad , \quad (2.18)$$

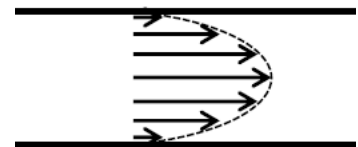
a onda integrirati:

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta L} r^2 + C \quad . \quad (2.19)$$

Konstantu C odredit ćemo iz rubnog uvjeta koji kaže da je brzina tekućina jednaka nuli uz stijenku cijevi, tj. $v(R) = 0$:

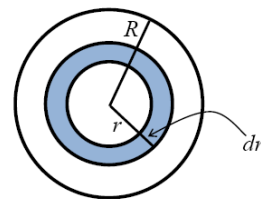
$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad . \quad (2.20)$$

Vidimo da je profil raspodjele brzina dan kvadratnom funkcijom (parabolom) kao na slici.



Poiseuilleov zakon

Kao sljedeći zadatak, izračunat ćemo koliko tekućine prođe kroz cijev tijekom vremena t . S obzirom na to da brzina protjecanja ovisi o radijusu, promotrimo najprije koliko tekućine prođe kroz poprečno postavljene prstene radijusa r i širine dr . Površina tog prstena je $dA = 2\pi r \cdot dr$. Ako je brzina tekućine na tom mjestu $v(r)$, onda u vremenu t kroz promatrani prsten prođe volumen $dV = v(r) \cdot t \cdot dA$. Brzina je dana jednadžbom (2.20). Označimo s $\Delta p = p_1 - p_2$. Da bismo odredili ukupni volumen tekućine koji prođe kroz poprečni presjek cijevi, morat ćemo integrirati dV u intervalu od 0 do R :



$$V = \int_0^R dV = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \cdot t \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{\Delta p}{4\eta L} 2\pi \cdot t \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r \cdot dr \quad (2.21)$$

Posljednji integral iznosi $R^4/4$ pa smo dobili *Poiseuilleov zakon*:

$$V = \frac{\Delta p}{L} \cdot t \frac{\pi}{8\eta} \cdot R^4 \quad (2.22)$$

Uočimo da je protok tekućine kroz cijev proporcionalan razlici tlakova, obrnuto proporcionalan duljini cijevi, obrnuto proporcionalan koeficijentu viskoznosti i proporcionalan četvrtoj potenciji promjera cijevi.

2.3.3 Gibanje tijela u viskoznom mediju

Još smo u kolegiju Fizika 1 naučili, a sada i ponovili, da je sila trenja za gibanje tijela u viskoznom mediju proporcionalna brzini kojom se tijelo giba:

$$\vec{F}_{tr} = -k\vec{v} \quad (2.23)$$

Konstanta proporcionalnosti k ovisi o obliku tijela, njegovoj veličini, ali i o viskoznosti fluida u kojem se tijelo giba. Općenito nije lako izračunati konstantu k za proizvoljni oblik tijela. Ako je tijelo sfernog oblika, može se pokazati da za njega vrijedi Stokesov zakon:

$$k = 6\pi\eta R \quad (2.24)$$

Promotrimo kako se giba jedna takva kuglica ako je ispustimo u tekućini u gravitacijskom polju. Sile koje djeluju na kuglicu su težina $\vec{G} = \rho_t V_t \vec{g}$, uzgon $\vec{F}_u = -\rho V_t \vec{g}$ i viskozno trenje $\vec{F}_{tr} = -6\pi\eta R \vec{v}$.

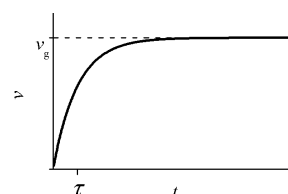
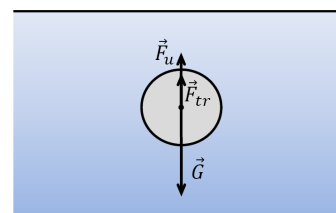
Nakon nekog vremena tijelo će postići graničnu brzinu v_g te se jednoliko gibati. Iznos granične brzine možemo lako odrediti iz uvjeta da je tada zbroj svih sila jednak nuli:

$$v_g = \frac{2}{9\eta} R^2 (\rho_t - \rho) g \quad (2.25)$$

Vidimo da je granična brzina proporcionalna kvadratu polumjera čestice. Ako su čestice jako male, njihova brzina je neprimjetna. Stoga vrlo sitne čestice lebde u vodi, a ne potonu na dno.

U kolegiju Fizika 1 izveli smo funkcijsku ovisnost brzine o vremenu. Ovdje samo navodimo taj rezultat uz korekciju za silu uzgona koju smo tamo zanemarili:

$$v(t) = v_g \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad ; \quad \tau = \frac{2R^2(\rho_t - \rho)}{9\eta} \quad (2.26)$$



Poglavlje 3

Priroda topline

Na pitanje "Znate li što je to topline i temperatura?" svatko od nas samouvjereni će odgovoriti potvrdno. Međutim, trebamo li tada objasniti što je to, možemo se naći u nezgodnoj situaciji. Zbog osjetila koja posjedujemo, uvijek ćemo za neki predmet ili tvar moći reći jesu li "topli" ili "hladni". Moći ćemo uspoređivati dvije tvari i odrediti koja je "toplija". Međutim, i tu možemo pogriješiti. Mlaka voda činit će nam se vruća ako smo prethodno ruku držali u hladnoj vodi, a ta ista mlaka voda činit će nam se hladna ako smo prije toga bili u dodiru s vrućom vodom.

U sljedećih nekoliko poglavlja bavit ćemo se topline i toplinskim pojavama, ne samo našim osjetima, nego i mnogo više od toga. Toplinski procesi određuju mnogo pojava u prirodi kao što su fazni prijelazi, promjene agregatnih stanja, kemijske i biokemijske reakcije, difuzija, viskoznost, otpor i mnoge druge.

3.1 **Toplina i energija**

Da bismo bolje razumjeli prirodu topline, najbolje je da krenemo od svakodnevnog iskustva. Prilikom kočenja, kinetička energija automobila se smanjuje, ali se pritom ne pretvara u potencijalnu, nego možemo uočiti da su se zagrijale kočnice. Dakle, mehaničku energiju možemo pretvoriti u toplinu. Slično, znamo da uporabom štednjaka možemo zagrijati posudu s vodom, odnosno električnu energiju pretvoriti u toplinu. Očito je da ne trebamo uvoditi novo svojstvo tvari – topline jest energija.

U spomenutim primjerima tijela su postala toplija jer je u njih uložena energija. Naravno, nije svaka energija uložena u tijelo postala topline. Nije svejedno na koji se način energija ulaže u tijelo. Ako se tijelo kao cjelina ubrzava radom vanjske sile, onda je uložena energija postala kinetička energija tijela – tijelo se nije ugrijalo. Ako je tijelo izgubilo svoju kinetičku energiju na uzbrdici tako da se uspelo na višu nadmorsku visinu, onda je kinetička energija pretvorena u potencijalnu, ali se tijelo nije zagrijalo. Ta potencijalna energija može se vratiti u kinetičku. U hibridnim automobilima kinetička energija se prilikom zaustavljanja djelomično pretvara u električnu (inducira se elektromotorna sila prema Faradayevu zakonu indukcije) koja se može pohraniti u akumulator i kasnije opet pretvoriti u kinetičku – opet nismo stvorili toplinsku energiju. Pa što je onda topline?

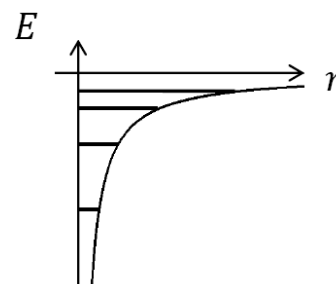
Topline je energija uložena u tijelo tako da se *raspodijeli na razini atoma i molekula*. Tako raspodijeljena energija ne može se sama po sebi pretvoriti u neki drugi oblik energije. Takvo raspodjeljivanje energije možemo usporediti s vazom koja padne na betonski pod. Na početku je vaza bila na nekoj visini i imala potencijalnu energiju. Prilikom padanja ta potencijalna energija pretvorena je u kinetičku pri čemu je težište vaze ubrzavalo. Kad je vaza pala na pod, razbila se i sitni komadi dobili su kinetičke energije svaki u svome smjeru. Međutim, težište svih tih komadića ostalo je mirovati na mjestu pada. Malo je vjerojatno da bi se moglo vanjskim silama djelovati u suprotnom smjeru tako da se komadići vaze ponovo spoje i dobiju kinetičku energiju potrebnu za podizanje vaze na početnu visinu. Proces razbijanja vaze je nepovratan (ireverzibilan). Ovdje smo već uveli pojam vjerojatnosti i vidjet ćemo da je topline blisko povezana sa zakonima vjerojatnosti

i statistike.

Kako se energija može raspodijeliti na razini atoma? Kada razmatramo procese na razini atoma, moramo uzeti u obzir zakonitosti kvantne mehanike. Na atomskoj razini energija se ne može mijenjati kontinuirano, nego samo skokovito, tj. u kvantima. Kvantni skokovi mogu biti na različitim energetske skalama. Navest ćemo nekoliko primjera kvantne strukture i s njima povezane energetske skale.

a) Elektron u potencijalu atomske jezgre

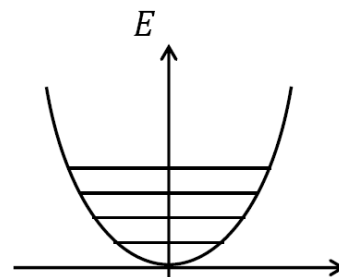
Atomska jezgra i elektroni povezani su u atom. Ako zamislimo da je jezgra u ishodištu koordinatnog sustava, potencijalna energija elektrona je negativna. Kažemo da su elektroni u vezanom stanju. Za njihovo odvođenje na beskonačnu udaljenost (tj. ionizaciju atoma) potrebno je uložiti energiju. U vodikovu atomu energija elektrona u osnovnom stanju iznosi -13.6 eV , a energija elektrona u prvom pobuđenom stanju iznosi -3.4 eV . Dakle za promjenu stanja elektrona iz osnovnog u prvo pobuđeno, potrebno je dovesti kvant energije 10.2 eV . Općenito, tipične energije vezanja elektrona u atomu su reda veličine $1 - 10\text{ eV}$. Izraženo u SI jedinicama, to je $\Delta E \sim 10^{-18} - 10^{-19}\text{ J}$. Ove energije imaju kvanti svjetlosti (fotoni) u ultraljubičastom području.



b) Vibracije atoma u kristalu ili molekuli

Atomi u kristalima ili molekulama imaju svoje ravnotežne položaje.

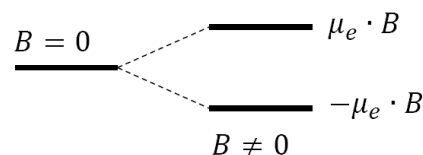
Ako se iz njih pomaknu, javlja se povratna sila koja ih nastoji vratiti u ravnotežni položaj. Za male pomake iz ravnotežnog položaja povratnu silu možemo smatrati harmonijskom, tj. proporcionalnom iznosu pomaka. Drugim riječima, atomi se nalaze u efektivnom harmonijskom potencijalu koji stvaraju svi ostali atomi. Zbog kvantnih zakona (Heisenbergove relacije neodređenosti), atomi i u stanju najniže energije osciliraju (tzv. kvantne oscilacije). Međutim, energije oscilacija su veće u pobuđenim stanjima. Energija oscilacije ne može se dodati u proizvoljnom iznosu, nego uvijek samo u točno određenim kvantima. Iznos jednog kvanta određen je masom atoma i konstantom povratne sile. Tipični kvanti vibracijskih energija su 0.1 eV . Izraženo u SI jedinicama, to je $\Delta E_v \sim 10^{-21}\text{ J}$. Ove energije imaju fotoni u infracrvenom području.



c) Spin elektrona u magnetskom polju

Većina materijala u prirodi su dijamagneti. Oni imaju paran broj spinova u atomima ili molekulama i ti spinovi su sparni tako da im ukupni magnetski dipolni moment iščezava. Međutim, u paramagnetskim materijalima postoje atomi koji imaju jedan nesporen elektronski spin. Magnetski dipolni moment jednog spina označimo s $\vec{\mu}_e$. Ako paramagnetski

uzorak postavimo u vanjsko magnetsko polje \vec{B} , spin nesporenog elektrona ne može se bilo kako orijentirati. Može biti ili paralelan s poljem ili antiparalelan s njime. U prvom slučaju energija mu je $-\mu_e B$, a u drugom $\mu_e B$. Iznos elektronskog spinskog magnetskog momenta je $\mu_e \sim 10^{-4}\text{ eV/T}$. Ako je vanjsko magnetsko polje jakosti 1 T , onda je razlika energija $\Delta E_s \sim 10^{-23}\text{ J}$. Ove energije imaju fotoni u mikrovalnom području.



d) Rotacije molekula

Budući da su sve energije u prirodi kvantizirane, to vrijedi i za rotaciju molekula. Kvant energije koji se može dodati rotacijskoj energiji neke molekule ovisi o momentu inercije te molekule. Općenito su te energije također u mikrovalnom području $\Delta E_r \sim 10^{-21}$ J, a najpoznatiji primjer je rotacija molekula vode, što koristimo u svakodnevnom životu za zagrijavanje hrane.

e) Spin atomske jezgre u magnetskom polju

Atomske jezgre vrlo često imaju spin, a time i magnetski dipolni moment. Dipolni momenti jezgri su oko tri reda veličine manji od elektronskih. Postavimo li takve jezgre u vanjsko magnetsko polje, one mogu imati samo točno određene energije. Razlike tih energija su kvantizirane i iznose $\Delta E_n \sim 10^{-26}$ J. Ove energije pobuđuju se radiofrekventnim elektromagnetskim valovima. Rezonantno pobuđenje neke jezgre naziva se *nuklearna magnetska rezonancija*.

f) Plin u zatvorenoj posudi

Translacijska kinetička energija atoma i molekula u plinu također je kvantizirana. Kvant energije ovisi o veličine kutije u kojoj se plin nalazi. Za kutiju veličine $10\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ kvanti energije potrebni za pobuđenja su $\Delta E_k \sim 10^{-48}$ J.

Energija pohranjena u tijelu na razini atoma može biti u raznim pobuđenjima (elektronska, spinska, vibracijska, kinetička,...). Način kako je pohranjena ovisi o zakonima vjerojatnosti.

3.2 Makroskopsko i mikroskopsko stanje

Tijela koja promatramo imaju u pravilu mnoštvo atoma i ako ta tijela gledamo u cjelini, možemo definirati neke fizikalne veličine koje određuju njihova *makroskopska stanja*. To su makroskopski mjerljive veličine, često nametnute izvana, koje određuju stanje tijela u cijelosti kao što su ukupna energija, volumen tijela, tlak, magnetizacija, polarizacija, temperatura i sl. Međutim, ako znamo da se tijelo sastoji od N atoma (pri čemu je N jako velik broj), onda nam je jasno da ne možemo točno odrediti u kojem stanju je pojedini atom, ili koliko energije je pohranjeno baš u nekom određenom atomu, ili koji kvantni procesi su sudjelovali u toj raspodjeli energije. Na primjer, dovedemo li u sustav toliko energije koliko je potrebno da se jedan atom pobudi u više energetske stanje, nećemo znati koji od N atoma je pobuđen. Kažemo da za isto makroskopsko stanje (u ovom slučaju vrijednost ukupne energije sustava) postoji mnoštvo dostupnih *mikroskopskih stanja*, a mi ih ne možemo razlikovati. Mikroskopsko stanje je točno određena jedna raspodjela energije na razini atoma.

3.3 Osnovni postulat statističke fizike

Najprije ćemo izreći ovaj važan postulat, a onda ga objasniti na jednostavnom primjeru. Postulat glasi:

Sva dostupna mikroskopska stanja koja se mogu stvoriti za neko makroskopsko stanje jednako su vjerojatna.

Ovaj postulat objasniti ćemo na hipotetskom primjeru sustava od 5 paramagnetskih atoma koji se nalaze u vanjskom magnetskom polju. Svaki atom može biti u jednom od dva energijska stanja:

pobuđeno \uparrow (orijentacija spina suprotno od vanjskog polja) ili osnovno \downarrow . Atom u pobuđenom stanju ima energiju za $\Delta E_s = 2\mu_e B$ veću nego u osnovnom stanju. Recimo da svakom atomu možemo dati redni broj. Najniža energija sustava je ona kad su svi atomi u osnovnome stanju. Postoji samo jedan način da se postigne ta energija sustava – samo jedno mikroskopsko stanje je dostupno za taj iznos energije.



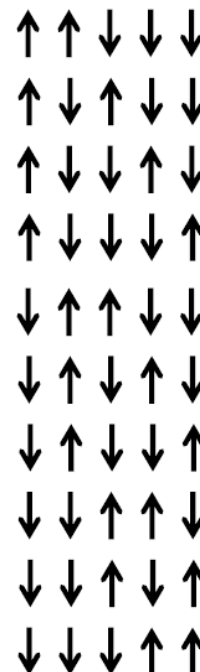
Zamislamo da sada sustavu izvana dodamo energiju $E = 2\Delta E_s$. Ta energija dovoljna je da dva atoma promijene orijentaciju svojih spinova. Jedno moguće mikroskopsko stanje je da prvi i drugi atom budu pobuđeni. Drugo moguće mikroskopsko stanje je da prvi i treći atom budu pobuđeni. I tako redom. Sva moguća mikroskopska stanja za ovo makroskopsko stanje prikazana su na slici desno. Takvih stanja ima 10. Taj rezultat može se dobiti u matematičkoj disciplini koja se zove kombinatorika. Broj načina da se od N elemenata odabere n elemenata dan je *binomnim koeficijentom*:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n! \cdot (N - n)!} \quad (3.1)$$

U našem primjeru, kada od 5 atoma odabiremo dva atoma koja će biti pobuđena, broj mikroskopskih stanja je

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10 \quad (3.2)$$

Prema osnovnom postulatu statističke fizike, sva ta mikroskopska stanja jednako su vjerojatna. Ako sustavu dovedemo neku ukupnu energiju, postoji jednaka vjerojatnost da se ostvari bilo koje od mikroskopskih stanja.



Da bismo mogli govoriti o pojmu vjerojatnosti, uvijek mislimo na velik broj slučajeva. Bacamo li igraću kocku samo nekoliko puta, moguće je da nijednom ne padne "šestica", ali je moguće da u većini slučajeva padne šestica. Međutim, bacamo li kocku npr. tisuću puta, očekujemo da će u približno jednoj šestini slučajeva pasti "šestica". Tada kažemo da je vjerojatnost da padne određeni broj na kocki jednaka $1/6$, a pokusom ćemo utvrditi da je to broj povoljnih događaja podijeljen s brojem ukupnih događaja.

Kako u promatranju našeg sustava možemo postići velik broj slučajeva?

Jedan hipotetski način je da proces dovođenja energije ponovimo mnogo puta. Zamislamo da možemo točno utvrditi u kojem mikroskopskom stanju se nalazi. Sustavu dovedemo neku energiju i zabilježimo u kojem je mikroskopskom stanju. Zatim mu oduzmemo energiju i ponovno dodamo pa opet zabilježimo mikroskopsko stanje. I taj postupak ponovimo mnogo puta.

Drugi hipotetski način je da zamislamo postojanje mnoštva jednakih sustava (s istim brojem atoma iste vrste). Svim sustavima dodamo jednaku količinu energije i promatramo u kojim mikroskopskim stanjima se nalaze.

Treći način postizanja velikog broja događaja postiže se u sustavu u kojem susjedni atomi mogu izmjenjivati energiju. Tada sustav podjednako vremena boravi u svakom stanju.

Označimo s $\Omega(E)$ broj dostupnih stanja za energiju E . U slučaju sustava od 5 spinova koji ima energiju $2\Delta E_s$, broj dostupnih stanja je

$$\Omega(E) = \binom{5}{2} = 10 \quad (3.3)$$

Za sustav od 10 spinova i energijom $4\Delta E_s$, broj dostupnih stanja je

$$\Omega(E) = \binom{10}{4} = 210 \quad . \quad (3.4)$$

Za sustav od 100 spinova i energijom $40\Delta E_s$, broj dostupnih stanja je

$$\Omega(E) = \binom{100}{40} = 1.37 \cdot 10^{28} \quad . \quad (3.5)$$

Već za tako maleni sustav od samo 100 paramagnetskih atoma, broj dostupnih stanja je jako velik. U slučaju da susjedni atomi izmjenjuju energiju svake nanosekunde, trebali bismo čekati 360 milijardi godina da sva mikroskopska stanja budu postignuta. Stvarni sustavi u prirodi još su mnogo veći.

3.4 Lokalne fluktuacije

Da bismo objasnili što su to lokalne fluktuacije, opet ćemo se poslužiti primjerom. Uzet ćemo dvostruko veći sustav od onoga u prošlom poglavlju. sustav od 10 paramagnetskih atoma kojemu je dovedena energija dovoljna da se pobude četiri atoma. U takvom sustavu broj mikroskopskih stanja je 210.

Podijelimo taj sustav na dvije polovice: "lijevu" i "desnu" kao na ovoj slici. Pitanje je jesu li pobuđenja ravnomjerno raspodijeljena na lijevu i desnu stranu? Vjerojatnost da dva pobuđenja budu lijevo, a dva desno iznosi:



$$P_2 = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{10 \cdot 10}{210} = 47.6\% \quad . \quad (3.6)$$

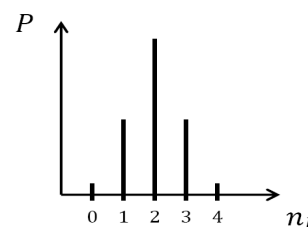
Vjerojatnost da sva četiri pobuđenja budu lijevo iznosi:

$$P_4 = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{5 \cdot 1}{210} = 2.4\% \quad , \quad (3.7)$$

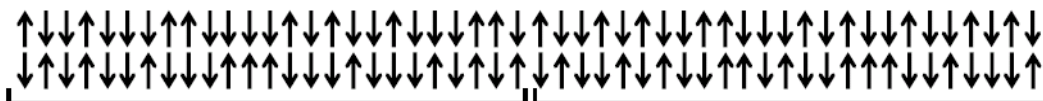
a isto tolika je i vjerojatnost da sva četiri pobuđenja budu desno. Vjerojatnost da jedno pobuđenje bude lijevo, a dva tri desno (i obratno) iznosi:

$$P_1 = P_3 = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{10 \cdot 5}{210} = 23.8\% \quad . \quad (3.8)$$

Ove vjerojatnosti možemo ucrtati u histogram (na slici desno). Vidimo da je jednolika raspodjela pobuđenja najvjerojatnija. Vjerojatnost da sva pobuđenja budu u jednoj polovici sustava vrlo je mala. Ovaj zaključak još je jače izražen ako je promatrani sustav mnogo veći.



Uzmimo za primjer sustav koji je samo 10 puta veći od prethodnog, tj. $N = 100$, $n = 40$. Podijelimo ga na "lijevu" i "desnu" polovicu.



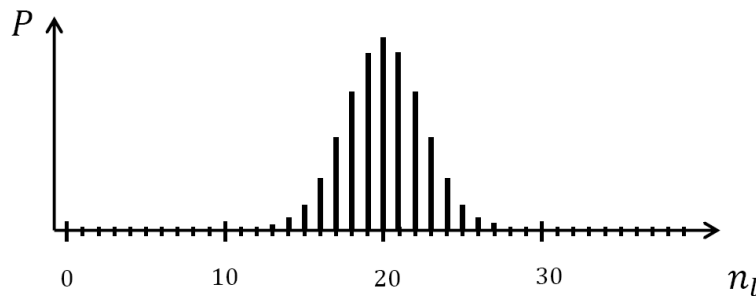
Vjerojatnost da dvadeset pobuđenja bude lijevo, a dvadeset desno iznosi:

$$P_{20} = \frac{\binom{50}{20} \cdot \binom{50}{20}}{\binom{100}{40}} = 16.1\% .$$

Možemo izračunati i nekoliko drugih vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} P_{19} = P_{21} = 14.8\% ; \quad P_{18} = P_{22} = 11.6\% ; \quad P_{17} = P_{23} = 7.7\% ; \\ P_{16} = P_{24} = 4.3\% ; \quad P_{15} = P_{25} = 2.1\% \quad \dots \quad P_0 = P_{40} = 7.5 \cdot 10^{-19} . \end{aligned}$$

Ucrtamo li ove vjerojatnosti u histogram, vidimo da je jednolika raspodjela pobuđenja najvjerojatnija.



Najvjerojatnija raspodjela pobuđenja naziva se *ravnotežno stanje*. U gornjem primjeru to je za $n_l = 20$. Raspodjele koje nisu ravnotežne ($n_l \neq 20$) nazivaju se *lokalne fluktuacije*. Za fluktuacije koje malo odstupaju od ravnotežnog stanja vjerojatnosti su velike, a velika odstupanja od ravnotežnog stanja praktično su nemoguća.

U gornjem primjeru, vidimo da vjerojatnost padne na polovicu za $n_l = 17$ i $n_l = 23$. Razlika ovih vrijednosti $\Delta n_l = 6$ je mjerilo širine raspodjele. Kada sustav ima mnogo veći broj pobuđenja, može se matematički pokazati da širina raspodjele raste približno s korijenom broja pobuđenja $\Delta n_l \approx \sqrt{n_l}$. Zanimljivije je pogledati kako se ponaša relativna širina:

$$\frac{\Delta n_l}{n_l} \sim \frac{1}{\sqrt{n_l}} . \quad (3.9)$$

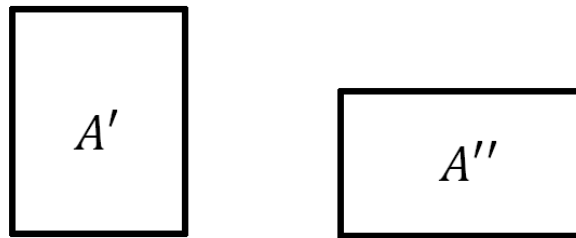
Ako sustav ima milijun pobuđenja, relativna širina raspodjele je 1 promil. Realni sustavi imaju red veličine 10^{23} pobuđenja pa je relativna širina raspodjele 10^{-12} . Unatoč malim lokalnim fluktuacijama veliki sustavi su uvijek u ravnotežnom stanju.

Poglavlje 4

Toplinsko međudjelovanje

4.1 Toplinska ravnoteža

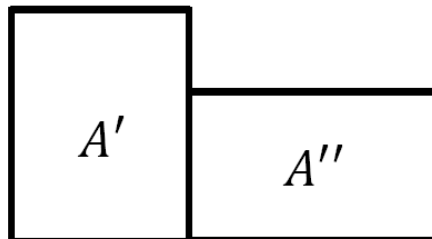
Razmotrimo sada dva odvojena sustava A' i A'' . Neka svaki od tih sustava ima dobro definirana makoskopska stanja. Sustav A' ima N' atoma u volumenu V' i ukupnu energiju E'_0 . Broj dostupnih stanja za tu energiju je $\Omega'(E'_0)$. Sustav A'' ima N'' atoma u volumenu V'' i ukupnu energiju E''_0 . Broj dostupnih stanja za tu energiju je $\Omega''(E''_0)$.



Ukupni broj dostupnih stanja za ta dva odvojena sustava jednak je $\Omega'(E'_0) \cdot \Omega''(E''_0)$. (Svako stanje prvog sustava možemo kombinirati s bilo kojim stanjem drugog sustava, ali energija, atomi ili pobuđenja ne mogu prelaziti iz jednog sustava u drugi.)

Što se zbiva ako u nekom trenutku (nazovimo ga $t = 0$) ta dva sustava spojimo tako da mogu izmjenjivati energiju? Nazovimo takav novi (spojeni) sustav A . On ima $N = N' + N''$ atoma i energiju $E = E'_0 + E''_0$. Sada će broj dostupnih stanja za spojeni sustav biti mnogo veći nego prije spajanja:

$$\Omega(E) \gg \Omega'(E'_0) \cdot \Omega''(E''_0) . \quad (4.1)$$



Pokažimo to na primjeru dva mala paramagnetska sustava, svaki od 10 atoma. Neka prije spajanja sustav A' ima $N' = 10$ atoma, od kojih je četiri pobuđeno ($E'_0 = 4\Delta E_s$), a sustav A'' ima $N'' = 10$ atoma, od kojih su dva pobuđeno ($E''_0 = 2\Delta E_s$). Prije spajanja je broj dostupnih stanja u prvom sustavu $\Omega'(E'_0) = \binom{10}{4} = 210$, a u drugom sustavu $\Omega''(E''_0) = \binom{10}{2} = 45$. Ukupan broj dostupnih stanja ta dva odvojena sustava je $\Omega'(E'_0) \cdot \Omega''(E''_0) = 9450$. Spojimo li sada sustave, novi

sustav A ima $N = N' + N'' = 20$ atoma i energiju $E = E'_0 + E''_0 = 6\Delta E_s$. Broj dostupnih stanja tako spojenog sustava je $\Omega(E) = \binom{20}{6} = 38760$, što je mnogo više od 9450.

U trenutku spajanja možemo zamisliti da je A' bio "lijevi" podsustav s četiri pobuđenja, a A'' da je bio "desni" podsustav s dva pobuđenja. U tom trenutku $t = 0$, sustav A nije bio u ravnotežnom (najvjerojatnijem) stanju. Broj dostupnih stanja za takvu raspodjelu bio je 9450, a broj dostupnih stanja za jednoliku raspodjelu (tri pobuđenja lijevo i tri pobuđenja desno) iznosi $\binom{10}{3} \cdot \binom{10}{3} = 120 \cdot 120 = 14400$. To je stanje najvjerojatnije i zovemo ga *stanje toplinske ravnoteže*.

U stvari možemo reći da je sustav A u trenutku $t = 0$ bio u neravnotežnom stanju. To je bila lokalna fluktuacija. U vremenu $t > 0$, sustav A putem interakcija među atomima evoluirao u najvjerojatnije stanje toplinske ravnoteže.

Postizanje toplinske ravnoteže je *nepovratan* ili *ireverzibilan* proces. Sustav se nikad neće sam vratiti u početno neravnotežno stanje. Trajanje tog procesa zovemo postizanja toplinske ravnoteže zovemo *relaksacijsko vrijeme*. Ono može biti vrlo različito, ovisno o vrsti sustava koje spajamo. Recimo, spojimo li dvije posude s plinom, relaksacijsko vrijeme mjerit će se u milisekundama. Dovedemo li dva metala u dodir, relaksacijsko vrijeme mjerit će se u minutama, a dodirnemo li dva komada stiropora, postizanje toplinske ravnoteže trajat će satima.

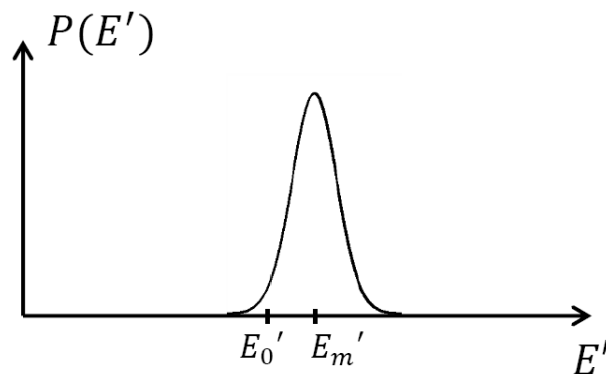
Ako su promatrani sustavi A' i A'' prije spajanja imali jednake energije, njihovo spajanje neće promijeniti stanje. Oni se već u trenutku $t = 0$ nalaze u stanju toplinske ravnoteže. Ovo možemo poopćiti i za slučaj da sustavi A' i A'' nisu iste veličine (tj., nemaju isti broj atoma).

4.2 Uvjet toplinske ravnoteže

Ako spojimo sustave A' i A'' , koji mogu biti različitih veličina, onda oni mogu izmjenjivati energiju. Prije spajanja, energije tih sustava bile su E'_0 , odnosno E''_0 . Ukupna energija je $E = E'_0 + E''_0$. Nakon spajanja, sustav A' može imati neku energiju E' , a sustav A'' energiju E'' , pri čemu se ukupna energija neće promijeniti, tj. $E = E' + E''$. Vjerojatnost da se energija baš tako rasporedi na dva podsustava je

$$P(E') = \frac{\Omega'(E') \cdot \Omega''(E'')}{\Omega(E)} = \frac{\Omega'(E') \cdot \Omega''(E - E')}{\Omega(E)}. \quad (4.2)$$

Naravno, sustav će biti u toplinskoj ravnoteži za onu energiju E' za koju je $P(E')$ maksimalno. Označimo tu energiju s E'_m (tj. $P(E'_m) = \max$). Premda znamo da se energija mijenja u kvantima, ovdje govorimo o sustavima s jako velikim brojem atoma, pa možemo zamisliti da su promjene energija kontinuirane. Onda je i funkcija $\Omega'(E')$ kontinuirana. U stvari, $\Omega'(E')$ će nam predstavljati broj dostupnih stanja koja imaju energiju u intervalu $(E', E' + \delta E')$. Slično ćemo uvesti funkciju vjerojatnosti kao kontinuiranu veličinu. $P(E')$ će nam predstavljati vjerojatnost da energija bude u intervalu $(E', E' + \delta E')$.



Ravnotežno stanje postiže se za $P(E'_m) = \max$, tj. onda kada funkcija $P(E')$ ima maksimum.

Da bismo pronašli maksimum funkcije moramo ju derivirati i izjednačiti s nulom:

$$\frac{\partial P(E')}{\partial E'} = \frac{1}{\Omega(E)} \left[\frac{\partial \Omega'(E')}{\partial E'} \cdot \Omega''(E'') + \Omega'(E') \cdot \frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E'} \right] = 0 \quad . \quad (4.3)$$

Uzimajući u obzir jednakost $\Omega''(E'') = \Omega''(E - E')$, možemo pisati

$$\frac{\partial \Omega'(E')}{\partial E'} = - \frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E''}$$

pa imamo

$$\frac{\partial P(E')}{\partial E'} = \frac{\Omega'(E') \cdot \Omega''(E'')}{\Omega(E)} \left[\frac{1}{\Omega'(E')} \cdot \frac{\partial \Omega'(E')}{\partial E'} - \frac{1}{\Omega''(E'')} \cdot \frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E''} \right] = 0 \quad . \quad (4.4)$$

Izraz ispred uglate zagrade je $P(E')$ prema jednadžbi (4.2), dakle pozitivan broj, pa slijedi da uglatu zagradu treba izjednačiti s nulom. Time smo dobili *uvjet toplinske ravnoteže* dvaju sustava:

$$\frac{1}{\Omega'(E')} \cdot \frac{\partial \Omega'(E')}{\partial E'} = \frac{1}{\Omega''(E'')} \cdot \frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E''} \quad . \quad (4.5)$$

Riječima taj uvjet možemo iskazati:

Sustavi A' i A'' su u toplinskoj ravnoteži kad im se izjednače
relativne naglosti promjene broja dostupnih stanja.

Taj uvjet postiže se za energiju E'_m .

Kad su sustavi spojeni, topliji podsustav predaje energiju hladnijem. Neka je na početku A' hladniji od ta dva sustava. Njegova energija će nakon spajanja porasti s E'_0 na E'_m :

$$\Delta E' = E'_m - E'_0 = Q' > 0 \quad . \quad (4.6)$$

Sustav A' je dobio energiju u obliku *topline* Q' . Ovdje smo uveli dogovor da je toplota koju tijelo prima pozitivna. Sustav A'' je predao energiju:

$$\Delta E'' = E''_m - E''_0 = Q'' < 0 \quad . \quad (4.7)$$

Zakon sačuvanja energije nam kaže da mora vrijediti

$$Q' + Q'' = 0 \quad . \quad (4.8)$$

Ako su sustavi u toplinskoj ravnoteži, nema neto prijenosa energije među njima.

4.3 | Temperatura

Ako u trenutku spajanja sustava A' i A'' oni nisu u toplinskoj ravnoteži vjerojatnost da sustav A' ima energiju E' dana je jednadžbom (4.2). Deriviramo li tu jednadžbu po E' i podijelimo s $P(E')$ možemo pisati:

$$\frac{1}{P(E')} \frac{\partial P(E')}{\partial E'} = \frac{1}{\Omega'(E')} \cdot \frac{\partial \Omega'(E')}{\partial E'} - \frac{1}{\Omega''(E'')} \cdot \frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E''} \quad . \quad (4.9)$$

Drugim riječima, u procesu uspostavljanja toplinske ravnoteže nakon spajanja dva sustava, relativna naglost promjene funkcije vjerojatnosti jednaka je razlici relativnih naglosti promjene broja dostupnih stanja dvaju sustava. Uočimo da prvi član s desne strane jednadžbe (4.9) ovisi samo o svojstvima sustava A' , a drugi član samo o svojstvima sustava A'' . Uvedimo novu veličinu β koja će definirati to svojstvo sustava (relativna naglost promjene broja dostupnih stanja):

$$\beta(E) = \frac{1}{\Omega(E)} \cdot \frac{\partial \Omega(E)}{\partial E} \quad . \quad (4.10)$$

Sada relaciju (4.9) možemo pisati

$$\frac{1}{P(E')} \frac{\partial P(E')}{\partial E'} = \beta'(E') - \beta''(E'') \quad . \quad (4.11)$$

Razmotrimo što nam kaže ta relacija. Ako je sustav A' hladniji, njegova energija će u dodiru sa sustavom A'' rasti, tj. $\partial P(E')/\partial E'$ će biti pozitivna veličina. To znači da je za hladniji sustav β veći nego za topliji sustav ($\beta'(E') > \beta''(E'')$). Obrnuto, ako je A' topliji sustav, vrijedit će $\beta'(E') < \beta''(E'')$. U toplinskoj ravnoteži je $\beta'(E') = \beta''(E'')$. Vidimo da je veličina β mjera toplinske ravnoteže. Međutim, sama veličina je pomalo neintuitivna – hladniji sustavi imaju veći β . Mnogo je prirodnije za mjeru toplinske ravnoteže uzeti veličinu koja je obrnuto proporcionalna s β . Stoga ćemo definirati veličinu *temperatura* T s pomoću implicitne relacije:

$$\beta(E) = \frac{1}{\Omega(E)} \cdot \frac{\partial \Omega(E)}{\partial E} = \frac{1}{k_B T(E)} \quad , \quad (4.12)$$

pri čemu je $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{J/K}$ Boltzmannova konstanta.

Jedinica za temperaturu je *kelvin* K. To je jedna od osnovnih SI jedinica. Definirana je kao $1/273.16$ dio termodinamičke temperature trojne točke vode T_t . Trojna točka vode je temperatura na kojoj je moguće da tri agregatna stanja vode – kruto, tekuće i plinovito – budu u ravnoteži. U svakodnevnom životu često se temperatura izražava u jedinicama $^{\circ}\text{C}$. Valja napomenuti da je trojna točka vode na temperaturi 0.01°C . Stoga se preračunavanje temperature t izražene u $^{\circ}\text{C}$ u temperaturu T izraženu u K provodi numeričkom formulom

$$T [\text{K}] = t [^{\circ}\text{C}] + 273.15 \quad . \quad (4.13)$$

4.4 Nulti zakon termodinamike

Vidjeli smo da su dva sustava A' i A'' u toplinskoj ravnoteži ako su im temperature jednake, tj. $T' = T''$. Intuitivno nam je vrlo prihvatljiv, ali možemo iskazati Nulti zakon termodinamike:

Ako je tijelo A u toplinskoj ravnoteži s tijelom B, a tijelo B u toplinskoj ravnoteži s tijelom C, onda su i tijela A i C u toplinskoj ravnoteži.

Posljedice ovog zakona su:

- Tijelo je u toplinskoj ravnoteži sa svim tijelima iste temperature.
- Toplinskom ravnotežom određujemo stanje tijela.
- Temperatura tijela ovisi samo o stanju tijela, a ne o odnosu s drugim tijelima.

Toplinski spremnik

Pretpostavimo da je u gornjim primjerima jedan sustav mnogo veći od drugoga, tj. $A'' \gg A'$. To znači da je u pravilu i ukupna energija prvog sustava mnogo manja od ukupne energije drugog sustava ($E' \ll E''$). Ako oni nemaju jednake temperature, dovedemo li ih u kontakt doći će do izmjene energije među njima – prenijet će se energija ΔE . U sustavu A' relativna promjena energije $\Delta E/E'$ je velika, a u sustavu A'' relativna promjena energije $\Delta E/E''$ je zanemariva.. Dakle, temperatura sustava A'' neće se promijeniti, a temperatura sustava A' će se izjednačiti s $T(A'')$. U takvom slučaju kažemo da je sustav A'' *toplinski spremnik*. Moramo naglasiti da u ovoj konfiguraciji energija sustava A' nije sačuvana. Sustav A' nije zatvoreni sustav, već prima ili predaje energiju toplinskom spremniku.

Boltzmannova raspodjela

Ovdje ćemo izreći jedan zakon koji se u statističkoj fizici može izvesti, ali sam izvod premašuje opseg ovoga kolegija:

Vjerojatnost da se postigne neko točno određeno mikroskopsko stanje r koje ima energiju E' dana je relacijom

$$P_r = C \cdot e^{-E'/k_B T} , \quad (4.14)$$

pri čemu je C neka konstanta normiranja. Vidimo da vjerojatnost nekog pojedinog mikroskopskog stanja eksponencijalno opada s porastom energije sustava. Takva raspodjela vjerojatnosti naziva se Boltzmannova raspodjela. Međutim, broj dostupnih stanja $\Omega(E')$ raste s energijom. Kao posljedica toga, vjerojatnost da sustav A' u dodiru s toplinskim spremnikom postigne energiju E' iznosi

$$P(E') = C \cdot \Omega(E') e^{-E'/k_B T} . \quad (4.15)$$

4.5 Entropija

U definiciji temperature (4.12) pojavljuje se relativna naglost promjene broja dostupnih stanja. Prisjetimo se pravila za deriviranje kompozicije funkcije. Za bilo koje dvije funkcije $f(x)$ i $g(x)$ vrijedi da je

$$\frac{\partial}{\partial x} g(f(x)) = \frac{\partial g(f(x))}{\partial f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x} . \quad (4.16)$$

Ako umjesto varijable x stavimo E , umjesto $f(x)$ stavimo $\Omega(E)$, a umjesto $g(x)$ stavimo $\ln x$, dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial E} \ln(\Omega(E)) = \frac{1}{\Omega(E)} \cdot \frac{\partial \Omega(E)}{\partial E} . \quad (4.17)$$

Dobili smo upravo izraz koji se pojavljuje u definiciji temperature. To nas motivira da definiramo fizikalnu veličinu *entropija*:

$$S(E) = k_B \ln \Omega(E) . \quad (4.18)$$

Sada možemo napisati vezu između temperature i entropije:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E)}{\partial E} , \quad (4.19)$$

tj. inverzna temperatura jednaka je naglosti promjene entropije s energijom.

Ponašanje funkcije $S(E)$

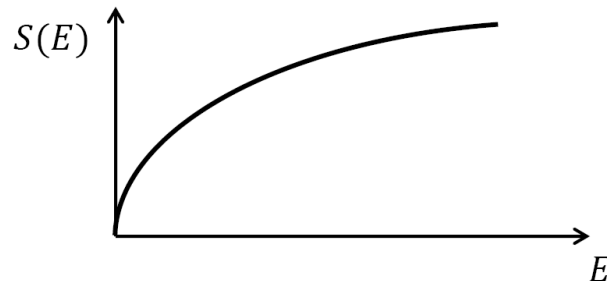
Analiziramo funkciju $S(E)$. U slučaju da je energija pohranjena u sustav nula, tj. kad nema pobuđenja, postoji samo jedno dostupno mikroskopsko stanje – $\Omega(E = 0) = 1$. To znači da je $S(E = 0) = 0$.

Zamislimo da proučavamo jako veliki sustav od $N \sim 10^{20}$ atoma (ili više), koji ima mnogo mogućih energijskih stanja za svaki atom. Ako sustavu koji je bio bez pobuđenja dodamo energiju dovoljnu za samo jedno pobuđenje ΔE , broj dostupnih mikroskopskih stanja porasti će s 1 na N , a entropija će porasti od 0 do $k_B \ln N$. Dakle, $\Delta S/\Delta E$ je jako veliko (u nazivniku je malen broj $\Delta E \rightarrow 0$). Možemo uvesti aproksimaciju kontinuuma:

$$\frac{\Delta S}{\Delta E} \rightarrow \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{E=0} = \infty , \quad (4.20)$$

tj. nagib funkcije u $E = 0$ je beskonačan. To ujedno znači da je za $E = 0$ temperatura $T = 0$. Na temperaturi apsolutne nule svi atomi su u osnovnom stanju.

Kako se $S(E)$ ponaša za visoke energije? To možemo zaključiti analizom relacije (4.19). Temperatura je pozitivna veličina.¹ To znači da je $\partial S/\partial E > 0$, tj. entropija uvijek raste s energijom. Temperatura također raste s energijom sustava, što znači da se inverzna temperatura, a time i derivacija entropije, smanjuje s porastom energije. Entropija u ovakvom sustavu uvijek raste, ali sve sporije kako raste energija. Shematski je graf ponašanja entropije u ovisnosti o energiji prikazan na ovoj slici.



Entropija kao nered

Kada je $S = 0$, a to vrijedi kad je $E = 0$ postoji samo jedno dostupno mikroskopsko stanje. Kažemo da je sustav potpuno uređen. Kada je $S \neq 0$, broj dostupnih stanja naglo raste. Ne znamo koji atomi su pobuđeni iako znamo ukupnu energiju sustava. Drugim riječima, u sustavu je povećan nered. Stoga kažemo:

Entropija je mjera nereda u sustavu

Uspostava toplinske ravnoteže

Pogledajmo kako se entropija ponaša prilikom uspostave toplinske ravnoteže. Dok su sustavi A' i A'' bili odvojeni, njihov ukupan broj dostupnih stanja bio je $\Omega'(E'_0) \cdot \Omega''(E''_0)$. Kad te sustave dovedemo u toplinski kontakt, ravnotežno stanje novog sustava bit će takvo da će podsustavi imati ravnotežne energije E'_m odnosno E''_m . Ukupan broj dostupnih stanja za takvu raspodjelu energija bit će $\Omega'(E'_m) \cdot \Omega''(E''_m)$. To je veći broj dostupnih stanja nego što je bio ukupan broj dostupnih stanja kad su sustavi bili odvojeni:

$$\Omega'(E'_m) \cdot \Omega''(E''_m) > \Omega'(E'_0) \cdot \Omega''(E''_0) \quad . \quad (4.21)$$

Logaritmiramo li ovu nejednadžbu, neće se promijeniti odnos. Pomnožimo li tada obje strane s k_B , dobit ćemo

$$S'_m + S''_m > S'_0 + S''_0 \quad , \quad (4.22)$$

odnosno

$$S_m > S_0 \quad . \quad (4.23)$$

Riječoma:

Uspostavom toplinske ravnoteže ukupna entropija se povećava.

Ilustrirajmo to primjerom. Promatramo dva jednaka sustava koji prije spajanja imaju različite energije (različite temperature). Funkcijska ovisnost entropije o energiji u ta dva sustava je jednaka pa ih možemo prikazati na istom grafu. Neka je energija prvog sustava prije spajanja E'_0 manja od energije drugog sustava prije spajanja E''_0 . Budući da su sustavi jednaki, nakon spajanja i postizanja toplinske ravnoteže njihove ravnotežne energije će biti jednake:

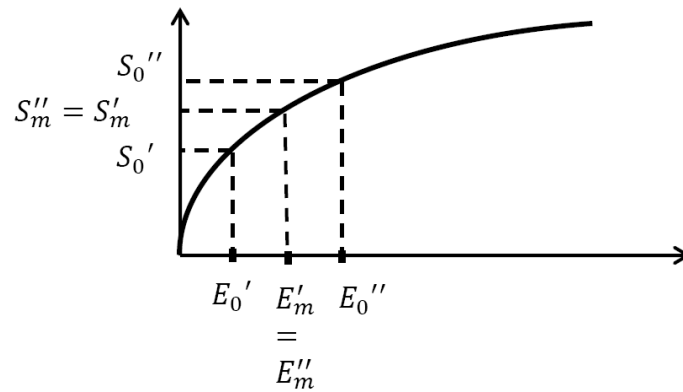
$$E'_m = E''_m = \frac{E'_0 + E''_0}{2} \quad ,$$

¹U sustavima koji imaju ograničen broj mogućih pobuđenja po atomu, temperatura može biti i negativna. Negativna temperatura se postiže, npr., u sustavu paramagnetskih atoma kad je više od polovice atoma u višem stanju. Međutim, mi ovdje proučavamo veliki sustav u kojem nema ograničenja broja pobuđenja po jednome atomu.

dakle točno u sredini između dvije početne vrijednosti. U procesu postizanja toplinske ravnoteže entropija prvog sustava će porasti ($\Delta S' = S'_m - S'_0 > 0$), a entropija drugog sustava će se smanjiti ($\Delta S'' = S''_m - S''_0 < 0$). Međutim, zbog zakrivljenosti (konkavnosti) funkcije $S(E)$ te promjene neće bi jednake po iznosu. Iz slike vidimo da će vrijediti $|\Delta S''| < |\Delta S'|$, odnosno,

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' > 0 . \quad (4.24)$$

Iako smo ovdje razmotrili slučaj dva jednaka sustava, isti zaključak vrijedi s bilo koja dva sustava koja nakon spajanja postižu toplinsku ravnotežu.



Poglavlje 5

Klasična statistička fizika

Klasična statistička fizika razvijena je u 19. stoljeću mnogo prije spoznaje o kvantnoj strukturi. Štoviše, upravo je sofisticirani razvoj klasične statističke fizike doveo do paradoksa koji nazivamo "ultraljubičasta katastrofa" i koji je naveo Maxa Plancka na potrebu kvantizacije energije. Međutim, u mnogim slučajevima klasična statistička fizika dobro opisuje prirodne pojave i mi ćemo se najprije pozabaviti pitanjem pod kojim uvjetima možemo zanemariti činjenicu da se energija raspodjeljuje u kvantnim skokovima.

5.1 Klasična aproksimacija

Harmonijski oscilator

Već smo ranije spomenuli da se vibracije atoma u krutinama i molekulama mogu aproksimativno opisati mehaničkim harmonijskim oscilatorom u kojoj iznos elastične konstante K ovisi o jakosti kemijskih veza među atomima.

U klasičnom harmonijskom oscilatoru, energija koja je u njega pohranjena ovisi o amplitudi oscilacija A prema zakonu $E = \frac{1}{2}KA^2$, a frekvencija oscilacija ovisi samo o masi atoma i iznosu konstante K prema relaciji $\omega_0 = \sqrt{K/m}$. Kvantna mehanika postavlja ograničenje na vrijednosti energije koje mogu biti pohranjene u jednom harmonijskom oscilatoru. Energija oscilatora može poprimiti samo jednu od vrijednosti

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right) \hbar\omega_0 \quad , \quad (5.1)$$

pri čemu n mora biti prirodan broj. Promjena energije oscilatora može se dogoditi samo u kvantnim skokovima iznosa $\Delta E = \hbar\omega_0$. Ako se harmonijski oscilator nalazi u visokopobuđenom stanju,¹ iznosi kvantnih skokova mnogo su manji od ukupne energije možemo reći da se energija mijenja gotovo kontinuirano. To zovemo klasičnom aproksimacijom.

Idealan klasičan plin

Da bismo mogli govoriti o idealnom klasičnom plinu, moramo najprije razjasniti što znače ta dva pojma.

Idealan plin je onaj u kojem je prosječna energija interakcije među česticama mnogo manja od prosječne energije samih čestica, tj. potencijalna energija mnogo je manja od kinetičke energije čestica. Čestice izmjenjuju energiju samo u sudarima i na taj način se uspostavlja toplinska ravnoteža. Da bi ovaj uvjet bio zadovoljen, prosječni razmak među česticama $\bar{a} = \sqrt[3]{V/N}$ mora biti mnogo veći od dosega privlačnih i odbojnih sila među česticama.

Klasičan plin je onaj u kojem možemo u načelu individualizirati čestice, tj. izdvojiti ponašanje pojedine čestice od ostalih. Praktično to znači da prosječni razmak među česticama \bar{a} mora biti

¹Ovaj uvjet praktično je zadovoljen kada je $n > 20$.

mного veći od prosječne de Broglieove valne duljine čestice, koja je pak obrnuto proporcionalna količini gibanja ($\lambda_{dB} = h/p$). Vidjet ćemo kasnije da je prosječna energija jedne čestice plina na temperaturi T dana s

$$\bar{E}_1 = \frac{3}{2}k_B T \quad , \quad (5.2)$$

što daje prosječnu količinu gibanja jedne čestice $\bar{p} = \sqrt{3mk_B T}$. Da bismo mogli govoriti o klasičnome plinu, mora biti zadovoljen uvjet

$$\sqrt[3]{\frac{V}{N}} \gg \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} \quad . \quad (5.3)$$

Ova relacija nam kaže da plin, da bi bio klasičan, mora biti dovoljno razrijeđen i mora biti na dovoljno visokoj temperaturi.

5.2 Ekviparticijski teorem

Ovdje ćemo navesti jedan važan teorem čiji izvod nadilazi opseg ovog kolegija. Izvod počiva na nizu teorema statističke fizike, a koristi i Boltzmannov zakon koji smo također naveli bez izvoda. Međutim, konceptualno je teorem bitan za klasičnu statističku fiziku pa ga navodimo bez izvoda. Ekviparticijski teorem glasi:

U sustavu opisanom klasičnom statističkom mehanikom u toplinskoj ravnoteži, svi neovisni kvadratni članovi u energiji nose jednaku srednju energiju $\frac{1}{2}k_B T$.

Drugim riječima: Energija je jednako raspodijeljena po svim oblicima i stupnjevima slobode. Ilustrirat ćemo posljedice ovog teorema na nekoliko primjera.

Primjer 1: Harmonijski oscilator u jednoj dimenziji
Energija jedne čestice je

$$E_1 = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2m}p_x^2 \quad . \quad (5.4)$$

Energija ima dva kvadratna člana – jedan u x , a jedan u p_x . Prosječna kinetička energija jednaka je prosječnoj potencijalnoj energiji. Prema ekviparticijskom teoremu svaki takav kvadratni član nosi istu srednju energiju:

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T = k_B T \quad . \quad (5.5)$$

Primjer 2: Harmonijski oscilator u tri dimenzije
Energija jedne čestice je

$$E_1 = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}Ky^2 + \frac{1}{2}Kz^2 + \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2m}p_z^2 \quad . \quad (5.6)$$

Energija ima šest kvadratnih članova. Prema ekviparticijskom teoremu svaki takav kvadratni član nosi istu srednju energiju:

$$\bar{E}_1 = 6 \cdot \frac{1}{2}k_B T = 3k_B T \quad . \quad (5.7)$$

Primjer 3: Jednoatomni plin u tri dimenzije

Čestice imaju samo translacijsku kinetičku energiju – tri stupnja slobode. Energija jedne čestice je

$$E_1 = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2m}p_z^2 \quad . \quad (5.8)$$

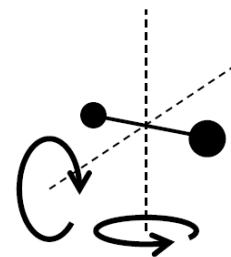
Energija ima tri kvadratna člana. Prema ekviparticijskom teoremu svaki takav kvadratni član nosi istu srednju energiju:

$$\bar{E}_1 = \frac{3}{2}k_B T \quad . \quad (5.9)$$

Primjer 4: Dvoatomni plin u tri dimenzije

Čestice imaju, osim tri translacijska stupnja slobode, još i dva rotacijska stupnja slobode. Energija je pohranjena u rotaciju oko dviju osi okomitih na spojnicu atoma. (Rotacija oku osi molekule ne nosi energiju.) Ovo razmatranje vrijedi i za višeatomnu linearnu molekulu (molekulu u kojoj svi atomi leže na istom pravcu). Energija jedne čestice je

$$E_1 = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2m}p_z^2 + \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 . \quad (5.10)$$



Energija ima pet kvadratnih članova. Prema ekviparticijskom teoremu svaki takav kvadratni član nosi istu srednju energiju:

$$\bar{E}_1 = \frac{5}{2}k_B T . \quad (5.11)$$

Primjer 5: Višeatomni nelinearni plin u tri dimenzije

Molekule imaju tri translacijska stupnja slobode i tri rotacijska stupnja slobode. Energija je pohranjena u rotaciju oko tri okomite osi. Energija jedne čestice je

$$E_1 = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2m}p_z^2 + \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2 . \quad (5.12)$$

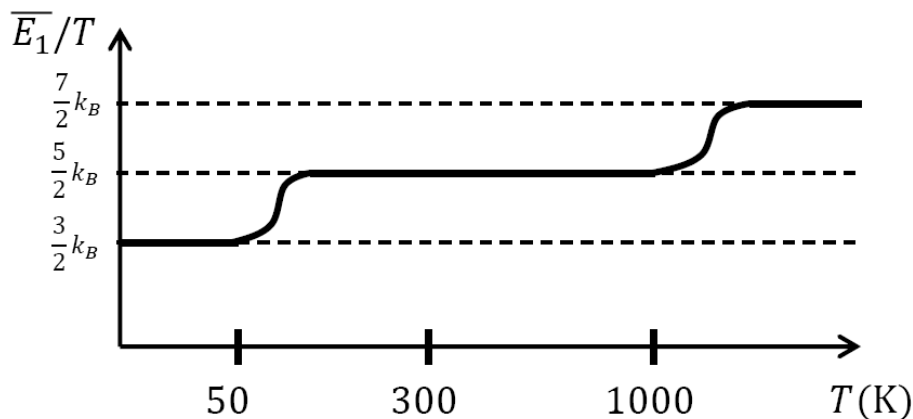
Energija ima šest kvadratnih članova. Prema ekviparticijskom teoremu svaki takav kvadratni član nosi istu srednju energiju:

$$\bar{E}_1 = \frac{6}{2}k_B T = 3k_B T . \quad (5.13)$$

U primjerima 4 i 5 nismo uzimali u obzir vibracije atoma u molekuli. Ti stupnjevi slobode su "zamrznuti" na sobnoj temperaturi. Oni počinju biti aktivni na mnogo višim temperaturama kada $k_B T > \hbar\omega_0$, obično iznad 1000 K. Ako promatramo dvoatomni plin, iznad te temperature javljaju se još dva stupnja slobode (potencijalna i kinetička energija harmonijskog oscilatora). Tada imamo ukupno 7 stupnjeva slobode u dvoatomnom plinu pa je $\bar{E}_1 = \frac{7}{2}k_B T$.

Na jako niskim temperaturama (ispod 50 K) rotacijski stupnjevi se ne pobuđuju toplinom pa su i oni smrznuti. Ostaju samo tri translacijska stupnja slobode.

Shematski, ovisnost prosječne energije o temperaturi možemo prikazati na slici dolje.



5.3 Toplinski kapacitet

Definirat ćemo još jednu fizikalnu veličinu: Toplinski kapacitet je količina potrebna da se temperatura promijeni za jednu jedinicu.

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} . \quad (5.14)$$

Mjerna jedinica za toplinski kapacitet je J/K. Kada se radi o malim promjenama temperature, pišemo

$$C = \frac{\delta Q}{dT} , \quad (5.15)$$

pri čemu smo s δQ označili nepravi diferencijal topline. Zovemo ga "nepravim" zato što ovisi o načinu na koji se toplina dovodi. Stoga prilikom definiranja toplinskog kapaciteta moramo ujedno i navesti koju makroskopsku veličinu držimo konstantnom. Toplinu možemo dovoditi uz konstantan volumen ili uz konstantan tlak. U magnetskim sustavima možemo držati konstantno polje i sl. Zato ćemo toplinske kapacitete razlikovati pomoću indeksa koji označava konstantnu veličinu:

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V ; C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p ; C_B = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_B . \quad (5.16)$$

U slučaju dovođenja topline uz konstantan volumen, sva toplina pretvara se u unutarnju energiju E (ne obavlja se rad) pa možemo pisati

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V . \quad (5.17)$$

Specifični toplinski kapacitet je toplinski kapacitet po jedinici mase sustava:

$$c = \frac{C}{m} . \quad (5.18)$$

I ovdje možemo definirati koja je veličina konstantna: c_V , c_p , itd. Da bismo nekom tijelu povećali temperaturu za ΔT ne obavljajući rad, moramo mu dovesti toplinu $Q = \Delta E$, pri čemu je

$$\Delta E = m \cdot c \cdot \Delta T . \quad (5.19)$$

Molarni toplinski kapacitet je toplinski kapacitet podijeljen s količinom tvari:

$$C_{V,m} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V ; C_{p,m} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p . \quad (5.20)$$

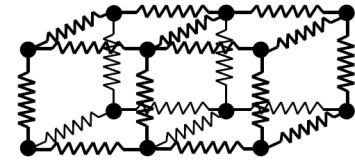
Budući da je ukupna (unutarnja) energija sustava jednaka $E = N \cdot \bar{E}_1 = n \cdot N_A \cdot \bar{E}_1$, pri čemu je \bar{E}_1 prosječna energija jedne čestice, a $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$, možemo pisati

$$C_{V,m} = N_A \left(\frac{\partial \bar{E}_1}{\partial T} \right)_V . \quad (5.21)$$

Vidimo da molarni toplinski kapacitet ovisi samo o broju stupnjeva slobode jedne čestice.

5.3.1 Toplinski kapacitet čvrstih tvari

U kristalima atomi imaju dobro definirane ravnotežne položaje oko kojih mogu titrati. Dobra aproksimacija tog titranja je trodimenzionalni harmonijski oscilator. Budući da nema translacijske kinetičke energije, unutarnja energija sustava raspoređuje se uglavnom na vibracijska pobuđenja atoma. Prema Einsteinovom modelu za toplinski kapacitet kristala, svaki atom možemo promatrati pojedinačno u efektivnom potencijalu svih ostalih atoma.² Svaki atom, dakle, ima 6 stupnjeva slobode. Primijenimo li ekviparticijski teorem u klasičnoj granici, prosječna energija jednog atoma je



$$\bar{E}_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} k_B T = 3k_B T \quad (5.22)$$

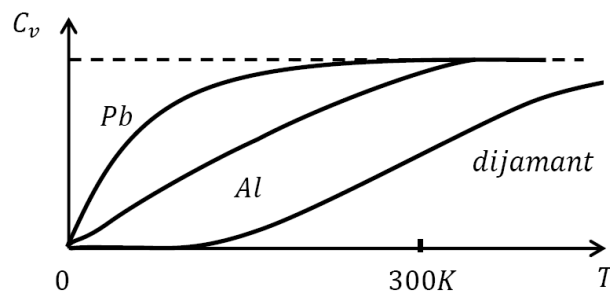
Ako imamo N atoma u kristalu, onda je ukupna energija

$$E = 3Nk_B T \quad (5.23)$$

Toplinski kapacitet je

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = 3Nk_B \quad (5.24)$$

To je poznati Dulong-Petitov zakon iz 1819. godine. On vrijedi na sobnoj temperaturi za gotovo sve kristale. Međutim, opaženo je da ne vrijedi za dijamant i to se nije moglo objasniti klasičnom statističkom fizikom. Opaženo je i da za druge kristale dolazi do odstupanja od Dulong-Petitovog zakona kada toplinski kapacitet mjerimo na znatno nižim temperaturama.



Ova odstupanja objašnjena su u okviru kvantne fizike kada je pokazano da su na nižim temperaturama kvanti vibracijskih pobuđenja veći od prosječne energije \bar{E}_1 koja se može rasporediti po jednom atomu.

Izrazimo li molarni toplinski kapacitet iz Dulong-Petitovog zakona, dobivamo:

$$C_{V,m} = 3N_A k_B = 3R \quad (5.25)$$

Ovdje smo uveli konstantu R koju nazivamo *univerzalna plinska konstanta*³ koja iznosi

$$R = N_A k_B = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad (5.26)$$

²Jedan drugi, također klasični model, predložio je Debye: Umjesto da proučavamo pojedinačne atome, možemo cijeli kristal promatrati kao valno sredstvo sa stojnim valovima. Svaki stojni val donosi dva stupnja slobode pa na kraju opet imamo $6N$ stupnjeva slobode i rezultat je isti kao iz Einsteinovog modela.

³iako smo ju uveli proučavajući kristale

5.3.2 Toplinski kapacitet idealnog plina

U prethodnom odjeljku 5.2 odredili smo prosječnu energiju čestice u jednoatomnom, dvoatomnom i troatomnom plinu. Pomoću tih izraza lako ćemo odrediti toplinske kapacitete plinova uz konstantan volumen.

Za jednoatomni plin je $\bar{E}_1 = \frac{3}{2}k_B T$ pa je ukupna energija $E = N \cdot \frac{3}{2}k_B T = \frac{3}{2}nRT$. Parcijalnom derivacijom po T dobivamo toplinski kapacitet:

Za jednoatomni plin:

$$C_V = \frac{3}{2}nR \quad , \quad (5.27)$$

Za dvoatomni plin:

$$C_V = \frac{5}{2}nR \quad , \quad (5.28)$$

Za višeatomni plin:

$$C_V = 3nR \quad . \quad (5.29)$$

5.4 Tlak idealnog plina

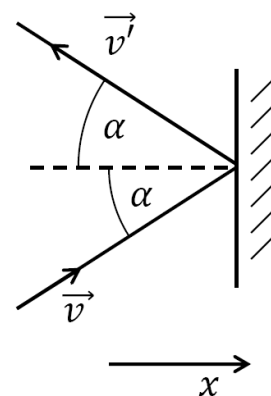
Pokušat ćemo tlak idealnog plina izračunati iz Newtonovih zakona uz neke aproksimacije klasične statističke fizike. Primijenit ćemo

Kinetičko molekularni model

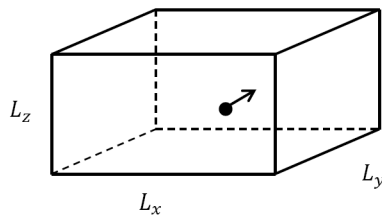
Ovaj pojednostavljeni model temelji se na nekoliko pretpostavki:

- Proučavamo idealni plin (molekule su točkaste mase).
- Molekule plina gibaju se stalnom brzinom, međusobno se ne sudaraju, a sudaraju se samo sa stijenkama posude. Sudari su elastični.
- Plin je u posudi konstantnog volumena V , a zidovi posude su masivni.
- Plin se sastoji od velikog broja N čestica jednake mase m .

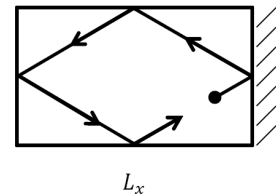
Budući da je sudar čestice sa zidom elastičan, čestica se odbija pod istim kutom pod kojim je udarila u zid. Neka je koordinatni sustav postavljen tako da je x -os okomita na zid. U tom slučaju, prilikom sudara x -komponenta brzine mijenja predznak ($v'_x = -v_x$), a y i z komponente brzine se ne mijenjaju ($v'_y = v_y$ i $v'_z = v_z$). Za promjenu brzine u sudaru vrijedi $\Delta v_x = -2v_x$, $\Delta v_y = \Delta v_z = 0$. Promjena količine gibanja čestice je $\Delta p_x = -2mv_x$. Prema trećem Newtonovom zakonu, čestica zidu preda impuls $\Delta p_x = 2mv_x$.



Veza energije i tlaka



Zamislimo jednu česticu plina brzine \vec{v} u pravokutnoj kutiji dimenzija L_x , L_y i L_z . Volumen kutije je $V = L_x \cdot L_y \cdot L_z$. U svakom sudaru s plohom $A = L_y \cdot L_z$ čestica preda impuls $\Delta p_x = 2mv_x$. Nakon sudara čestica putuje s komponentom brzine u $-x$ smjeru, odbija se od suprotnog zida koji je udaljen L_x i opet vraća do ovog zida te ponovno sudara. Vrijeme između dva uzastopna sudara je $\Delta t = 2L_x/v_x$. Prosječna sila kojim jedna čestica djeluje na površinu A je



$$\langle F_1 \rangle = \left\langle \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \right\rangle = \left\langle \frac{2mv_x}{\frac{2L_x}{v_x}} \right\rangle = \frac{\langle mv_x^2 \rangle}{L_x} . \quad (5.30)$$

Prema ekviparticijskom teoremu, prosječna energija jedne čestice u jednoatomnom plinu je

$$\langle E_1 \rangle = \left\langle \frac{1}{2}mv_x^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}mv_y^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}mv_z^2 \right\rangle = \frac{3}{2}k_B T .$$

Ta energija jednako je raspodijeljena na sva tri kvadratna člana u energiji:

$$\left\langle \frac{1}{2}mv_x^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}mv_y^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}mv_z^2 \right\rangle = \frac{1}{2}k_B T .$$

Uvrstimo li to u izraz za prosječnu silu jedne čestice, dobivamo $\langle F_1 \rangle = k_B T / L_x$. Budući da u plinu imamo N čestica, ukupna sila na plohu A je $F = N \langle F_1 \rangle$. Tlak je $p = F/A$, odnosno

$$p = \frac{Nk_B T}{L_x \cdot A} = \frac{Nk_B T}{V} .$$

Time smo dobili *jednadžbu stanja idealnog plina*:

$$pV = Nk_B T , \quad (5.31)$$

odnosno

$$pV = nRT . \quad (5.32)$$

5.5 Jednadžbe stanja

U relaciji (5.32) povezali smo tri *varijable stanja*: volumen, tlak i temperaturu. Varijable stanja su dobro definirane veličine koje opisuju neki sustav kad se nalazi u toplinskoj ravnoteži. Osim triju spomenutih, možemo definirati mnoštvo drugih varijabli stanja kao što su unutarnja energija E , entropija S , magnetizacija M (u magnetskim sustavima), polarizacija P (u dielektricima) i slično. Međutim, varijable stanja u nekom sustavu utječu jedne na druge. Ne možemo ih mijenjati potpuno nezavisno. Tako u slučaju idealnog plina dvije varijable možemo kontrolirati, a treća je tada određena jednadžbom stanja (5.32).

Općenito, *jednadžba stanja* je veza među varijablama stanja za neki sustav (tijelo). U slučaju idealnog plina, ona ima izuzetno jednostavan oblik i vrijedi egzaktno u širokom rasponu.

U slučaju krutina, veza između volumena, tlaka i temperature nije tako jednostavna, ali može se izraziti aproksimativnom relacijom:

$$V = V_0 [1 + \beta (T - T_0) - \kappa (p - p_0)] \quad . \quad (5.33)$$

Veličina β naziva se *koeficijent volumne ekspanzije*, a veličina κ je *kompresibilnost*. Ova relacija vrijedi kada je sustav u blizini stanja određenog varijablama V_0 , p_0 i T_0 . Koeficijent volumne ekspanzije je definiran relacijom

$$\beta = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p_0, V_0, T_0} \quad . \quad (5.34)$$

U većini krutina β ne ovisi jako o temperaturi u širem temperaturnom intervalu pa možemo govoriti o "konstanti volumne ekspanzije".

Ako proučavamo metalne šipke (npr. željezničke tračnice), onda vezu između temperature i duljine šipke možemo napisati:

$$L = L_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad , \quad (5.35)$$

pri čemu je

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_{T_0} \quad (5.36)$$

koeficijent linearne ekspanzije. Veličine α i β su povezane. Zamislimo da je promatrano tijelo kocka načinjena od izotropnog materijala duljine stranice L_0 . Volumen kocke je tada $V_0 = L_0^3$. Koeficijent volumne ekspanzije je:

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{dL} \frac{\partial L}{\partial T} = \frac{1}{V_0} 3L^2 \alpha L_0 = \frac{1}{V_0} 3\alpha V_0 \quad , \quad (5.37)$$

odnosno, $\beta = 3\alpha$.

Promatrani sustav (kruto tijelo, tekućina, dielektrik,...) može biti toliko složen da nije moguće napisati čak ni aproksimativnu formulu za jednadžbu stanja. Ponekad je moguće jednadžbu stanja u takvim slučajevima zadati grafički.

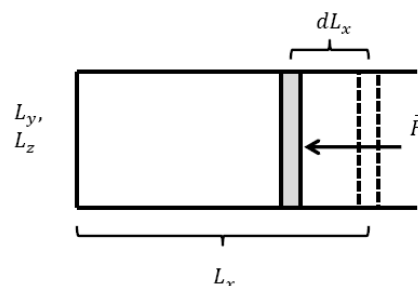
Poglavlje 6

Termodinamika

U dosadašnjim poglavljima proučavali smo raspodjelu energije unutar sustava bez promjene volumena. Sva toplina dovedena ili odvedena iz sustava mijenjala je unutarnju energiju. Dopustimo li da promatrani sustav mijenja volumen, dio energije pretvorit će se u rad.

6.1 Rad prilikom promjene volumena

Prisjetimo se da je rad definiran kao djelovanje sile na nekom putu. Sustav kojemu se ne mijenja dimenzija ne može obavljati rad – za rad je nužna promjena volumena. Kao primjer promotrimo neki plin u posudi s pomičnim stapom kao na slici. Neka su poprečne dimenzije posude L_y i L_z nepromjenjive, a vanjska sila može pomicati stap mijenjajući duljinu posude L_x . Djelić rada koji vanjska sila F obavi mijenjajući L_x za dL_x iznosi



$$\delta W = -F \cdot dL_x \quad . \quad (6.1)$$

Ovdje smo za rad upotrijebili nepravi diferencijal jer će se pokazati da rad potreban za neku promjenu volumena ovisi o načinu na koji se on obavlja (npr. o brzini). U primjeru koji promatramo promjena duljine je negativna ($dL_x < 0$), a rad vanjske sile koji to uzrokuje definiran je tako da bude pozitivan. Ovo će biti općeniti dogovor: Ako vanjska sila obavlja rad nad našim sustavom, taj rad smatramo pozitivnim. Ako naš sustav obavlja rad nad okolinom, taj rad smatramo negativnim. Budući da za tlak p i promjenu volumena dV možemo pisati

$$p = F/(L_y L_z) \quad ; \quad dV = L_y L_z dL_x \quad , \quad (6.2)$$

relaciju (6.1) možemo pisati

$$\delta W = -p \cdot dV \quad . \quad (6.3)$$

Treba napomenuti da je ovdje važan tlak u sustavu tik uz stap, što ne mora uvijek biti i prosječni tlak u cijelom sustavu.¹

Ako je sustav toplinski izoliran, ali može izmjenjivati rad s okolinom, promjena (unutarnje) energije sustava bit će jednaka djeliću rada:

$$dE = \delta W \quad . \quad (6.4)$$

Uočimo da smo upotrijebili pravi diferencijal energije jer energija opisuje stanje sustava, a s druge strane koristimo nepravi diferencijal rada jer rad ovisi o načinu kako ga obavljamo (npr. brzo ili sporo).

¹Na slici je promatrani sustav plin pa govorimo o tlaku plina u posudi. Međutim, ako promatramo neku krutinu, također možemo govoriti o tlaku koji je tada proporcionalan Youngovom modulu krutine.

6.2 Prvi zakon termodinamike

Ako sustav može s okolinom izmjenjivati i toplinu i rad, ukupna promjena energije sustava će biti

$$dE = \delta Q + \delta W \quad . \quad (6.5)$$

Relacija (6.5) je iskaz **prvog zakona termodinamike**. To je u stvari zakon očuvanja energije koji kaže da će promjena (unutarnje) energije sustava biti jednaka zbroju dovedene topline i rada uloženog u sustav. Oдавde slijedi i dogovor o predznacima – ako se sustavu dovodi toplina i u njega ulaže rad, onda će δQ i δW biti pozitivne veličine, tj. povećavat će se energija sustava. Ako pak sustav predaje toplinu okolini ili obavlja rad nad okolinom, onda će δQ i δW biti negativne veličine, tj. smanjivat će se energija sustava.

6.3 Gotovo ravnotežni procesi

Za bolje razumijevanje termodinamičkih procesa korisno je uvesti idealizaciju *gotovo ravnotežnih procesa*. To su procesi u kojima je sustav u svakom trenutku praktično u stanju unutarnje ravnoteže, tj. temperatura je jednaka u svakom djeliću sustava u nekom trenutku, a isto vrijedi i za tlak. Da bi proces bio gotovo ravnotežan, mora se odvijati dovoljno sporo kako bi sustav u svakom trenutku mogao pratiti promjene temperature i tlaka. Općenito uvodimo pojam relaksacijskog vremena u nekom sustavu, kao mjeru za uspostavu ravnotežnog stanja u sustavu nakon vanjske promjene tlaka ili temperature. Relaksacijsko vrijeme može u nekim sustavima i procesima biti reda veličine milisekunde, a u nekima to mogu biti sati ili dani. Zaključimo, gotovo ravnotežni procesi su oni koji se događaju sporo na skali karakterističnog relaksacijskog vremena za dani sustav i dani proces.

Jedno od bitnih svojstava gotovo ravnotežnih procesa je da su **reverzibilni**. Za neki kružni proces reći ćemo da je reverzibilan ako se sustav na kraju ciklusa vrati u prvobitno stanje, ali se i okolina mora vratiti u prvobitno stanje. U takvom procesu sustav prolazi kroz niz gotovo ravnotežnih stanja, što znači da u svakom trenutku možemo za sustav definirati varijable stanja (temperaturu, tlak, volumen, energiju, entropiju itd.)

Radi bolje predodžbe o jednom reverzibilnom kružnom procesu razmotrimo slučaj plina kao promatranog sustava u izoliranoj posudi s pomičnim stapom, te natovarenih kolica i elastične opruge kao okoline. Pojedini stupnjevi u procesu prikazani su na Slici 6.1.

Temeljna jednadžba termodinamike

Za gotovo ravnotežne, tj. *reverzibilne* procese vrijedi temeljna jednadžba termodinamike:

$$dE = TdS - pdV \quad . \quad (6.6)$$

Uočimo da u procesu u kojem nema rada (promjene volumena) vrijedi $dE = TdS = \delta Q$. Usporedimo li temeljnu jednadžbu termodinamike za reverzibilne procese s prvim zakonom termodinamike, uočiti ćemo da u reverzibilnim procesima vrijedi

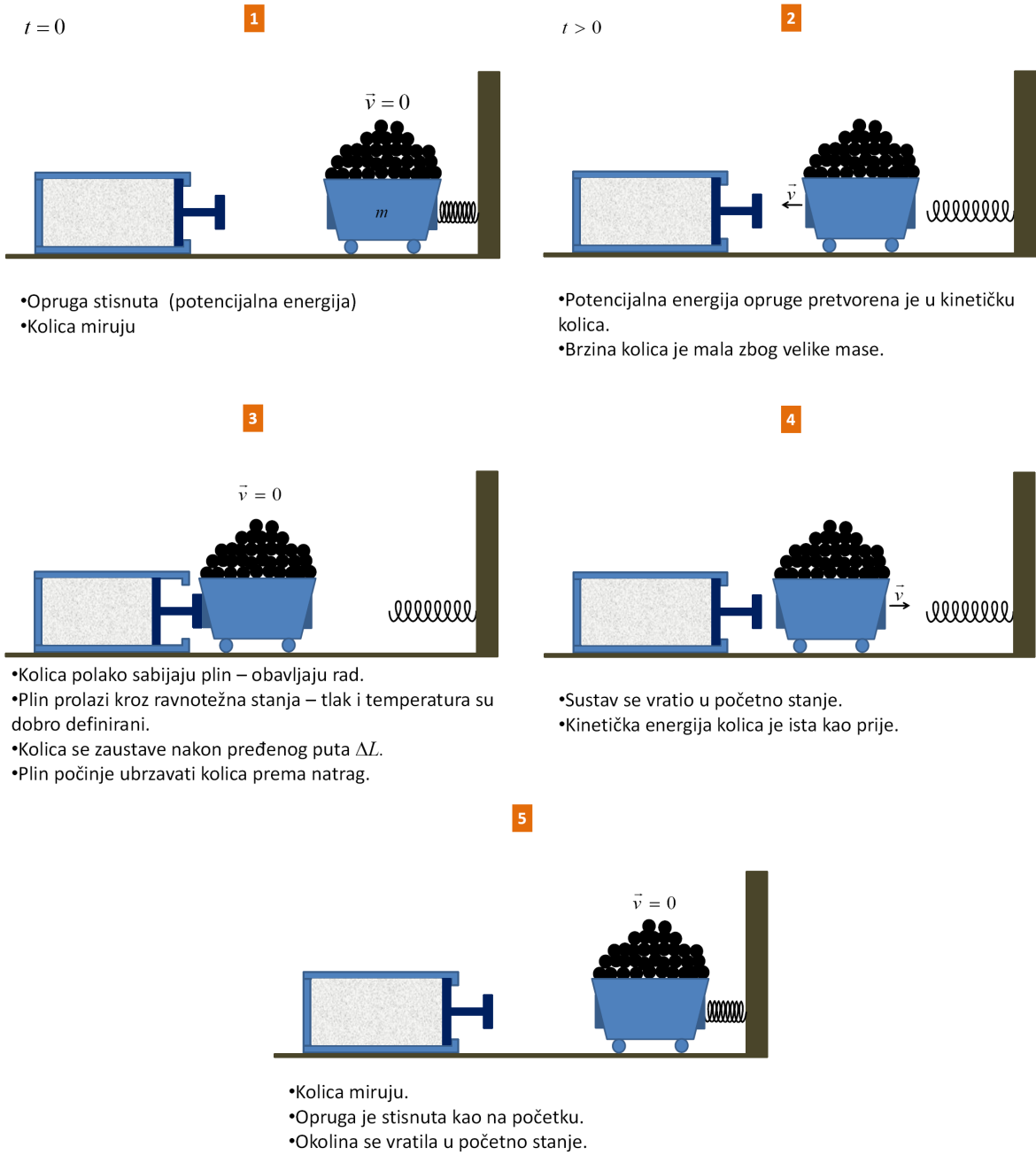
$$\delta Q = TdS \quad ; \quad \delta W = -pdV \quad , \quad (6.7)$$

odnosno, dE postaje pravi diferencijal. To nam omogućuje da unutarnju energiju možemo integrirati:

$$E_2 - E_1 = \int_1^2 dE = \int_1^2 (TdS - pdV) \quad . \quad (6.8)$$

Za reverzibilni kružni proces vrijedi

$$\Delta E = \oint dE = 0 \quad . \quad (6.9)$$



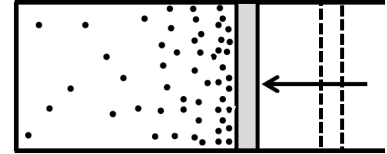
Slika 6.1: Primjer gotovo ravnotežnog procesa

6.4 Neravnotežni procesi

Ako su procesi brži od relaksacijskog vremena u nekom sustavu, oni postaju ireverzibilni. Tijekom procesa sustav ne uspijeva postizati toplinsku ravnotežu pa ne možemo definirati varijable stanja.

Pogledajmo primjer plina u cilindru sa stapom. Zbog brzine procesa, tlak i temperatura ne uspijevaju se izjednačiti preko cijelog volumena plina. Tlak je lokalno povećan uz rub stapa. Taj lokalni tlak određuje rad koji obavlja vanjska sila:

$$\delta W = -p_{loc}dV > -\bar{p}dV \quad , \quad (6.10)$$



pri čemu je \bar{p} usrednjeni tlak preko cijelog volumena. Nakon relaksacijskog vremena usrednjeni tlak postaje varijabla stanja dobro definirana u cijelom sustavu. Dio energije se naknadno raspodijeli u porast topline δQ , čime proces postaje ireverzibilan. Dakle, za razliku od reverzibilnog procesa u kojem vrijede jednakosti izražene u jednadžbi (6.7), za ireverzibilne procese vrijede nejednakosti:

$$\delta Q < TdS \quad ; \quad \delta W > -pdV \quad , \quad (6.11)$$

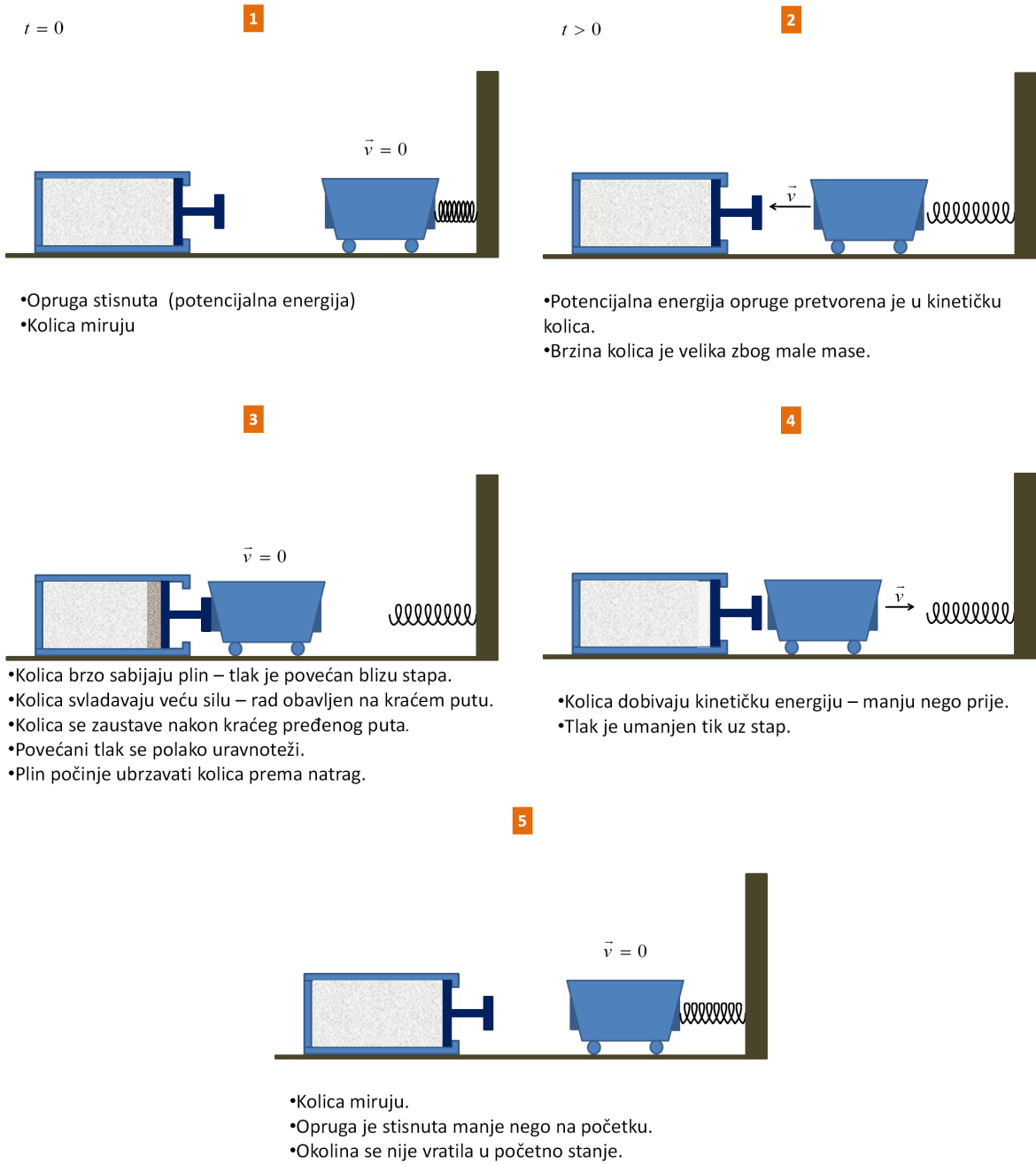
Za promjenu unutarnje energije dE sustav je primio manju toplinu δQ iz okoline, ali je zato dio uloženog rada pretvoren u unutarnju energiju. Kao glavni zaključak ovog razmatranja možemo reći:

U ireverzibilnom procesu uvijek vrijedi

$$dS > \frac{dQ}{T} \quad . \quad (6.12)$$

Entropija uvijek raste u ireverzibilnim procesima. Primjeri takvih procesa su neelastični sudari, trenje, neelastično savijanje šipke, savijanje auto-gume i sl.

Radi bolje predodžbe o jednom ireverzibilnom kružnom procesu razmotrimo ponovno slučaj plina kao promatranog sustava u izoliranoj posudi s pomičnim stapom, te, ovaj put, praznih kolica i elastične opruge kao okoline. Pojedini stupnjevi u procesu prikazani su na Slici 6.2.

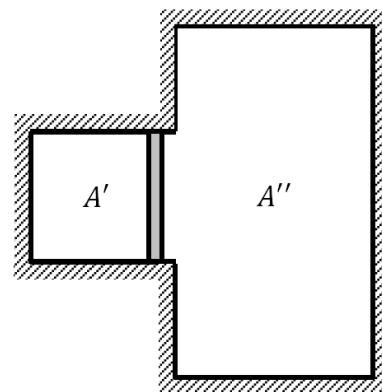


Slika 6.2: Primjer neravnotežnog procesa

6.5 Termodinamička ravnoteža

U prethodnim poglavljima razmatrali smo toplinsku ravnotežu.

Ona se postiže kada dva tijela izjednače temperature. Tada nismo dopuštali da sustavi mijenjaju volumene. Sada ćemo dopustiti da sustavi mogu međusobno izmjenjivati i toplinu i rad. Pogledajmo primjer na slici. Neka su sustavi A' i A'' međusobno povezani pomičnim stapom načinjenim od materijala koji dobro prenosi toplinu. Među sustavima djeluju sile, a moguć je i prijenos topline. Kažemo da postoji *termodinamičko međudjelovanje*. Neka su sustavi izolirani od vanjskog svijeta, tj. nije moguće dovodenje ili odvođenje topline, niti promjena ukupnog volumena. Ako sustavi u trenutku spajanja nisu bili u ravnoteži, doći će do pomicanja stapa i do prijenosa topline kroz stap. Ravnotežno stanje dvaju sustava je ono koje je najvjerojatnije (koje ima najveći broj dostupnih mikroskopskih stanja). To je stanje u kojem su izjednačene temperature dvaju sustava $T' = T''$, ali i tlakovi u njima $p' = p''$. Tada kažemo da je postignuta *termodinamička ravnoteža*.



Proces postizanja termodinamičke ravnoteže je neravnotežan proces u kojem ukupna entropija poraste:

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' > 0 \quad . \quad (6.13)$$

6.6 Drugi zakon termodinamike

Termodinamički procesi odvijaju se uvijek tako da entropija ukupnog sustava poraste.

$$\Delta S > 0 \quad . \quad (6.14)$$

Ovaj zakon nam kaže da će ukupni sustav uvijek težiti postizanju makroskopskog stanje najveće vjerojatnosti. Kada bismo imali gotovo ravnotežne procese, mogli bi vrijediti $\Delta S = 0$, međutim, takvi procesi ne postoje. Proces opisani u odjeljku (6.3) su idealizacija i ne postoje u stvarnosti.

Podsjetimo se da je prvi zakon termodinamike samo iskaz zakona očuvanja energije. Međutim, drugi zakon termodinamike nam govori o smjeru u kojem se zbivaju procesi.

Povijesno je drugi zakon termodinamike bio formuliran na razne načine. Spomenimo dva iskaza koja fenomenološki formuliraju taj isti zakon. Max Planck je drugi zakon termodinamike formulirao riječima: "Nemoguće je konstruirati stroj koji bi u kružnom procesu prouzrokovao samo dizanje utega i hlađenje spremnika." Još je jasnija formulacija koju je izrekao lord Kelvin: "Nemoguće je hlađenjem najhladnijeg spremnika dobiti mehanički rad." Nažalost, ovaj zakon je neumoljiv. Kad bi ga se moglo prevladati, mogli bismo ogromne količine topline koje su spremjene u svjetskim oceanima upotrijebiti za pogon brodova koji po njima plove. Prvi zakon termodinamike ne bi nam priječio da neznatno snizimo temperaturu mora i tako dobivenu energiju upotrijebimo za pokretanje brodskih propelera. Međutim, drugi zakon termodinamike nam kaže da procesi ne mogu spontano ići u tom smjeru. Takav stroj nije moguć. Njemački kemičar Wilhelm Ostwald formulirao je drugi zakon termodinamike riječima "Perpetuum mobile druge vrste nije moguć". Kakvi strojevi koji pretvaraju toplinu u rad su mogući?

Mogući strojevi

A) Ako imamo djelatnu tvar (koja ima ulogu stroja) i samo jedan toplinski spremnik, moguće je dobiti rad tako što će stroj preuzimati toplinu iz spremnika i volumnom ekspanzijom obavljati rad. Međutim, ako želimo imati kružni proces, na kraju procesa stroj mora imati isti volumen kao na početku. Stoga u drugom dijelu procesa moramo uložiti rad da bismo smanjili volumen stroja i pri tome vraćamo toplinu spremniku. Ako je proces bio gotovo ravnotežan, na kraju će ukupni dobiveni rad biti nula. U idealnom slučaju takav stroj je moguć, ali je *beskoristan*.²

B) Da bismo u kružnom procesu mogli dobiti *koristan* rad, moramo imati *dva toplinska spremnika* različitih temperatura T' i T'' .

Neka u sklopu jednog ciklusa stroj primi toplinu $Q' > 0$ od spremnika na T' , preda toplinu $Q'' < 0$ spremniku na T'' i obavi koristan rad $W < 0$ nad okolinom.³ Tražimo da stroj na kraju ciklusa ima istu unutarnju energiju kao na početku, tj. $\Delta E = 0$. Prvi zakon termodinamike nam daje $\Delta E = Q' + Q'' + W = 0$. Ako u obzir uzmemo predznake, dobivamo

$$|W| = Q' - |Q''| \quad . \quad (6.15)$$

Vidimo da je koristan rad moguće dobiti ako je stroj primio više topline nego što je predao. Pogledajmo je li to moguće a da ne kršimo suvremenu formulaciju drugog zakona termodinamike prema kojem ukupna entropija u procesu mora porasti ($\Delta S > 0$). Pogledajmo odvojeno entropije dvaju spremnika i stroja. Prvi spremnik gubi toplinu $-Q' < 0$ pa mu se entropija smanji $\Delta S' = -Q'/T' < 0$. Drugi spremnik dobiva toplinu $|Q''| > 0$ pa mu entropija poraste $\Delta S'' = |Q''|/T'' > 0$. Stroj se vrati u početno stanje pa mu je entropija na kraju ciklusa jednaka kao na početku. Prema tome, da bi drugi zakon termodinamike bio zadovoljen, mora vrijediti:

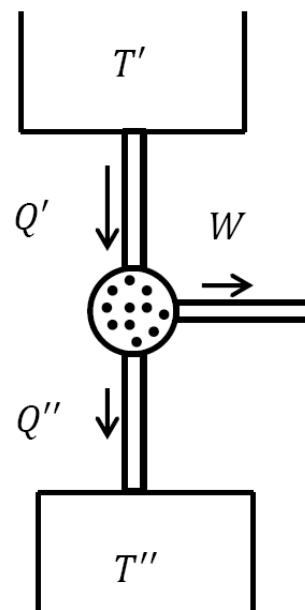
$$\Delta S' + \Delta S'' = \frac{-Q'}{T'} + \frac{|Q''|}{T''} > 0 \quad , \quad (6.16)$$

odnosno

$$\frac{Q'}{|Q''|} < \frac{T'}{T''} \quad . \quad (6.17)$$

Budući da prema (6.15) za dobivanje korisnog rada mora biti $Q' > |Q''|$, onda je jasno da mora biti $T' > T''$, tj. spremnik od kojeg stroj uzima toplinu mora biti topliji od spremnika kojemu stroj predaje toplinu.⁴

Napomenimo da se *dio topline mora predati hladnijem spremniku*, tj. $|Q''| > 0$. Kada bismo željeli postići da ne moramo predati toplinu drugom spremniku ($|Q''| = 0$), entropija hladnijeg spremnika ne bi se promijenila ($\Delta S'' = |Q''|/T'' = 0$) pa bi ukupna promjena entropije u procesu bila negativna ($\Delta S = \Delta S' = -Q'/T' < 0$), što bi bilo u suprotnosti s drugim zakonom termodinamike. Uočimo da je toplina koju moramo predati hladnijem spremniku to manja što je njegova temperatura T'' niža.



²U stvarnosti ne postoje ravnotežni procesi pa bismo u ovakvom stroju morali više rada uložiti prilikom kompresije nego što dobijemo prilikom ekspanzije. Bili bismo na gubitku.

³Razlika uloženog i dobivenog rada mora biti manja od nule.

⁴Ovaj zaključak vrijedio bi čak i u slučaju da je promatrani kružni proces gotovo ravnotežan. U tom slučaju bi u relaciji (6.17) umjesto znaka nejednakosti stajao znak jednakosti, ali zbog $Q' > |Q''|$ i dalje mora vrijediti $T' > T''$.

Koeficijent iskorištenja

Koeficijent iskorištenja toplinskog stroja definiramo kao omjer korisnog rada i topline uzete iz toplijeg spremnika:

$$\eta = \frac{|W|}{Q'} = \frac{Q' - |Q''|}{Q'} = 1 - \frac{|Q''|}{Q'}. \quad (6.18)$$

U slučaju gotovo ravnotežnog procesa vrijedilo bi $\eta = 1 - T''/T'$, međutim stvarni procesi nikad nisu idealno ravnotežni pa zbog nejednakosti (6.17) uvijek vrijedi

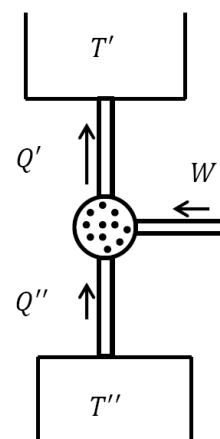
$$\eta < 1 - \frac{T''}{T'}. \quad (6.19)$$

Uočimo da je iskoristivost to veća što je veći omjer temperatura toplijeg i hladnijeg spremnika T'/T'' .

Hladnjak

Drugi zakon termodinamike nam kaže i da toplina ne može spontano prelaziti s hladnijeg tijela na toplije. Da bismo hladniji spremnik ohladili tako da toplina prijeđe na topliji spremnik, moramo uložiti vanjski rad. Takav stroj nazivamo hladnjakom. Zamislimo da postoji kružni proces u kojem toplina koju uzimamo hladnijem spremniku prelazi na topliji spremnik bez neto uloženog vanjskog rada (tj. $Q' = -Q'' > 0$). Tada bi promjena entropije sustava bila $\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = Q'/T' - Q'/T'' < 0$, u suprotnosti s drugim zakonom termodinamike. Prema tome, mora biti $Q' > |Q''|$, a tu razliku možemo postići vanjskim radom hladnjaka $W > 0$.

Hladnjak radi na principu obrnutom od toplinskog stroja, kako je prikazano na slici.



6.7 Treći zakon termodinamike

Hladnjakom možemo sniziti temperaturu nekog tijela. Nakon toga možemo pokrenuti novi ciklus i postići još nižu temperaturu. Možemo li takvim postupcima ohladiti neko tijelo na temperaturu apsolutne nule?

Ovdje ćemo, radi potpunosti, izreći fenomenološku formulaciju trećeg zakona termodinamike:

*Nemoguće je ohladiti neki sustav na temperaturu
apsolutne nule konačnim brojem procesa.*

Suvremenu formulaciju ovog zakona već smo izrekli kad smo proučavali funkcionalno ponašanje entropije: Entropija sustava teži u nulu kada apsolutna temperatura teži u nulu.

$$S \rightarrow 0 \quad \text{za} \quad T \rightarrow 0 \quad (6.20)$$

6.8 Toplinski kapaciteti

U petom poglavlju proučavali smo toplinski kapacitet u *izohornim* procesima – procesima u kojima se volumen sustava ne mijenja. Toplinski kapacitet određen je omjerom dovedene topline δQ i promjene temperature dT . Ove veličine možemo mjeriti. Budući da se u izohornim procesima ne obavlja rad, mogli smo zaključiti da se sva dovedena toplina pretvara u unutarnju energiju dE . Zato smo mogli pisati

$$C_v = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V .$$

Unutarnju energiju samu po sebi ne možemo mjeriti, nego o njoj zaključujemo iz dovedene topline. Budući da varijable stanja ne možemo mijenjati nezavisno, jednadžbe stanja nam kažu da u ovakvim izohornim procesima nužno dolazi do promjene tlakova. Ako proučavamo plinove, možemo ih držati u posudi konstantnog volumena, a tlak možemo kontrolirati zidovima posude. Međutim, ako proučavamo krutine ili tekućine, nije lako održavati konstantan volumen jer se javljaju ogromne sile prilikom promjene temperature. Moramo uzeti u obzir promjene volumena, a najčešće tada gledamo *izobarne* procese – procese u kojima je tlak konstantan. Najčešće je to atmosferski tlak.

Toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku definiran je relacijom:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dT} \right)_p . \quad (6.21)$$

Dovedena toplina djelomično se pretvara u unutarnju energiju, a dijelom prelazi u rad koji sustav čini prema okolini:

$$\delta Q = dE - \delta W = dE + p dV . \quad (6.22)$$

Unutarnja energija je varijabla stanja. Ona općenito ovisi o temperaturi, ali može ovisiti i o volumenu. Npr., u krutinama se energija raspodjeljuje na kinetičke i potencijalne stupnjeve slobode. Potencijalni članovi ovisi o razmaku atoma, tj. o volumenu krutine. Takve ovisnosti nema u idealnim plinovima, ali u realnim plinovima unutarnja energija može ovisiti i o volumenu. Dakle, općenito možemo pisati

$$E = E(T, V) . \quad (6.23)$$

Totalni diferencijal te funkcije je

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T dV = C_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T dV . \quad (6.24)$$

Dovedenu toplinu sada možemo pisati

$$\delta Q = C_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p \right] dV . \quad (6.25)$$

U slučaju idealnih plinova unutarnja energija ne ovisi o volumenu pa vrijedi

$$\delta Q = C_V dT + p dV , \quad (6.26)$$

odnosno, toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku je

$$C_p = \frac{\delta Q}{dT} = C_V + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p . \quad (6.27)$$

Iz jednadžbe stanja idealnog plina $pV = nRT$ dobivamo

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{p}$$

pa konačno za idealne plinove dobivamo

$$C_p = C_V + nR . \quad (6.28)$$

Pokazali smo da za monoatomne plinove vrijedi $C_V = \frac{3}{2}nR$ pa je za njih $C_p = \frac{5}{2}nR$. Za dvoatomne plinove vrijedi $C_V = \frac{5}{2}nR$ pa je za njih $C_p = \frac{7}{2}nR$. Za višeatomne plinove je $C_V = 3nR$, a $C_p = 4nR$. Omjer toplinskih kapaciteta označavamo s

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} . \quad (6.29)$$

Za jednoatomne plinove je $\gamma = 5/3$, za dvoatomne je $\gamma = 7/5$, a za višeatomne je $\gamma = 4/3$.

6.9 Termodinamički potencijali

U jednadžbi (6.23) izrazili smo unutarnju energiju sustava kao funkciju dviju varijabli stanja – temperature i volumena. Podsjetimo li se predavanja iz mehanike ili elektriciteta, vidjet ćemo da smo i tada definirali potencijalne energije kao funkcije nekih varijabli – koordinata. Sila (gravitacijska ili Coulombova) je tada bila derivacija (gradijent) potencijalne energije.

U termodinamici smo naučili da postoji mnoštvo varijabli stanja. Neke od tih varijabli stanja možemo kontrolirati u određenom procesu, a druge su onda određene jednadžbama stanja. Varijable koje kontroliramo nazivamo "koordinatama", a one varijable koje su funkcije koordinata možemo nazvati "potencijali". Mogli bismo tako definirati čitavo mnoštvo potencijala, ali u praksi su se pokazali korisnima 4 termodinamička potencijala, koja sva imaju dimenziju energije. To su *unutarnja energija* (E), *entalpija* (H), *Helmholtzova slobodna energija* (F) i *Gibbsova slobodna energija* (G). Svaki od tih potencijala koristan je u nekim vrstama procesa pa ih sada detaljnije opisujemo.

A) Unutarnja energija (E)

Budući da je energija sustava varijabla stanja, ona ovisi samo o koordinatama. Tako i promjena energije ΔE ovisi samo o razlici početnog i konačnog stanja:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \int_1^2 dE , \quad (6.30)$$

pri čemu je dE pravi diferencijal. Međutim, želimo li mjeriti promjenu energije, mjerljive veličine su toplina i rad, koje svaka za sebe nisu varijable stanja pa su njihovi diferencijali nepravilni: $dE = \delta Q + \delta W$. Kako bismo izbjegli da rezultat ovisi o načinu na koji smo doveli toplinu i obavili rad, odabiremo izohoran proces $V = \text{konst.}$ u kojem je $\delta W = 0$. Tada razliku energija možemo izmjeriti tako što mjerimo toplinu, bez obzira bio proces ravnotežan ili ne:

$$E_2 - E_1 = \int_1^2 \delta Q = Q . \quad (6.31)$$

Zato je unutarnja energija dobar potencijal za promatranje izohornih procesa. I početno i konačno stanje je ravnotežno.

Razmotrimo sada kako unutarnja energija ovisi o drugim varijablama. Ako je proces ravnotežan, temeljna jednadžba termodinamike (6.6) nam kaže $dE = TdS - pdV$. Taj izraz sugerira da su koordinate ove funkcije entropija (S) i volumen (V).

$$E = E(S, V) . \quad (6.32)$$

Matematički gledano, ako neka funkcija ovisi o dvije koordinate, njezin totalni diferencijal je

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S . \quad (6.33)$$

Usporedimo li ovaj izraz s temeljnom jednadžbom (6.6), vidjet ćemo da možemo izjednačiti:

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V ; \quad p = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S . \quad (6.34)$$

Dobili smo temperaturu i tlak kao derivacije potencijala po koordinatama. Možemo reći da temperatura i tlak predstavljaju "sile" u ovom procesu.

B) Entalpija (H)

Česti su procesi u kojima je vanjski tlak konstantan (izobarni procesi). Npr., u kemijskim reakcijama je to obično atmosferski tlak $p_0 = \text{konst.}$. Pretpostavljamo da je sustav na početku i na kraju procesa bio u termodinamičkoj ravnoteži, tj. da je $p_1 = p_2 = p_0$. U tijeku procesa mogla je postojati neravnoteža sustava tako da tlak nije bio jednak po cijelom sustavu, ali tik uz graničnu plohu tlak je jednak vanjskome, a to je relevantno za obavljene rad. Sustav s okolinom izmjenjuje i toplinu i rad. Obavljeni rad je

$$W = -p_0 \int_1^2 dV = -p_0 (V_2 - V_1) . \quad (6.35)$$

Nepravi diferencijal topline je prema prvom zakonu termodinamike $\delta Q = dE + p_0 dV$ pa je ukupna izmijenjena toplina u procesu:

$$Q = \int_1^2 \delta Q = (E_2 + p_0 V_2) - (E_1 + p_0 V_1) = (E_2 + p_2 V_2) - (E_1 + p_1 V_1) . \quad (6.36)$$

Možemo definirati veličinu *entalpija*:

$$H = E + pV . \quad (6.37)$$

Vidimo da je entalpija dobar potencijal za izobarne procese jer je toplina koju sustav u takvom procesu izmijeni s okolinom jednaka razlici entalpija:

$$Q = H_2 - H_1 . \quad (6.38)$$

Razmotrimo koje su prirodne varijable (koordinate) za entalpiju. Totalni diferencijal entalpije možemo pisati:

$$dH = d(E + pV) = dE + p dV + V dp = T dS - p dV + p dV + V dp , \quad (6.39)$$

pri čemu smo u zadnjoj jednakosti primijenili temeljnu jednadžbu termodinamike. Nakon kraćenja, izraz za diferencijal entalpije glasi

$$dH = T dS + V dp , \quad (6.40)$$

iz čega je jasno da su prirodne varijable za entalpiju entropija i tlak:

$$H = H(S, p) . \quad (6.41)$$

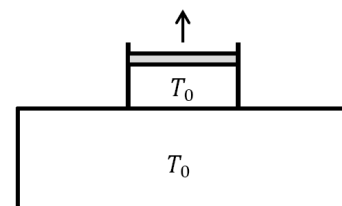
Usporedimo li matematički razvoj totalnog diferencijala entalpije s izrazom (6.40) dobivamo

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p ; \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S . \quad (6.42)$$

Čisto formalno, dodavši unutrašnjem energiji član pV , u diferencijalu entalpije poništili smo član $-p dV$ i dodali član $V dp$. Time je tlak postao nezavisna varijabla (koordinata) umjesto volumena.

C) Helmholtzova slobodna energija (F ili A)

Pogledajmo koji je potencijal dobar želimo li promatrati izotermne procese. Neka je promatrani sustav u dodiru s toplinskim spremnikom kao na slici. I početna i konačna temperatura jednaka je temperaturi toplinskog spremnika T_0 , ali sustav mijenja tlak i volumen od početnog p_1 i V_1 do konačnog p_2 i V_2 . Time sustav obavlja rad prema vanjskom svijetu. Koliki je maksimalan mogući koristan rad $|W|$ koji na taj način možemo dobiti?



Drugi zakon termodinamike nam kaže da ukupna promjena entropije u takvom procesu mora biti pozitivna:

$$\Delta S_{\text{uk}} = \Delta S_0 + \Delta S > 0 \quad , \quad (6.43)$$

pri čemu je ΔS_0 promjena entropije toplinskog spremnika, a ΔS promjena entropije promatranog sustava. Ako je Q toplina koju sustav primi od spremnika, onda imamo

$$-\frac{Q}{T_0} + \Delta S > 0 \quad . \quad (6.44)$$

Promjena energije promatranog sustava je prema prvom zakonu termodinamike $\Delta E = Q + W$ pa, uvrstimo li to u gornju jednadžbu, dobivamo

$$\frac{W - \Delta E}{T_0} + \Delta S > 0 \quad , \text{odnosno} \quad W - \Delta E + T_0 \Delta S > 0 \quad . \quad (6.45)$$

Uz pretpostavku da je početno i konačno stanje ravnotežno, vrijedi $\Delta E = E_2 - E_1$ i $\Delta S = S_2 - S_1$. Budući da je proces izoterman, početna i konačna temperatura su jednake ($T_1 = T_2 = T_0$) pa gornju relaciju možemo pisati

$$(E_2 - T_2 S_2) - (E_1 - T_1 S_1) - W < 0 \quad . \quad (6.46)$$

To nas motivira da uvedemo potencijal

$$F = E - TS \quad , \quad (6.47)$$

koji nazivamo *Helmholtzova slobodna energija*. Ovaj termodinamički potencijal se podjednako često označava i slovom A . Oznaka F učestalija u literaturi iz fizike, a oznaka A u kemijskoj literaturi.

Uz ovu definiciju, nejednadžba (6.46) koja opisuje izotermne procese glasi

$$F_2 - F_1 - W < 0 \quad , \quad (6.48)$$

pri čemu je $W < 0$ rad koji sustav obavlja. Dakle, koristan rad predan okolini je $|W| = -W$ pa vrijedi

$$\Delta F + |W| < 0 \quad . \quad (6.49)$$

U izotermnom procesu uspostavljanje ravnoteže je proces smanjivanja Helmholtzove energije $\Delta F < 0$. Pritom je maksimalan mogući koristan rad

$$|W| < |\Delta F| \quad . \quad (6.50)$$

Slobodna energija ne može biti negativna. Ako neki sustav ima slobodnu energiju F i uspijemo postići da u izotermnom procesu konačna slobodna energija bude $F_2 = 0$, onda je F iznos energije raspoloživ za obavljanje rada u takvom procesu.

Ostaje da razmotrimo koje su prirodne varijable za Helmholtzovu slobodnu energiju $F = E - TS$. Totalni diferencijal je

$$dF = dE - TdS - SdT = TdS - pdV - TdS - SdT \quad , \quad (6.51)$$

pri čemu smo upotrijebili temeljnu jednadžbu termodinamike. Čisto formalno, oduzimanje člana TS od unutarnje energije, poništilo je u temeljnoj jednadžbi član TdS i dodalo član $-SdT$. Za totalni diferencijal smo dobili

$$dF = -pdV - SdT \quad , \quad (6.52)$$

što znači da su nam prirodne varijable za Helmholtzovu slobodnu energiju volumen V i temperatura T :

$$F = F(V, T) \quad . \quad (6.53)$$

Temperatura je postala nezavisna varijabla (koordinata) koju kontroliramo toplinskim spremnikom. Pogledajmo još koje "sile" dobivamo derivacijama ovog potencijala:

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \quad ; \quad S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad . \quad (6.54)$$

Ovdje smo promatrali izoteran proces. Međutim, promatrani sustav je na početku mogao biti na nekoj temperaturi $T_1 \neq T_0$. I dalje bi vrijedio zaključak da uspostava ravnoteže zahtijeva $\Delta F < 0$, bez obzira je li $T_1 < T_0$ ili je $T_1 > T_0$.

D) Gibbsova slobodna energija (G)

Tri dosad uvedena termodinamička potencijala smatrali smo prirodnim za procese u kojima jednu koordinatu držimo konstantnom (volumen za E , tlak za H i temperaturu za F). Sada ćemo razmotriti slučaj kada je promatrani sustav u dodiru sa spremnikom koji je istodobno toplinski i tlačni. Ako su tlak, temperatura i volumen jedine tri varijable koje promatramo i ako fiksiramo tlak i temperaturu, jasno je da postoji samo jedno ravnotežno stanje u kojem je volumen određen jednadžbom stanja. Zato u ovom slučaju ne možemo promatrati prijelaz iz jednog ravnotežnog stanja u drugo, nego početno stanje mora biti neravnotežno, a promatrat ćemo proces uspostavljanja termodinamičke ravnoteže.⁵

Pristupit ćemo ovom pitanju matematički formalno. Mi želimo definirati potencijal kojemu će prirodne varijable biti tlak i temperatura. To možemo učiniti tako da unutarnjoj energiji E dodamo član koji će u temeljnoj jednadžbi (6.6) zamijeniti član TdS u $-SdT$ i još član koji će zamijeniti $-pdV$ u Vdp . To ćemo dobiti tako da novi potencijal bude

$$G = E - TS + pV \quad . \quad (6.55)$$

Ovaj potencijal zovemo *Gibbsova slobodna energija*. Dodavanjem navedenih članova, totalni diferencijal postaje $dG = TdS - pdV - TdS - SdT + pdV + Vdp$, odnosno, nakon skraćivanja:

$$dG = -SdT + Vdp \quad , \quad (6.56)$$

a prirodne varijable postaju temperatura i tlak:

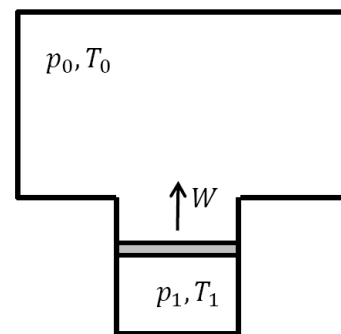
$$G = G(T, p) \quad . \quad (6.57)$$

Pogledajmo još koje "sile" dobivamo derivacijama ovog potencijala:

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p \quad ; \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial p} \right)_T \quad . \quad (6.58)$$

Na početku procesa promatrani sustav je bio na nekoj temperaturi $T_1 \neq T_0$ i tlaku $p_1 \neq p_0$. Proces uspostave ravnoteže s toplinskim i tlačnim spremnikom (T_0 ; p_0) zahtijeva $\Delta G < 0$.

⁵Ako bismo uveli još jednu varijablu stanja, onda bi postojala mogućnost da se volumen i ta nova varijabla stanja mijenjaju prolazeći kroz gotovo ravnotežni proces.



Kemijski potencijal

Uveli smo 4 termodinamička potencijala koji svi imaju dimenziju energije. Zamislimo da imamo dva jednaka sustava koja imaju sve varijable jednake. Ako ih gledamo kao cjelinu ($V = V_1 + V_2$; $S = S_1 + S_2$), jasno je da će unutarnja energija cijelog sustava biti dvostruko veća nego energija svakog pojedinačnog:

$$E(V, S) = E(V_1, S_1) + E(V_2, S_2) = 2 \cdot E(V_1, S_1) \quad . \quad (6.59)$$

Slično vrijedi i za entalpiju i za Helmholtzovu slobodnu energiju:

$$H(S, p) = 2 \cdot H(S_1, p) \quad ; \quad F(V, T) = 2 \cdot F(V_1, T) \quad . \quad (6.60)$$

Međutim, i tlak i temperatura ostat će nepromijenjeni ako spojimo sustave. Ipak, Gibbsova energija trebala bi biti dvostruko veća:

$$G(p, T) = 2 \cdot G(p, T) \quad . \quad (6.61)$$

Ovu jednakost moguće je postići samo ako je $G(p, T) = 0$. Ovo je paradoksalna situacija i definiranje Gibbsove energije u takvom slučaju ne bi imalo smisla.

Rješenje ovog paradoksa potražiti ćemo u uvođenju još jedne varijable stanja – broja čestica u sustavu N . Ako sustave s brojem čestica N_1 i N_2 gledamo kao cjelinu, ukupni broj čestica je $N = N_1 + N_2$. Gibbsova energija postaje funkcija triju koordinata

$$G(p, T, N) \quad , \quad (6.62)$$

a Gibbsova energija cjeline sada može biti dvostruko veća za dvostruko veći sustav:

$$G(p, T, N) = 2 \cdot G(p, T, N_1) \quad . \quad (6.63)$$

Vidimo da je Gibbsova energija proporcionalna s brojem čestica. Možemo pisati

$$G(p, T, N) = N \cdot \mu(p, T) \quad , \quad (6.64)$$

pri čemu smo definirali veličinu *kemijski potencijal* kao Gibbsovu energiju jedne čestice.⁶

⁶Ova definicija je uobičajena u fizici. Međutim, u kemijskoj literaturi se kemijski potencijal definira kao Gibbsova energija jednog mola tvari preko relacije $G = n\mu(p, T)$, pri čemu je n množina tvari.

Poglavlje 7

Termodinamika idealnog plina

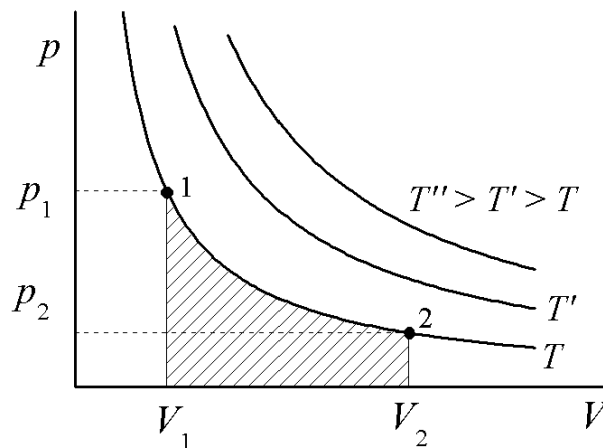
Idealni plin je najjednostavniji modelni sustav u kojem možemo provesti termodinamičke račune. U ovom poglavlju pretpostavit ćemo da su svi procesi gotovo ravnotežni, a jednačba stanja idealnog plina $pV = nRT$ jednostavno povezuje sve varijable stanja.

7.1 Izotermna ekspanzija

U ovom procesu posuda s plinom je u trajnom dodiru s toplinskim spremnikom na temperaturi T . Zbog toga vrijedi Boyle-Mariotteov zakon

$$pV = \text{konst.} \quad , \quad (7.1)$$

koji je fenomenološki otkriven još u 17. stoljeću. On nam daje odnos tlaka i volumena za neku konstantnu temperaturu. Stoga ovakav proces možemo prikazati u p - V dijagramu, koji je koristan za izračunavanje rada u termodinamičkim procesima. Sva stanja u izotermnom procesu nalaze se na jednoj hiperboli čiji položaj je određen temperaturom. Ta krivulja (hiperbola) naziva se *izoterma*.



Promatramo proces u kojem je početno stanje određeno vrijednostima varijabli p_1 , V_1 i T , a konačno stanje vrijednostima p_2 , V_2 i T . Želimo li izračunati rad, morat ćemo integrirati $\delta W = -pdV$, a varijabla integracije je volumen. Stoga ćemo upotrijebiti jednačbu stanja da tlak izrazimo pomoću volumena: $p = nRT/V$. Integriramo izotermu od stanja 1 do stanja 2, a obavljeni rad odgovara površini ispod krivulje:

$$W = - \int_1^2 pdV = -nRT \int_1^2 \frac{dV}{V} = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad . \quad (7.2)$$

Obavljeni rad jednak je po iznosu iscrtanoj površini na slici.

Unutarnja energija idealnog plina ne ovisi o volumenu pa je $\Delta E = 0$. Toplina iz spremnika sva je pretvorena u rad:

$$Q = |W| = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (7.3)$$

Od svih termodinamičkih potencijala, u izohornom procesu najviše nas zanima Helmholtzova energija F . Njezina promjena je

$$\Delta F = \Delta E - T\Delta S = -T\Delta S = -Q , \quad (7.4)$$

odnosno

$$\Delta F = W . \quad (7.5)$$

Uspjeli smo dobiti maksimalan koristan rad.

7.2 Adijabatska ekspanzija

Ako je sustav toplinski izoliran, a prema vanjskom svijetu može obavljati rad, onda govorimo o *adijabatskom procesu* – procesu u kojem nema izmjene topline s okolinom.¹ Promjena unutarnje energije jednaka je radu: $dE = \delta W$, pri čemu je $\delta W = -pdV$. Koristimo definiciju toplinskog kapaciteta $dE = C_V dT$ i jednadžbu stanja $pV = nRT$ pa dobivamo:

$$C_V dT = -\frac{nRT}{V} dV . \quad (7.6)$$

Da bismo mogli integrirati, razdvojiti ćemo varijable T i V tako što ćemo ovu jednadžbu podijeliti s T :

$$C_V \frac{dT}{T} = -nR \frac{dV}{V} . \quad (7.7)$$

Integriranje od početnog do konačnog stanja

$$C_V \int_1^2 \frac{dT}{T} = -nR \int_1^2 \frac{dV}{V} \quad (7.8)$$

daje

$$C_V \ln \frac{T_2}{T_1} = -nR \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (7.9)$$

Antilogaritmiranjem dobivamo

$$T_2 V_2^{nR/C_V} = T_1 V_1^{nR/C_V} , \quad (7.10)$$

Što daje vezu između temperature i volumena u bilo kojem trenutku adijabatskog procesa:

$$TV^{nR/C_V} = \text{konst.} , \quad (7.11)$$

a iznos konstante određuje se iz početnih uvjeta.

Za crtanje *adijabate* u p - V dijagramu trebamo relaciju koja povezuje tlak i volumen. Pomoću jednadžbe stanja u gornjoj jednadžbi zamijenimo temperaturu: $T = pV/nR$ pa dobijemo

$$\frac{p}{nR} V^{1+nR/C_V} = \text{konst.} . \quad (7.12)$$

Eksponent u toj jednadžbi možemo pisati

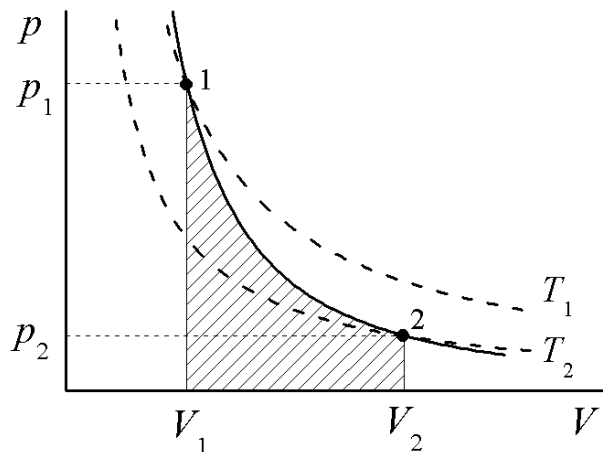
$$1 + \frac{nR}{C_V} = \frac{C_V + nR}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} = \gamma , \quad (7.13)$$

¹Adijabatska aproksimacija često se koristi i u slučajevima kada se ekspanzija ili kompresija događa jako brzo, tako da ne stigne doći do izmjene topline.

Sada jednačba adijabate glasi

$$pV^\gamma = \text{konst.} \quad (7.14)$$

Budući da je u plinovima uvijek $\gamma > 1$, adijabata je u p - V dijagramu strmija od izoterme, kako je prikazano na slici. Konstanta je određena početnim ili konačnim vrijednostima: $\text{konst.} = p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$.



Određimo rad u adijabatskom procesu:

$$W = - \int_1^2 p dV = -\text{konst.} \int_1^2 V^{-\gamma} dV = -\text{konst.} \left[\frac{V_2^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] \quad (7.15)$$

Uvrštavajući vrijednosti za konstantu dobivamo

$$W = \frac{-p_2V_2}{1-\gamma} + \frac{p_1V_1}{1-\gamma} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma-1} < 0 \quad (7.16)$$

Sustav obavlja rad prema vanjskom svijetu pa je $W < 0$.

7.3 Izohorni proces

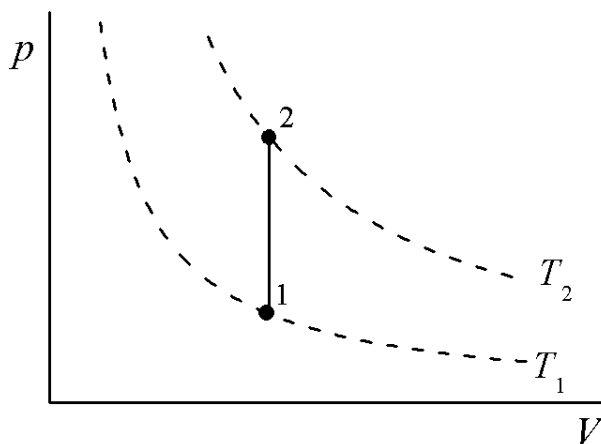
U izohornom procesu nema promjene volumena pa je $\delta W = 0$. U p - V dijagramu *izohora* je vertikalna crta pa je površina ispod nje jednaka nuli.

Dovedena toplina jednaka je promjeni unutarnje energije

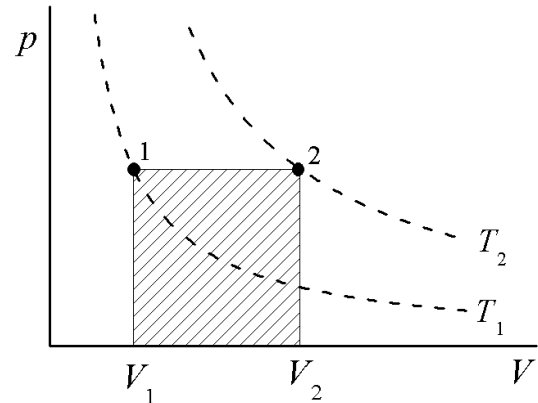
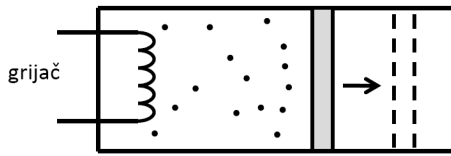
$$Q = \Delta E = C_V (T_2 - T_1) \quad (7.17)$$

Za odnos tlaka i temperature vrijedi

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 \quad (7.18)$$



7.4 Izobarni proces



U ovom procesu posuda je u dodiru s tlačnim spremnikom, a toplina se dovodi, npr. električnim grijačem.² Kao tlačni spremnik najčešće imamo atmosferu pa je onda tlak na kojem se proces događa približno jednak 1000 hPa. Dovedena toplina pretvara se u promjenu unutarnje energije i u rad ($Q = \Delta E - W$). Rad je lako izračunati budući da je funkcija konstanta:

$$W = - \int_1^2 p dV = -p \cdot (V_2 - V_1) \quad (7.19)$$

i po iznosu je jednak iscrtanoj površini na slici. Dovedena toplina je

$$Q = \Delta E + p \cdot (V_2 - V_1) = C_V \cdot (T_2 - T_1) + nR \cdot (T_2 - T_1) = (C_V + nR) \cdot (T_2 - T_1) \quad , \quad (7.20)$$

što konačno daje

$$Q = C_p \cdot (T_2 - T_1) \quad . \quad (7.21)$$

7.5 Entropija idealnog plina

Entropija je varijabla stanja. Stoga promjena entropije između početnog i konačnog stanja ne ovisi o načinu na koji se proces odvijao, ako su početno i konačno stanje ravnotežni. U gotovo ravnotežnim procesima vrijedi $dS = \delta Q/T$ pa je

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \quad . \quad (7.22)$$

Iz prvog zakona termodinamike imamo $\delta Q = dE - \delta W = C_V dT + p dV$ pa uz jednadžbu stanja imamo za nepravi diferencijal topline:

$$\delta Q = C_V dT + nRT \frac{dV}{V} \quad , \quad (7.23)$$

a pravi diferencijal entropije je

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \quad . \quad (7.24)$$

Pokazat ćemo da, za razliku od izmijenjene topline, promjena entropije neće ovisiti o "putu" kojim dolazimo od početnog do konačnog stanja. Za primjer ćemo uzeti dva "puta". U prvom ćemo najprije izotermno mijenjati volumen od početnog do konačnog, a zatim izohorno mijenjati temperaturu od početne do konačne. Drugi put će najprije izohorno mijenjati temperaturu od početne do

²Toplina se može i odvoditi, npr. hladnjakom.

konačne, a zatim izotermno mijenjati volumen od početnog to konačnog. Ova dva načina dolaska od početnog do konačnog stanja shematski su prikazana u T - V dijagramu na slici. U oba slučaja promjena entropije će biti

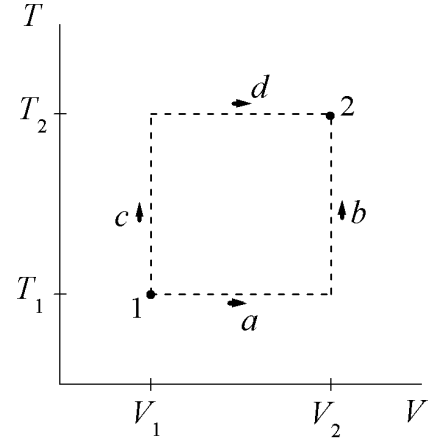
$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \right) . \quad (7.25)$$

Najprije pogledajmo put $1 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow 2$. Na tom putu je

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \int_a \frac{\delta Q}{T} + \int_b \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} nR \frac{dV}{V} + \int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dT}{T} = \\ &= nR \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \ln \frac{T_2}{T_1} . \end{aligned} \quad (7.26)$$

Pogledamo li put $1 \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow 2$, vidjet ćemo da na tom putu vrijedi

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \int_c \frac{\delta Q}{T} + \int_d \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_2} nR \frac{dV}{V} = \\ &= C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} . \end{aligned} \quad (7.27)$$



što je identičan rezultat. Promjena entropije ne ovisi o putu – to je funkcija stanja. Ovaj zaključak, međutim, ne vrijedi za δQ i δW . Pokažimo to:

Za put $1 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow 2$ imamo

$$Q_{1ab2} = \int_{V_1}^{V_2} nRT_1 \frac{dV}{V} + \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V (T_2 - T_1) \quad (7.28)$$

$$W_{1ab2} = - \int_a pdV = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (7.29)$$

Za put $1 \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow 2$ imamo

$$Q_{1cd2} = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT + \int_{V_1}^{V_2} nRT_2 \frac{dV}{V} = C_V (T_2 - T_1) + nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (7.30)$$

$$W_{1cd2} = - \int_d pdV = -nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (7.31)$$

Vidimo da je $Q_{1cd2} \neq Q_{1ab2}$ i $W_{1cd2} \neq W_{1ab2}$, odnosno, toplina i rad ovise o načinu kako se proces odvija

U izrazu (7.24) iskazali smo diferencijal entropije u slučaju da su varijable (koordinate) temperatura i volumen. Ako umjesto volumena možemo kontrolirati tlak, tj. ako je $S(T, p)$, možemo taj izraz preraditi tako da ovisi o temperaturi i tlaku. Diferenciramo li jednadžbu stanja $pV = nRT$, dobivamo

$$pdV + Vdp = nRdT . \quad (7.32)$$

Kad tu jednadžbu s obje strane podijelimo s pV (što je jednako nRT), veza između triju diferencijala je

$$\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} . \quad (7.33)$$

Sada možemo u izrazu (7.24) zamijeniti $dV/V = dT/T - dp/p$ pa dobivamo

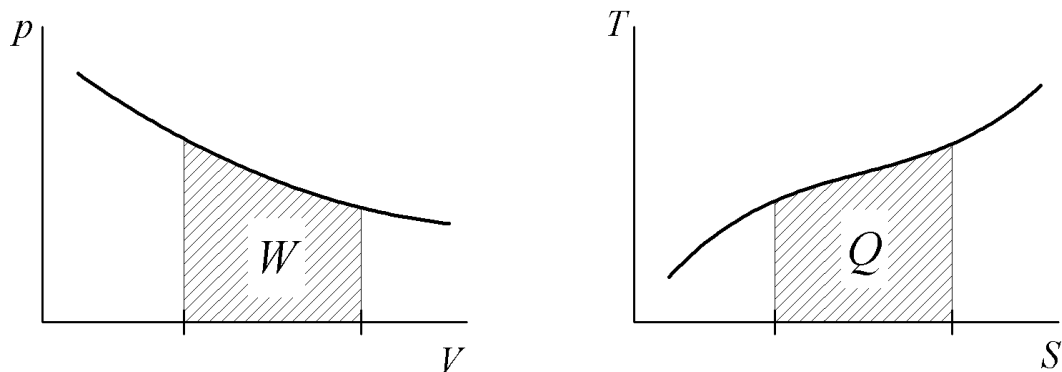
$$dS = C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p} , \quad (7.34)$$

pri čemu smo upotrijebili $C_p = C_V + nR$. Razlika entropija početnog i konačnog stanja je

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - nR \ln \frac{p_2}{p_1} . \quad (7.35)$$

Grafičko prikazivanje rada i topline

Želimo li u nekom procesu grafički prikazati rad, moramo se sjetiti da je nepravilni diferencijal rada $\delta W = -pdV$. Stoga je za prikaz rada najpogodniji p - V dijagram u kojem ukupni rad možemo prikazati kao površinu ispod krivulje koja opisuje proces. Slično, želimo li prikazati izmjenu topline, zbog $\delta Q = TdS$, najpogodniji je prikaz procesa u T - S dijagramu, u kojemu je ukupna toplina prikazana kao površina ispod krivulje koja opisuje proces.



Važno je znati kako u tim dijagramima izgledaju jednostavni procesi – izohorni, adijabatski, izotermni i izobarni. Već smo pokazali da je u p - V dijagramu izobara prikazana horizontalnom crtom, izohora vertikalnom, izoterma hiperbolom, a adijabata je strmija od izoterme.

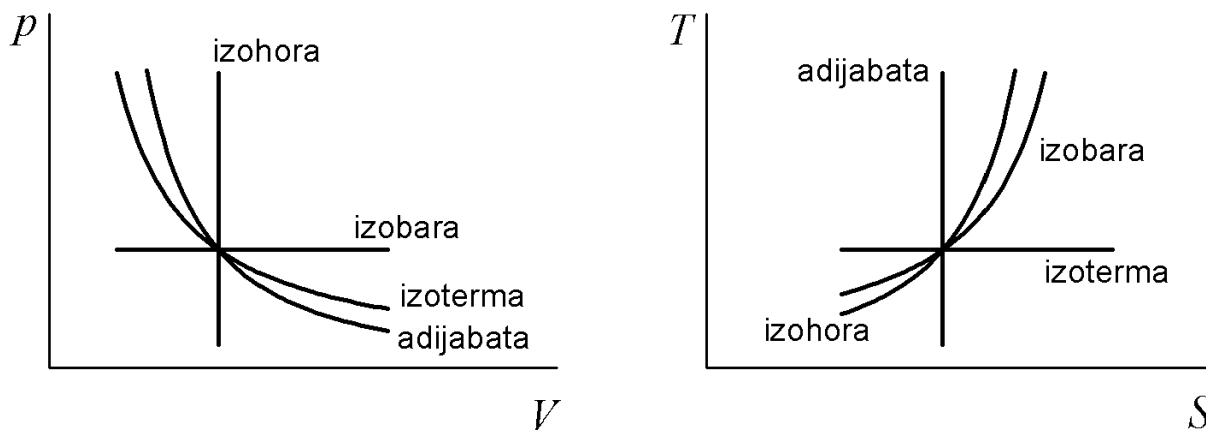
U T - S dijagramu je jasno da će izoterma biti horizontalna crta (konstanta), a adijabata će biti vertikalna crta.³ Izobara i izohora će biti rastuće funkcije. Koja od njih će biti strmija? Jednadžba (7.34) nam za izobaru daje $dS = C_p dT/T$ iz čega dobivamo

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \frac{T}{C_p} \quad (7.36)$$

Jednadžba (7.24) nam za izohoru daje $dS = C_V dT/T$ iz čega dobivamo

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V = \frac{T}{C_V} \quad (7.37)$$

Budući da je $C_p > C_V$, iz gornjih jednadžbi vidimo da je izohora strmija od izobare u T - S dijagramu.



³Adijabata se naziva još i *izentropa*.

7.6 Smjesa idealnih plinova

Često promatramo plin koji se sastoji od kemijski različitih molekula koje koegzistiraju bez stupanja u kemijske reakcije. Najčešći primjer je zrak, koji je uglavnom smjesa dušika (N_2) i kisika (O_2). I u takvom plinu vrijedi jednadžba stanja $pV = nRT$, pri čemu je n ukupna količina tvari. Ako imamo s različitih vrsta molekula, ukupna količina tvari je

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s = \sum_{i=1}^s n_i \quad , \quad (7.38)$$

gdje je n_i količina tvari i -te vrste. Ukupni tlak plina je

$$p = \sum_{i=1}^s \frac{n_i RT}{V} = \sum_i p_i \quad , \quad (7.39)$$

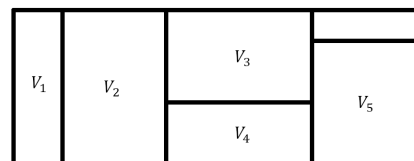
pri čemu smo s

$$p_i = \frac{n_i RT}{V} \quad (7.40)$$

definirali *parcijalni tlak* i -te vrste molekula. Relacija (7.39) jest Daltonov zakon koji kaže da je ukupni tlak smjese plinova jednak zbroju parcijalnih tlakova svih vrsta plinova u sustavu.

Možemo još definirati *molarni udio* i -te vrste kao $x_i = n_i/n$, te *volumni udio* i -te vrste kao $y_i = V_i/V$, pri čemu je V_i volumen koji bi zauzimala i -ta vrsta kad bi bila sam na istom tlaku i temperaturi. Vidimo da mora vrijediti $x_i = y_i$.

Pogledajmo sada kako se plinovi miješaju. Zamislimo da su promatrani plinovi u početnom trenutku uistinu svaki u svom volumenu V_i , odvojeni pregradama, ali u termodinamičkoj ravnoteži. Tlak i temperatura su jednaki u svakom parcijalnom volumenu. Maknemo li u $t = 0$ pregrade među plinovima, tlak i temperatura neće se promijeniti, ali plinovi će se početi miješati. Svaka vrsta molekula proširit će se iz volumena V_i po cijelom volumenu V , a parcijalni tlak će se svakoj vrsti smanjiti s p na p_i . Promjena entropije i -te vrste bit će



$$\Delta S_i = n_i R \ln \frac{V}{V_i} = -n_i R \ln \frac{p_i}{p} > 0 \quad , \quad (7.41)$$

a ukupna promjena entropije prilikom miješanja plina je

$$\Delta S = \sum_i \Delta S_i = R \sum_i n_i \ln \frac{1}{x_i} > 0 \quad . \quad (7.42)$$

Zaključujemo da je proces miješanja plinova *ireverzibilan*.

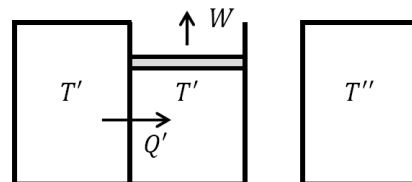
7.7 Carnotov kružni proces

Francuski fizičar S. Carnot teorijski je 1824. opisao jedan jednostavan, gotovo ravnotežan, kružni proces za dobivanje rada. Pretpostavio je da neki radni plin može promjenom volumena izmjenjivati rad s okolinom te da se može selektivno dovesti u kontakt s jednim od dva toplinska spremnika ili se izolirati od njih.

Topliji spremnik je na temperaturi T' , a hladniji na temperaturi T'' . Proces ima 4 koraka.

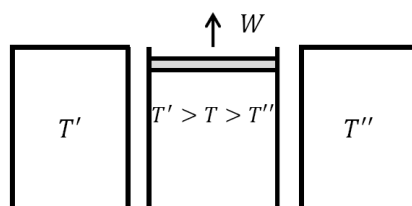
1. korak: Izotermna ekspanzija

Radna tvar je u toplinskom kontaktu s toplijim spremnikom. Obavlja rad nad okolinom; uzima toplinu iz toplijeg spremnika.



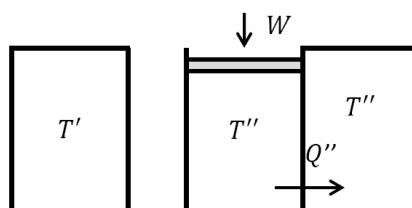
2. korak: Adijabatska ekspanzija

Radna tvar je izolirana od oba spremnika. Obavlja rad nad okolinom. Temperatura joj se mijenja (hladi se) od T' do T'' .



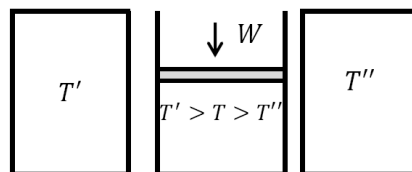
2. korak: Izotermna kompresija

Radna tvar je u toplinskom kontaktu s toplijim spremnikom. Zima rad iz okoline; predaje toplinu hladnijem spremniku.

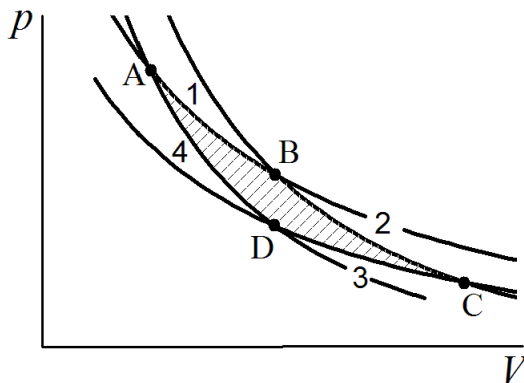


2. korak: Adijabatska kompresija

Radna tvar je izolirana od oba spremnika. Okolina obavlja rad nad radnom tvari. Radna tvar se grije do T' . Na kraju 4. koraka je radna tvar u početnom stanju.



Ovaj kružni proces možemo prikazati u p - V dijagramu.



Proces kružno ide po točkama $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Rad koji se predaje okolini je površina ispod krivulja 1 i 2. Rad koji se uzima iz okoline je integral ispod krivulja 3 i 4. Koristan rad je razlika tih integrala, iscrtana na slici. Izračunajmo ova četiri rada.

U prvom koraku, proces je izoterman na temperaturi T' i rad je

$$W_1 = W_{AB} = -nRT' \ln \frac{V_B}{V_A} . \quad (7.43)$$

U drugom koraku, proces je adijabatski i rad je

$$W_2 = W_{BC} = -\frac{p_B V_B - p_C V_C}{\gamma - 1} . \quad (7.44)$$

U trećem koraku, proces je izoterman na temperaturi T'' i rad je

$$W_3 = W_{CD} = nRT'' \ln \frac{V_C}{V_D} . \quad (7.45)$$

U četvrtom koraku, proces je adijabatski i rad je

$$W_4 = W_{DA} = \frac{p_A V_A - p_D V_D}{\gamma - 1} . \quad (7.46)$$

Budući da su točke A i B na istoj izotermi, vrijedi $p_A V_A = p_B V_B$. Slično vrijedi $p_C V_C = p_D V_D$. Stoga je zbroj radova u koracima 2 i 4 jednak $W_2 + W_4 = 0$. Koristan rad je

$$W_1 + W_3 = -nR \left(T' \ln \frac{V_B}{V_A} - T'' \ln \frac{V_C}{V_D} \right) . \quad (7.47)$$

Budući da su točke A i D na istoj adijabati, vrijedi $T' V_A^{\gamma-1} = T'' V_D^{\gamma-1}$. Slično su točke B i C na istoj adijabati pa vrijedi $T' V_B^{\gamma-1} = T'' V_C^{\gamma-1}$. Podijelimo li te dvije relacije, dobit ćemo

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C} \quad (7.48)$$

pa je koristan rad

$$W = nR \left(T'' - T' \ln \frac{V_B}{V_A} \right) . \quad (7.49)$$

Iskorištenje

Iskorištenje je omjer dobivenog rada i topline uzete iz prvog spremnika. Toplina uzeta iz prvog spremnika je

$$Q' = \int_A^B nRT' \frac{dV}{V} = nRT' \ln \frac{V_B}{V_A} . \quad (7.50)$$

Prema tome, iskorištenje je

$$\eta = \frac{T' - T''}{T'} = 1 - \frac{T''}{T'} . \quad (7.51)$$

Jednakost u ovoj relaciji vrijedi jer smo promatrali gotovo ravnotežan proces.

U ovakvim procesima najčešće ne znamo temperature toplijeg i hladnijeg spremnika, ali obično znamo volumen stroja, odnosno, omjere volumena. Stoga definiramo veličinu *koeficijent adijabatske kompresije*:

$$\kappa = \frac{V_D}{V_A} . \quad (7.52)$$

Iz relacije $T' V_A^{\gamma-1} = T'' V_D^{\gamma-1}$ tada slijedi izraz za iskorištenje:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa^{\gamma-1}} . \quad (7.53)$$

Poglavlje 8

Agregatna stanja čiste tvari

Idealni plin dobra je aproksimacija ako promatramo razrijeđeni plin na visokim temperaturama. Međutim, smanjujemo li volumen plina, doći ćemo u jednom trenutku do situacije u kojoj su molekule dovoljno blizu da interakcije među njima budu značajne. Također, nije moguće smanjiti volumen na $V \rightarrow 0$ jer molekule imaju svoj volumen pa čak i da ih uspijemo staviti u dodir, volumen plina neće iščezavati. Stoga u takvim ekstremnim uvjetima moramo uvesti razmatranja svojstvena realnim plinovima.

8.1 Realni plinovi

Van der Waals je razmatrao mogućnosti da se jednadžba stanja idealnog plina prilagodi za slučaj realnih plinova. Definiramo li volumen jednog mola tvari $v = V/n$, jednadžba stanja idealnog plina glasi $pv = RT$. Van der Waals je za realne plinove pretpostavio da je zbog konačne veličine molekula plinu na raspolaganju manji volumen, zamijenivši v s $v - b$, gdje je b tzv. "isključeni volumen". Također je pretpostavio da se kod velikih tlakova moraju u obzir uzeti i interakcije među molekulama pa je tlak p zamijenio s $p + a/v^2$. Tlak je efektivno povećan. S ovim pretpostavkama Van der Waalsova jednadžba stanja realnog plina glasi

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad , \quad (8.1)$$

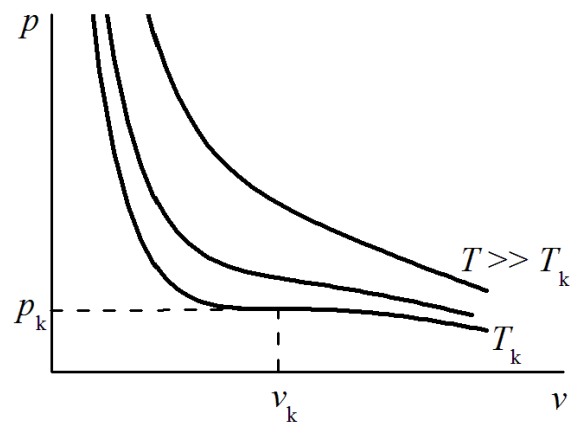
pri čemu su empirijske konstante a i b određene za svaku pojedinu vrstu plina.

Za velike volumene i visoke temperature, ova jednadžba postaje jednadžba stanja idealnog plina – izoterme su hiperbole. Međutim, za niske temperature i male volumene prestaje vrijediti Boyle-Mariotteov zakon.

Tlak postaje mnogo složenija funkcija volumena:

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad . \quad (8.2)$$

Na slici je prikazano nekoliko izoterma. Za visoke temperature izoterma je hiperbola – strogo padajuća konveksna funkcija. Za niže temperature izoterma je i dalje strogo padajuća funkcija, ali ima konveksna i konkavna područja, pa prema tome i točke infleksije. Daljnjim snižavanjem temperature dolazimo do krivulje izoterme čiji je nagib u točki infleksije jednak nuli. Tu temperaturu nazivamo *kritična temperatura* T_k . Abscisu točke infleksije u p - V dijagramu nazivamo *kritični volumen* v_k , a ordinatu *kritični tlak* p_k . Da bismo odredili vrijednosti p_k , v_k i T_k , moramo naći uvjete



pod kojima izoterma u točki infleksije nema nagiba, tj. moramo i prvu i drugu derivaciju izraza (8.2) izjednačiti s nulom. Tako dobivamo dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\frac{RT_k}{(v_k - b)^2} = \frac{2a}{v_k^3} ; \quad \frac{2RT_k}{(v_k - b)^3} = \frac{6a}{v_k^4} , \quad (8.3)$$

a rješenja su

$$v_k = 3b ; \quad RT_k = \frac{8}{27} \frac{a}{b} . \quad (8.4)$$

Uvrštavanjem u (8.2) dobivamo i izraz za kritični tlak:

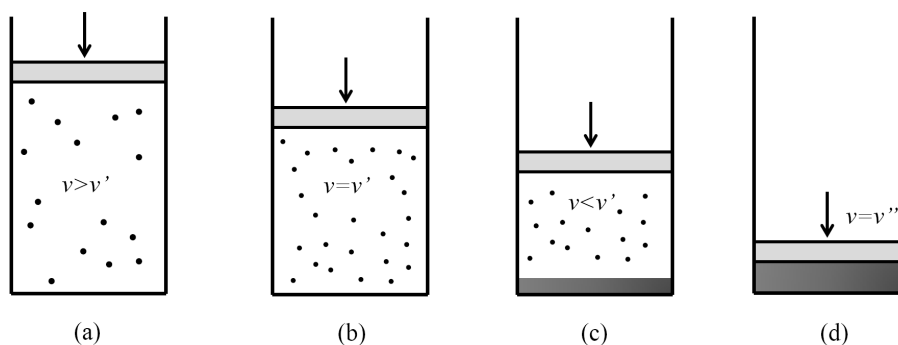
$$p_k v_k = \frac{3}{8} RT_k . \quad (8.5)$$

Ova relacija izvedena je iz jednostavnog Van der Waalsovog modela. U prirodi je ponašanje realnog plina nešto kompliciranije pa empirijski možemo reći da umjesto prefaktora $3/8$, češće dolaze vrijednosti između $1.5/8$ i $2.5/8$.

T_k je granična temperatura. Ako je temperatura sustava veća od kritične ($T > T_k$), sustav će uvijek biti plinovit. Smanjivanjem volumena tlak jako raste, ali plin ostaje homogen (ne ukapljuje se). Ispod kritične temperature plin je moguće ukapljiti, tj. moguće je postići *separaciju faza* – dvije faze, plinovita i tekuća, koegzistiraju u termodinamičkoj ravnoteži. U takvim slučajevima plin na temperaturi nižoj od T_k nazivamo "para".¹

8.2 Ukapljivanje plina

Ako je temperatura promatrane tvari niža od kritične temperature T_k , tvar može biti u plinovitom stanju (para), u tekućem stanju ili ta dva agregatna stanja mogu koegzistirati. Stanje tvari na $T < T_k$ ovisi o raspoloživom volumenu. Za neku određenu temperaturu T ispod kritične, postoji određena vrijednost molarnog volumena v' koja je granična. Ako je raspoloživi volumen veći od tog graničnog volumena, tvar će biti u plinovitom stanju. Zamislimo da se tvar nalazi u posudi kojoj volumen možemo smanjivati u izotermnom procesu kao na slici (a). Sve dok je raspoloživi volumen veći od graničnog ($v > v'$), tlak u posudi raste, ali je tvar u plinovitom stanju.



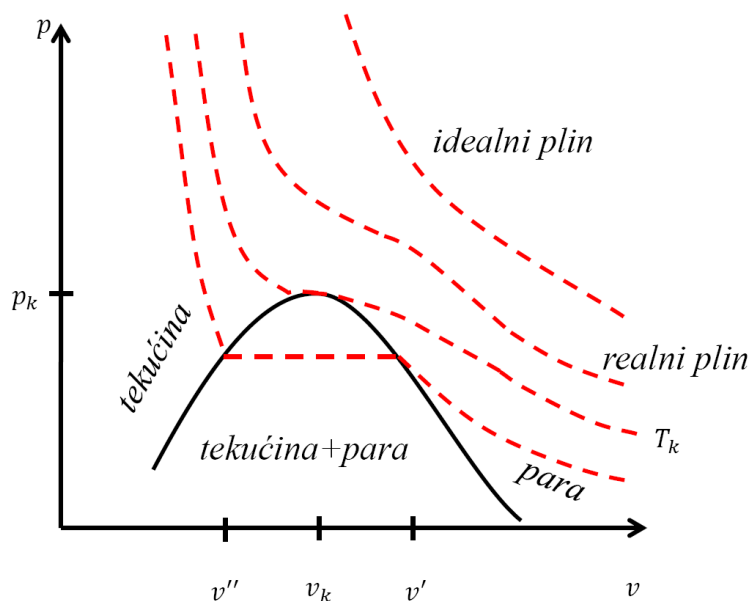
Kada raspoloživi volumen postane jednak graničnome ($v = v'$ – slika (b)), kažemo da je para zasićena. Nije više moguće stlačivati plin, a da on ostane homogen. U tom trenutku započinje kondenziranje tekućine, odnosno u istoj posudi koegzistiraju dvije faze – tekuća i plinovita (slika (c)). Tlak se više ne povećava, para je i dalje zasićena, ali se povećava količina tekućine, a smanjuje količina pare. Rad pri promjeni volumena troši se na proces kondenzacije. Taj izobarni proces može trajati tako dugo dok još ima plinovite faze. Kada se sva para ukaplji, tekućina poprima molarni

¹Za tu razliku u nazivima ne postoje stvarni fizikalni razlozi.

volumen v'' (slika (d)). Daljnje smanjivanje volumena uzrokuje ogromno povećanje tlaka. Omjer graničnih volumena jednak je omjeru gustoće tekućine i gustoće zasićene pare:

$$\frac{v'}{v''} = \frac{\rho_{\text{tek}}}{\rho_{\text{zas.para}}} \quad (8.6)$$

Budući da tlak zasićenih para jako ovisi o temperaturi, onda i omjer v'/v'' jako ovisi o temperaturi. Omjer je najmanji u kritičnoj točki $v' = v'' = v_k$. Ovisnost graničnih vrijednosti o temperaturi prikazana je na slici punom crtom. Ta crta u p - V dijagramu predstavlja "granicu faza". Omjer v'/v'' najveći je u *trojnoj točki*. Trojna točka T_t je temperatura ispod koje nije moguća tekuća faza.



Entalpija isparavanja

Kada je na nekoj temperaturi raspoloživi molarni volumen $v'' < v < v'$ u tom volumenu koegzistiraju para i tekućina. Smanjivanje volumena je izobaran i izoterman proces. U procesu ukapljivanja plina, potrebno mu je oduzeti energiju, a u suprotnom procesu isparavanja, tekućini je potrebno dovesti toplinu.

Budući da je riječ o izobarnom procesu, izmijenjena toplina jednaka je promjeni entalpije

$$Q = \Delta H = \Delta E + p\Delta V \quad (8.7)$$

Ovu promjenu entalpije sustava ΔH potrebnu za potpun proces isparavanja nazivamo *entalpija isparavanja*. U praksi se koriste i drugi nazivi za entalpiju isparavanja. Najčešće govorimo o *latentnoj entalpiji isparavanja* ili o *latentnoj toplini isparavanja*. Kada se želi karakterizirati neka tvar, potrebno je navesti za koju količinu tvari se navodi podatak o latentnoj toplini. Obično se navodi vrijednost za 1 mol ili za 1 kg tvari.

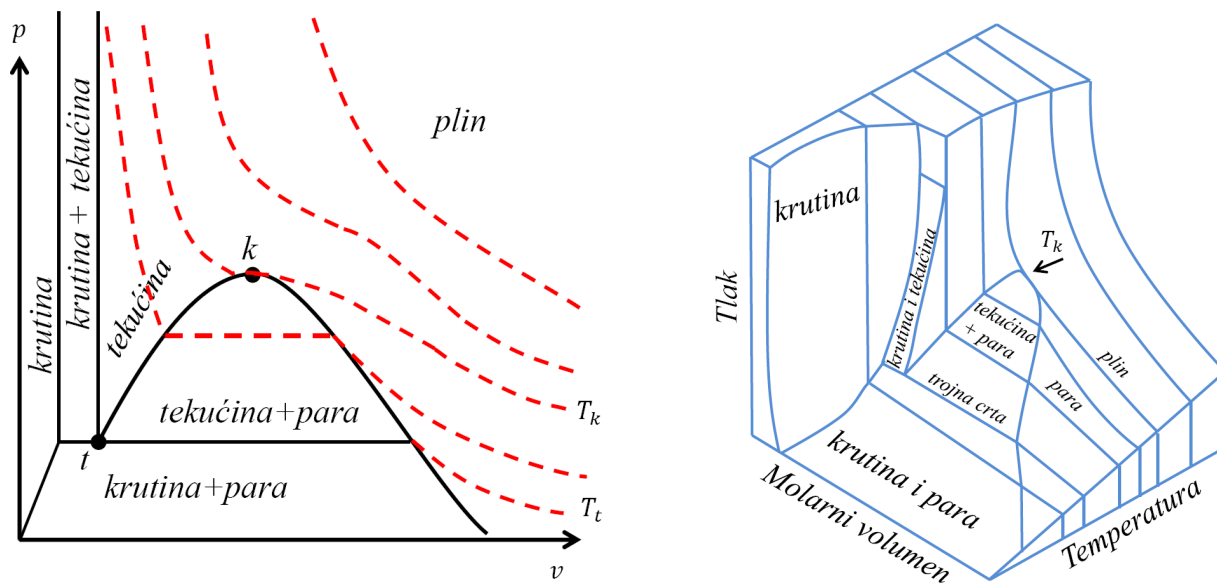
Prilikom isparavanja sustavu je potrebno dovesti toplinu. Ta toplina utroši se na promjenu volumena i na razdvajanje molekula. Ipak, rad W potreban za promjenu volumena mnogo je manji nego promjena unutarnje energije ΔE prilikom razdvajanja molekula.²

²Za isparavanje vode pri atmosferskom tlaku na 100 °C, svega 7% topline utroši se na promjenu volumena. Međutim, primjer drukčijeg ponašanja je tekući helij, koji ima vrlo nisku latentnu toplinu isparavanja. Prilikom isparavanja helija na temperaturi 4.2 K, gotovo polovina dovedene topline troši se na rad zbog promjene volumena.

8.3 Fazni dijagram

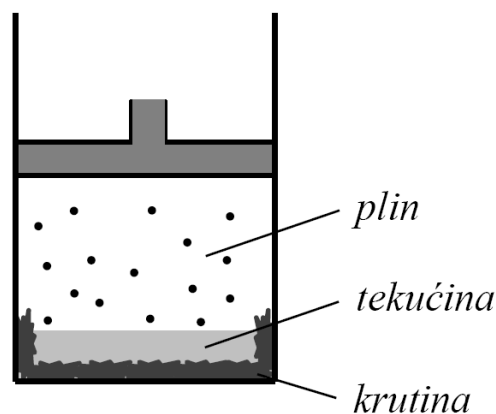
U prošlom odjeljku opisali smo kako u p - V dijagramu možemo razgraničiti područja u kojima postoji samo tekuće stanje, samo plinovito stanje i područje u kojem ta dva stanja koegzistiraju. Potpuni fazni dijagram za neku tvar treba pokazati i područja za čvrsto stanje te ostale kombinacije.

Već smo rekli da je omjer graničnih volumena v'/v'' najmanji na kritičnoj temperaturi T_k , a najveći na temperaturi trojne točke T_t . Ispod temperature T_t tvar ne može biti u tekućem stanju, ali moguća je koegzistencija krutine i plina. To je područje u kojem tvari sublimiraju. Potpuni fazni dijagram prikazan je na lijevoj slici.

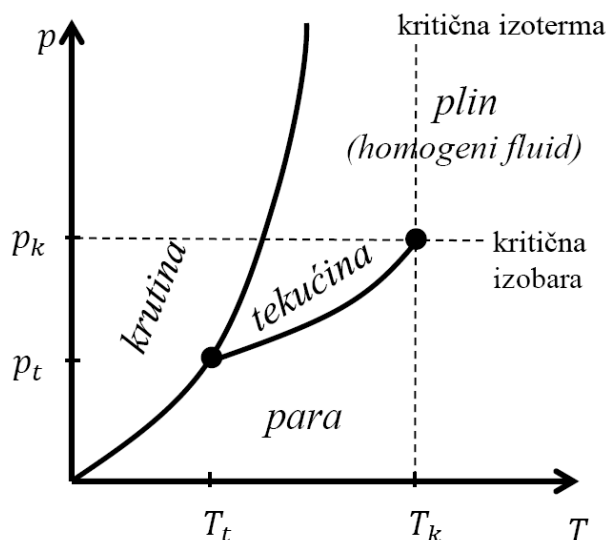


Punim crtama označene su granice faza, a isprekidanim crtama izoterme. Želimo li fazni dijagram prikazati u ovisnosti sve tri veličine, koristimo trodimenzionalni graf kao na desnoj slici. Za svaku granicu faza mogu se definirati latentne entalpije. Tako definiramo *entalpiju taljenja* i *entalpiju sublimacije*.

Vidimo da je trojna točka na granici triju faza. Na trojnoj točki mogu u termodinamičkoj ravnoteži koegzistirati sva tri agregatna stanja. To je za neku tvar moguće samo na točno određenoj temperaturi T_t i tlaku p_t . Trojnu točku za neku tvar možemo postići samo u zatvorenoj posudi kojoj možemo istodobno kontrolirati tlak i temperaturu, kao na slici. Spomenimo da je za vodu temperatura trojne točke $T_t = 273.16\text{K}$, a tlak trojne točke $p_t = 612\text{Pa}$. To je mnogo niži tlak od atmosferskog. Ipak, ta temperatura vrlo je stabilna i može se lako mjeriti pa je zato uzeta kao standard za definiranje SI jedinice *kelvin*, što smo već spomenuli u odjeljku 4.3.



Iz trodimenzionalnog p - V - T dijagrama možemo načiniti projekciju na p - T dijagram. U ovom prikazu gubimo informaciju o raspoloživom volumenu, a svako područje faznog dijagrama u kojem koegzistiraju dvije faze postaje jedna crta. Time prikaz postaje vrlo jednostavan. Na najnižim temperaturama moguća je koegzistencija krutine i pare. Ta crta završava u trojnoj točki. Na tlaku ispod p_t krutina grijanjem izravno sublimira, a na tlaku većem od p_t krutina se grijanjem najprije tali, a daljnjim grijanjem dolazi do temperature na kojoj isparava.



Tvari kojima je p_t viši od atmosferskog tlaka, pri normalnom tlaku (atmosferskom) će sublimirati (primjer je CO_2 – suhi led). One tvari kojima je p_t niži od atmosferskog, a p_k viši od atmosferskog, pri normalnom tlaku će imati dobro definiranu temperaturu tališta i temperaturu vrelišta. Tako se prilikom opisivanja svojstava tvari u tablicama često navode podaci o "normalnom talištu" i "normalnom vrelištu". U tablici su navedene karakteristične vrijednosti za neke tvari.

tvar	trojna točka	kritična točka	normalno vrelište
H_2O	$T_t = 273.16\text{K}$ $p_t = 612\text{Pa}$ $v'/v'' = 2 \cdot 10^5$	$T_k = 647\text{K}$ $p_k = 220 \cdot 10^5\text{Pa}$	373.15 K
CO_2	$T_t = 216\text{K}$ $p_t = 5 \cdot 10^5\text{Pa}$ $v'/v'' = 85$	$T_k = 304\text{K}$ $p_k = 74 \cdot 10^5\text{Pa}$	194.7 K (sublimira)
N_2	$T_t = 63\text{K}$ $p_t = 0.13 \cdot 10^5\text{Pa}$ $v'/v'' = 700$	$T_k = 126\text{K}$ $p_k = 34 \cdot 10^5\text{Pa}$	77 K
Ar	$T_t = 83.7\text{K}$ $p_t = 0.7 \cdot 10^5\text{Pa}$	$T_k = 151\text{K}$ $p_k = 48 \cdot 10^5\text{Pa}$	87.3 K

Poglavlje 9

Prijenosne pojave

U prethodnim poglavljima razmatrali smo gotovo ravnotežne procese. Promatrali smo izolirane sustave ili sustave koji su u dodiru s jednim spremnikom (toplinskim ili tlačnim). U ovom poglavlju naznačit ćemo neke pojave koje su svojstvene neravnotežnim procesima. Moramo napomenuti da je znanost o neravnotežnim procesima znatno složenija i šira od znanosti o gotovo ravnotežnim procesima, ali to je izvan dosega ovog kolegija.

9.1 Neravnotežna termodinamika

Promatramo sustav koji je istodobno u dodiru s dva spremnika. To mogu biti toplinski spremnici, tlačni spremnici, spremnici čestica ili spremnici električnog naboja. Bitno je da imaju različite vrijednosti onih veličina koje za tu vrstu spremnika definiraju ravnotežu (temperatura, tlak, koncentracija, električni potencijal). U tom slučaju, kroz promatrani sustav imat ćemo protjecanje (odnosno prijenos) energije, tvari, mase ili naboja.

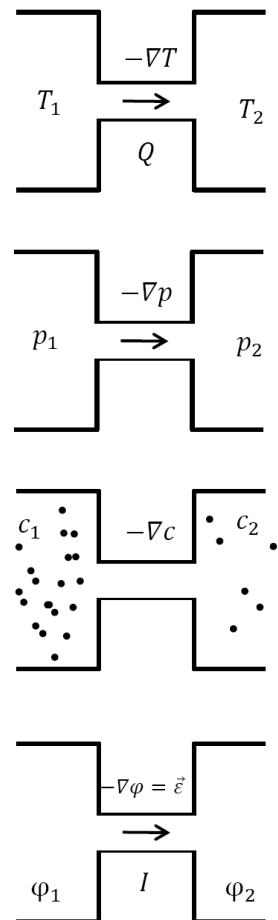
Ako je promatrani sustav u dodiru s dva toplinska spremnika na temperaturama $T_1 > T_2$, u njemu će se uspostaviti gradijent temperature. Zbog njega će toplina kontinuirano putovati u smjeru suprotnom od gradijenta temperature, tj. toplina će se prenositi s toplijeg spremnika na hladniji. Brzina prijenosa topline ovisit će o geometriji promatranog sustava (duljina, poprečni presjek) i o svojstvu tvari koje nazivamo *toplinska vodljivost* κ .

Ako je promatrani sustav fluid u posudi otvorenoj prema dva tlačna spremnika $p_1 > p_2$, u njemu će se uspostaviti gradijent tlaka. Fluid će se gibati u smjeru suprotnom od gradijenta tlaka konstantnom brzinom. Brzina protoka ovisit će o geometriji posude (duljina, poprečni presjek) i o svojstvu fluida koje nazivamo *viskoznost* η .

Ako na dva kraja promatranog sustava postoji razlika koncentracija neke vrste čestica $c_1 > c_2$,¹ doći će do prijenosa čestica u smjeru suprotnom od gradijenta koncentracije (prijenos mase). Ta se pojava naziva *difuzija* i karakterizirana je *konstantom difuzije* D .

Ako su dva kraja nekog vodiča spojena na spremnike različitih električnih potencijala $\varphi_1 > \varphi_2$, poteći će električna struja I u smjeru električnog polja.² Karakteristična veličina je *električna vodljivost* σ .

Sve navedene pojave imaju sličan uzrok. Prijenos se događa namsučnim gibanjem čestica.



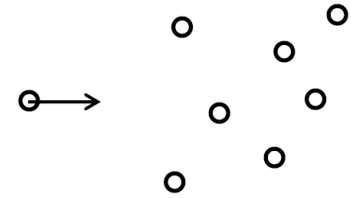
¹npr. šupljina u poluvodiču ili molekula etanola u vodi

²Iz kolegija Fizika 1 znamo da je električno polje suprotno gradijentu potencijala.

9.2 Srednji slobodni put

U svim navedenim sustavima postoji kaotično gibanje čestica koje se međusobno sudaraju. Putanja svake čestice sastavljena je od niza isprekidanih dionica. Te dionice su različitih duljina. Ipak, možemo približno izračunati *srednji slobodni put*, tj. prosječnu udaljenost koju čestica prijeđe između dvaju sudara.

Za najjednostavniji model zamislimo da su čestice kugle i da se jedna čestica giba, a sve ostale čestice miruju, nasumično raspodijeljene po prostoru. Neka je promjer čestice $d = 2R$. Kada se čestica pravocrtno giba, ona prebrisuje valjak čija baza je $R^2\pi$. Ako se na tom putu nađe bilo koja čestica, koja barem rubno dodiruje valjak, doći će do sudara. Dakle, do sudara dolazi kad je udaljenost središta čestica jednaka $d = 2R$. Zaključujemo da će čestica koja putuje udariti u bilo koju česticu unutar valjka baze $d^2\pi$. Stoga definiramo veličinu *udarni presjek* σ kao površinu baze valjka:



$$\sigma = d^2\pi \quad . \quad (9.1)$$

Udarni presjek je mjera vjerojatnosti sudara. U stvarnosti se sve čestice gibaju pa izvod za udarni presjek postaje nešto složeniji. Kao rezultat dobije se vrijednost veća $\sqrt{2}$ puta. Ako su čestice koje promatramo nabijene, onda će udarni presjek biti nešto veći, jer međudjelovanje postoji i kada čestice nisu u dodiru. Koncept udarnog presjeka kao mjera vjerojatnosti sudara koristi se i u mnogim slučajevima kad ne možemo zamišljati čestice kao "kuglice". Npr. promatramo li elektrone u supravodiču, oni se nikad ne sudaraju pa se kaže da je za njih $\sigma_{\text{eff}} = 0$. U pokusima nuklearne fuzije u kojima se jezgre spajaju sa sporim neutronima, udarni presjek može biti i 10^5 puta veći od onoga koji bi se dobio uzimajući u obzir veličinu jezgre ili neutrona. Međutim, mi ćemo se ovdje zadržati na klasičnoj slici u kojoj se sve čestice gibaju: $\sigma_{\text{eff}} = \sqrt{2}\sigma$.

Zamišljeni valjak u prostoru koji neka čestica prebrisuje u vremenu je u stvari isprekidan, ali njegov volumen je proporcionalan brzini čestice, vremenu i udarnom presjeku. Za prosječnu brzinu čestice \bar{u} je volumen prebrisan u vremenu Δt jednak

$$\Delta V = \sigma_{\text{eff}}\bar{u}\Delta t \quad . \quad (9.2)$$

Broj sudara koji će se dogoditi u tom volumenu jednak je broju čestica ΔN koje su u njemu. Ako je koncentracija čestica $c = \Delta N/\Delta V$, onda je učestalost sudara

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = c\sqrt{2}\sigma\bar{u} \quad . \quad (9.3)$$

Srednje slobodno vrijeme koje prođe između dva uzastopna sudara je

$$\tau = \frac{1}{\frac{\Delta N}{\Delta t}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma\bar{u}} \quad . \quad (9.4)$$

U modelu idealnog plina, prosječnu brzinu \bar{u} možemo izračunati iz prosječne kinetičke energije jedne čestice koja je prema ekviparticijskom teoremu $m\bar{u}^2/2 = 3k_B T/2$. Prema tome,

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad , \quad (9.5)$$

što znači da će srednje slobodno vrijeme između sudara ovisiti o temperaturi.

Srednji slobodni put λ između dva sudara dobit ćemo tako da prosječnu brzinu pomnožimo sa srednjim slobodnim vremenom:

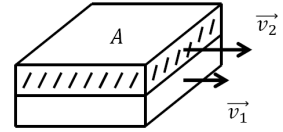
$$\lambda = \tau \cdot \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma \cdot c} \quad . \quad (9.6)$$

Vidimo da srednji slobodni put u ovome modelu ne ovisi o temperaturi.

9.3 Viskoznost

Viskoznost je unutarnje trenje pri gibanju tekućine. U drugom poglavlju definirali smo viskoznost kao makroskopsku veličinu. Ako se dva sloja fluida dodiruju površinom A , a gibaju se tangencijalno na tu površinu različitim brzinama, onda se među tim slojevima javlja sila trenja

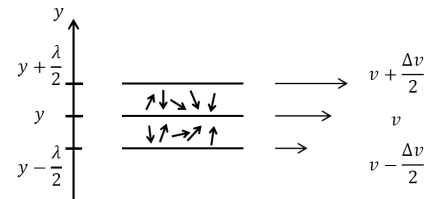
$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy} . \quad (9.7)$$



Sada želimo razumjeti pojavu viskoznosti na mikroskopskoj razini. Neka je fluid koji razmatramo plin. U njemu se čestice nasumično gibaju velikim brzinama \bar{u} , a vektorski zbroj svih tih brzina daje makroskopsku brzinu fluida \vec{v} .

Recimo odmah da je viskoznost prienos količine gibanja između susjednih slojeva. Promatrat ćemo dva sloja fluida koji su udaljeni za srednji slobodni put λ , kao na slici. Slojevi se gibaju makroskopskim brzinama koje se razlikuju za Δv . Izraz dv/dy u relaciji (9.7) možemo zamijeniti s $\Delta v/\lambda$, odnosno

$$\Delta v = \lambda \frac{dv}{dy} . \quad (9.8)$$



Čestice se u svakom sloju nasumično gibaju i povremeno mogu prijeći iz jednog sloja u drugi. Broj prijelaza između dva sloja u vremenu Δt iznosi

$$\frac{1}{2} A \cdot c \cdot \bar{u}_y \cdot \Delta t , \quad (9.9)$$

pri čemu je A dodirna površina slojeva, c koncentracija plina, \bar{u}_y je prosječna komponenta brzine u y smjeru, a faktor $1/2$ je stavljen zato što moramo u obzir uzeti samo one čestice koje se gibaju prema dodirnoj plohi, a ne one koje se udaljavaju. Kada čestice prelaze iz sloja u sloj, one prenose količinu gibanja:

$$\Delta p = \frac{1}{2} A \cdot c \cdot \bar{u}_y \cdot \Delta t \left[m \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right) - m \left(v - \frac{\Delta v}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} A \cdot c \cdot \bar{u}_y \cdot m \cdot \Delta v \cdot \Delta t , \quad (9.10)$$

pri čemu je m masa jedne čestice. Budući da je sila $F = \Delta p / \Delta t$, a gustoća plina je $\rho = c \cdot m$, uz relaciju (9.8) možemo pisati

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{2} \rho \cdot \bar{u}_y \cdot \lambda \frac{dv}{dy} , \quad (9.11)$$

iz čega slijedi izraz za koeficijent viskoznosti

$$\eta = \frac{1}{2} \rho \cdot \bar{u}_y \cdot \lambda . \quad (9.12)$$

U plinovima prosječna komponenta brzine ovisi o temperaturi prema relaciji

$$\bar{u}_y = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} . \quad (9.13)$$

To znači da koeficijent viskoznosti za plinove *raste* s korijenom temperature:

$$\eta = \propto T^{1/2} . \quad (9.14)$$

U tekućinama ovaj prikazani model nije dobra aproksimacija jer je doprinos kohezijskih sila mnogo važniji od nasumičnog gibanja. Stoga u tekućinama koeficijent viskoznosti η *pada* s temperaturom.

9.4 Difuzija

Difuzija je pojava u kojoj gradijent koncentracije uzrokuje protok čestica. Najprije ćemo definirati veličinu *gustoća toka čestica*:

$$j_N = \frac{1}{S} \frac{dN}{dt} , \quad (9.15)$$

tj. broj čestica koji prođe kroz neku zamišljenu plohu površine S u jedinici vremena.

Empirijski je još u 19. stoljeću otkriven *Fickov zakon difuzije* koji povezuje protok čestica s gradijentom koncentracije.

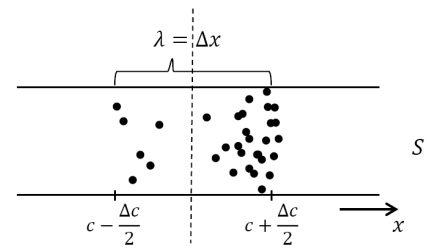
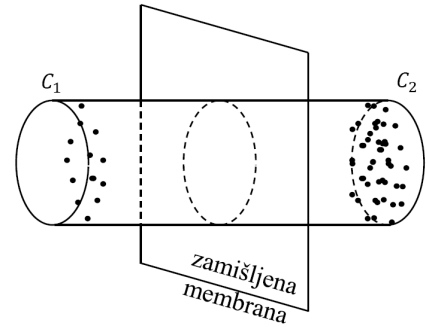
$$\vec{j}_N = -D \cdot \nabla c , \quad (9.16)$$

ili u jednodimenzionalnom slučaju

$$j_N = -D \frac{dc}{dx} . \quad (9.17)$$

Veličina D zove se *konstanta difuzije*.

Za određivanje konstante difuzije iz mikroskopske slike pogledajmo sliku desno. Gledamo protok čestica kroz zamišljeni poprečni presjek. Zanimat će nas samo one čestice koje su od granične plohe udaljene za manje od polovine srednjeg slobodnog puta. Naime, samo te čestice imaju šansu prijeći na drugu stranu zamišljenog presjeka. Neka je koncentracija promatranih čestica na mjestu $x - \lambda/2$ (tj. s lijeve strane) jednaka $c - \Delta c/2$, a na mjestu $x + \lambda/2$ jednaka $c + \Delta c/2$. Broj čestica koje prelaze s lijeve strane na desnu proporcionalan je koncentraciji s lijeve strane. Gustoća toka čestica s lijeve strane na desnu je



$$j_{L \rightarrow D} = \frac{1}{2} \left(c - \frac{\Delta c}{2} \right) \bar{u}_x , \quad (9.18)$$

a faktor $1/2$ stavili smo zato što promatramo samo čestice koje se gibaju prema membrani. Protok čestica s desne strane na lijevu je

$$j_{D \rightarrow L} = -\frac{1}{2} \left(c + \frac{\Delta c}{2} \right) \bar{u}_x . \quad (9.19)$$

Neto gustoća toka je

$$j_N = j_{L \rightarrow D} + j_{D \rightarrow L} = -\frac{1}{2} \Delta c \cdot \bar{u}_x . \quad (9.20)$$

Razliku koncentracija Δc možemo pisati

$$\Delta c = \frac{dc}{dx} \cdot \Delta x = \frac{dc}{dx} \cdot \lambda$$

pa je neto gustoća toka

$$j_N = -\frac{1}{2} \bar{u}_x \cdot \lambda \frac{dc}{dx} . \quad (9.21)$$

Za prosječnu vrijednost x -komponente brzine vrijedi $\bar{u}_x^2 = \bar{u}^2/3$ pa je

$$j_N = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \bar{u} \cdot \lambda \frac{dc}{dx} \approx -\frac{1}{4} \bar{u} \cdot \lambda \frac{dc}{dx} . \quad (9.22)$$

Posljednja aproksimacija uzeta je imajući u vidu činjenicu da ovaj model u sebi sadrži niz aproksimacija pa sa sličnom točnošću možemo aproksimirati $\sqrt{3} \approx 2$. Ako ovaj rezultat usporedimo s Fickovim zakonom, dobivamo izraz za konstantu difuzije:

$$D = \frac{1}{4} \bar{u} \cdot \lambda \quad . \quad (9.23)$$

Jedinica za konstantu difuzije je m^2/s , a češće se koristi manja jedinica cm^2/s . Konstanta difuzije vode pri 20°C iznosi $2 \cdot 10^{-5} \text{cm}^2/\text{s}$, a u argonu je puno veća – $6 \cdot 10^{-2} \text{cm}^2/\text{s}$.

Brownovo gibanje

Čestice se u mediju gibaju nasumično mijenjajući smjer u svakom sudaru. Ipak, nakon nekog vremena t čestica će se takvim nasumičnim gibanjem udaljiti od svog početnog položaja. Takvo gibanje nazivamo *Brownovo gibanje*. Prosječni odmak od početnog položaja neke čestice nakon vremena t iznosi

$$x(t) = \sqrt{D \cdot t} \quad . \quad (9.24)$$

To je vrlo sporo gibanje. Jedna molekula vode na temperaturi 20°C će se prosječno pomaknuti 3 mm na sat. Čak i u argonu, koji ima jako veliku konstantu difuzije, to je vrlo sporo gibanje. Atom argona će se u jednom satu pomaknuti 20 cm.

9.5 Vođenje topline

Ako u nekom materijalu postoji gradijent temperature, on uzrokuje tok energije (topline). Definiirat ćemo veličinu *gustoća toka topline*:

$$j_Q = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad . \quad (9.25)$$

Empirijski je utvrđeno da je tok topline proporcionalan s gradijentom temperature:

$$\vec{j}_Q = -\kappa \nabla T \quad ,$$

ili u jednodimenzionalnom slučaju

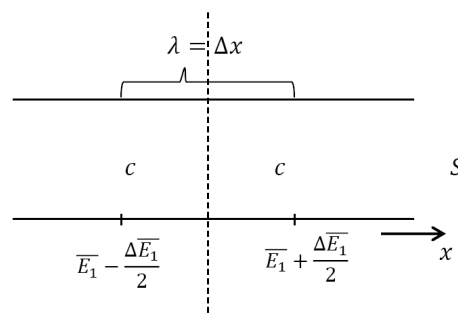
$$j_Q = -\kappa \frac{dT}{dx} \quad . \quad (9.26)$$

Veličina κ je *toplinska vodljivost* koja se mjeri u jedinicama $\text{W}/(\text{K} \cdot \text{m})$. Protok topline povezujemo s gradijentom temperature relacijom:

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa \cdot S \frac{dT}{dx} \quad . \quad (9.27)$$

Materijal koji vodi toplinu može biti metal u kojem se toplina prenosi uglavnom elektronima, može biti kristal dielektrika, u kojem se toplina prenosi vibracijama, može biti tekućina ili plin. Mi ćemo razmotriti slučaj plina.

Za određivanje toplinske vodljivosti iz mikroskopske slike zamislimo da je koncentracija čestica c koje promatramo jednaka u cijelom prostoru. Međutim, temperature su različite pa je prosječna energija jedne čestice \bar{E}_1 ovisna o položaju. Pogledajmo prijenos energije preko zamišljene membrane. Zanimat će nas samo one čestice koje su od granične plohe udaljene za manje od polovine srednjeg slobodnog puta λ . Neka je prosječna energija



čestica čestica na mjestu $x - \lambda/2$ (tj. s lijeve strane) jednaka $\bar{E}_1 - \Delta\bar{E}_1/2$, a na mjestu $x + \lambda/2$ jednaka $\bar{E}_1 + \Delta\bar{E}_1/2$. Broj čestica koje prelaze s lijeve strane na desnu proporcionalan je koncentraciji s lijeve strane. Gustoća toka energije s lijeve strane na desnu je

$$j_{Q(L \rightarrow D)} = \frac{1}{2}c \cdot \left(\bar{E}_1 - \frac{\Delta\bar{E}_1}{2} \right) \bar{u}_x \quad , \quad (9.28)$$

Gustoća toka energije s desne strane na lijevu je

$$j_{Q(D \rightarrow L)} = -\frac{1}{2}c \cdot \left(\bar{E}_1 + \frac{\Delta\bar{E}_1}{2} \right) \bar{u}_x \quad . \quad (9.29)$$

Neto gustoća toka energije je

$$j_Q = -\frac{1}{2}c \cdot \Delta\bar{E}_1 \cdot \bar{u}_x \quad . \quad (9.30)$$

Razliku prosječnih energija $\Delta\bar{E}_1$ možemo pisati

$$\Delta\bar{E}_1 = \frac{d\bar{E}_1}{dx} \cdot \Delta x = \lambda \cdot \frac{d\bar{E}_1}{dx} \quad .$$

Prosječna energija u idealnom plinu ovisi samo o temperaturi pa možemo pisati

$$\frac{d\bar{E}_1}{dx} = \frac{d\bar{E}_1}{dT} \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{C_V}{N} \cdot \frac{dT}{dx} \quad .$$

Sada imamo

$$j_Q = -\frac{1}{2}c \cdot \lambda \cdot \bar{u}_x \frac{d\bar{E}_1}{dx} = -\frac{1}{2}\lambda \cdot c \cdot \bar{u}_x \frac{C_V}{N} \frac{dT}{dx} \quad . \quad (9.31)$$

Znajući da je $c = N/V$, eliminiramo broj čestica:

$$j_Q = -\frac{1}{2}\lambda \cdot \bar{u}_x \frac{C_V}{V} \frac{dT}{dx} \quad . \quad (9.32)$$

Ako ovaj rezultat usporedimo s empirijskom relacijom (9.26) i napravimo prijelaz s \bar{u}_x na \bar{u} uz slične aproksimacije kao u prošlom odjeljku, dobivamo izraz

$$\kappa \approx -\frac{1}{4}\bar{u} \cdot \lambda \frac{C_V}{V} \quad . \quad (9.33)$$

Želimo li da ova veličina ovisi o svojstvu materijala, a ne o volumenu konkretnog promatranog sustava pa ćemo prijeći na specifični toplinski kapacitet $c_V = C_V/m$. Budući da je gustoća tvari $\rho = m/V$, možemo pisati

$$\kappa = -\frac{1}{4}\lambda \cdot \rho \cdot c_V \cdot \bar{u} \quad . \quad (9.34)$$

Navedimo vrijednosti toplinske vodljivosti za neke tvari.

tvar	κ $\left[\frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}} \right]$
zrak	0.024
voda	0.58
bakar	400
beton	1.5
stiropor	0.03

9.6 Prijenos naboja

U ovom slučaju gradijent električnog potencijala uzrokuje protok naboja (tj. električnu struju). Podsjetimo se zaključaka iz kolegija Fizika 1. Empirijski znamo da vrijedi Ohmov zakon

$$\vec{j}_q = \sigma \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad , \quad (9.35)$$

a veza električnog polja i potencijala glasi $\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\varphi$.

Mikroskopska slika nam kaže da je gustoća struje dana s

$$j_q = q \cdot n_q \cdot \bar{v} \quad , \quad (9.36)$$

pri čemu je n_q koncentracija nabijenih čestica, a \bar{v} prosječna makroskopska brzina čestica (tzv. driftna brzina) uzrokovana električnim poljem.

Da bismo odredili driftnu brzinu, moramo poznavati srednje slobodno vrijeme τ između sudara. Naime, električno polje ubrzava naboje između sudara i time daje prinos usmjerenj brzini:

$$q \cdot \mathcal{E} \cdot dt = m \cdot dv \quad , \quad (9.37)$$

Naboj koji je odmah nakon sudara imao prosječnu makroskopsku brzinu nula, u vremenu između dva sudara, koje prosječno traje τ dosegne brzinu v_{\max} :

$$\int_0^\tau q \cdot \mathcal{E} \cdot dt = \int_0^\tau m \cdot dv$$

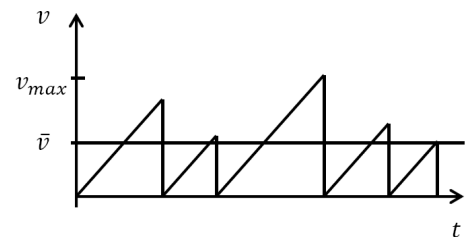
$$q \cdot \mathcal{E} \cdot \tau = m \cdot v_{\max} \quad . \quad (9.38)$$

Srednja brzina na tom putu jednaka je polovici maksimalne $\bar{v} = v_{\max}/2$ pa možemo pisati

$$\bar{v} = \frac{q\tau}{2m} \vec{\mathcal{E}} \quad . \quad (9.39)$$

Tako smo dobili izraz za električnu vodljivost:

$$\sigma = \frac{n_q \cdot q^2 \tau}{2m} \quad . \quad (9.40)$$



Možemo uočiti da je vodljivost obrnuto proporcionalna s prosječnom mikroskopskom brzinom \bar{u} :

$$\sigma \propto \frac{1}{\bar{u}} \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \quad . \quad (9.41)$$

Osnovni je zaključak da se vodljivost smanjuje s temperaturom, ali u stvarnosti to nije s korijenom iz temperature. U razmatranja treba uzeti još mnoge druge efekte.

Poglavlje 10

Harmonijski oscilator

U nastavku ovog kolegija proučavat ćemo valove. Da bismo mogli razmatrati valove, potrebno je dobro poznavati harmonijske oscilacije te pojmove i pojave vezane uz njih. Zato u ovom poglavlju donosimo kratki podsjetnik na znanje o harmonijskom oscilatoru stečeno u Fizici 1.

10.1 Slobodni harmonijski oscilator

Da bi neki sustav bio harmonijski oscilator, on mora biti tako definiran da:

- se za njega može reći kad je u ravnotežnom položaju
- postoji varijabla poopćeni "pomak iz ravnoteže" (to može biti udaljenost, kut, naboj...)
- postoji poopćena "povratna sila" proporcionalna pomaku (to može biti sila, moment sile, napon...)
- postoji "inercija" (to može biti masa, moment tromosti, induktivitet zavojnice...)

Jednadžba gibanja

Ako poopćeni pomak iz ravnoteže označimo s u , onda u svim sustavima koji zadovoljavaju gornje uvjete možemo pisati *jednadžbu gibanja harmonijskog oscilatora*:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 \quad , \quad (10.1)$$

gdje je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (10.2)$$

kružna frekvencija, a T je period oscilacija.

Jednadžba gibanja je homogena diferencijalna jednadžba drugog reda koja ima općenito rješenje koje se može pisati na dva načina:

$$u(t) = A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t \quad (10.3)$$

$$\text{ili} \quad (10.4)$$

$$u(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad . \quad (10.5)$$

U oba slučaja funkcija je određena dvjema konstantama. U prvom slučaju konstante su A_1 i A_2 , a u drugome to su A i φ . Te konstante određene su početnim uvjetima, tj. položajem u i brzinom du/dt u trenutku $t = 0$.

Kao standardni primjer harmonijskog oscilatora navodimo masu na opruzi. Pomak (elongacija) je x , povratna sila je $F = -Kx$, inercija je m , a iz jednadžbe gibanja

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0 \quad , \quad (10.6)$$

slijedi da je $\omega_0 = \sqrt{K/m}$. Maksimalna elongacija, odnosno amplituda titranja je $x_{\max} = A$. Brzina u nekom trenutku je $v = dx/dt$, a maksimalna brzina je $v_{\max} = A\omega_0$.

Energija harmonijskog oscilatora

U harmonijskom oscilatoru potencijalna i kinetička energija naizmjenice se pretvaraju jedna u drugu. Potencijalna energija u nekom trenutku je

$$E_p(t) = \frac{1}{2}Kx^2(t) = \frac{1}{2}KA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad , \quad (10.7)$$

a kinetička energija je

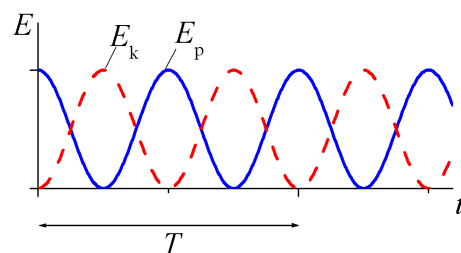
$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad . \quad (10.8)$$

Znajući da je $m\omega_0^2 = K$, ukupna energija je konstantna:

$$E = E_p(t) + E_k(t) = \frac{1}{2}KA^2 = \text{konst.} \quad . \quad (10.9)$$

Prosječna potencijalna energija jednaka je prosječnoj kinetičkoj energiji i iznosi polovicu ukupne energije:

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{4}KA^2 = \frac{1}{4}mv_{\max}^2 = \langle E_k \rangle \quad . \quad (10.10)$$

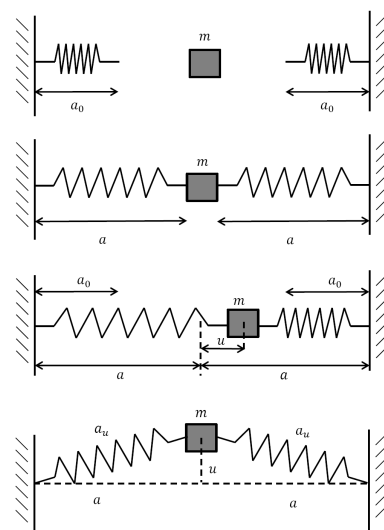


Longitudinalne i transverzalne oscilacije

Razmotrimo sada primjer mase koja je razapeta između dvije opruge. Nerastegnute opruge imaju duljinu a_0 , a kad se zakvače za masu, duljina im se znatno poveća i u ravnotežnom stanju iznosi a .

Oscilacije možemo pokrenuti na dva načina. Ako masu pomaknemo iz položaja ravnoteže po pravcu prostiranja opruga, pokrenut ćemo *longitudinalne oscilacije*. Povratna sila je $F = -2K \cdot u$, a kružna frekvencija $\omega_0 = \sqrt{2K/m}$.

Ako masu pomaknemo iz ravnoteže okomito na pravac prostiranja opruga, pokrenut ćemo *transverzalne oscilacije*. Za male pomake u , ove oscilacije su također harmonijske. Kružna frekvencija ovisi o tome koliko su opruge istegnute već u ravnotežnom položaju $\omega_0 = \sqrt{(2K/m)(1 - a_0/a)}$, ali uvijek je niža od frekvencije longitudinalnih oscilacija.



10.2 Prisilno titranje harmonijskog oscilatora

Ako u jednadžbu gibanja slobodnog harmonijskog oscilatora dodamo gušenje (npr. viskozno trenje ili vrtložne struje) i k tome uvedemo vanjsku periodičnu silu, jednadžba gibanja glasi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_v}{m} \cos \omega_v t . \quad (10.11)$$

Ova nehomogena diferencijalna jednadžba ima dva rješenja – prijelazno i stacionarno. Nakon nekog vremena "utitravanja" oscilator nastavlja titrati frekvencijom vanjske periodične sile prema *stacionarnom rješenju*:

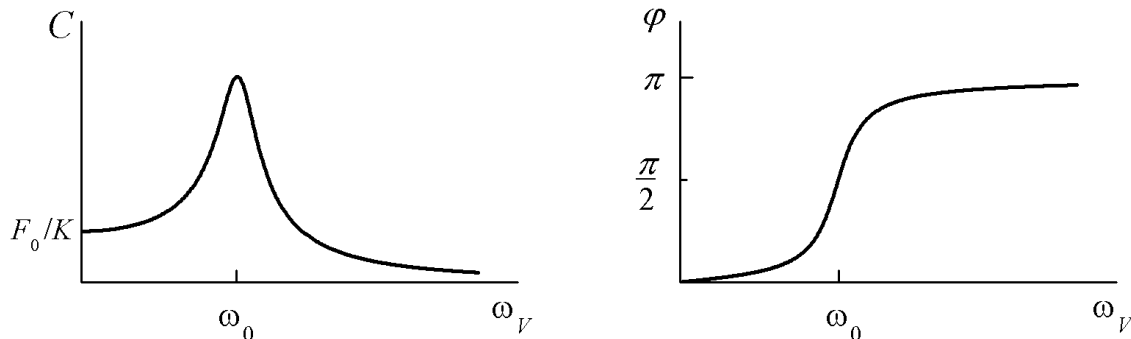
$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_v t + \varphi) , \quad (10.12)$$

pri čemu je φ razlika faza Amplituda C ovisi o odnosu frekvencija ω_0 i ω_v . Amplituda je najveća kad se frekvencija vanjske sile izjednači s karakterističnom frekvencijom slobodnog oscilatora. Tada dolazi do rezonancije. Na rezonantnoj frekvenciji harmonijski oscilator apsorbira najviše energije iz vanjskog izvora. U rezonanciji je fazni pomak između pobudne sile i oscilatora jednak $\pi/2$. Ovisnost amplitude o frekvenciji dana je s

$$C = \frac{F_0}{m \left[\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + \left(\frac{\omega_v}{\tau}\right)^2} \right]} , \quad (10.13)$$

a ovisnost faze o frekvenciji je

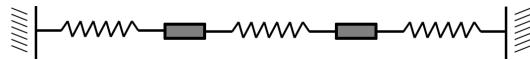
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\omega_v}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega_v^2} . \quad (10.14)$$



Poglavlje 11

Titranja sustava s više čestica

11.1 Sustav s dvije jednake čestice



Promotrimo sustav s dvije jednake mase spojene trima oprugama kao na slici. Neka je razmak između čvrstih krajeva L . Svaku masu možemo pomaknuti iz ravnotežnog položaja na proizvoljan način. Mase bismo mogli pomaknuti iz ravnoteže longitudinalno (tako da je pomak na pravcu opruga) ili transverzalno (okomito na smjer prostiranja opruga). Ograničimo se ovdje samo na transverzalne pomake.

Ako mase pomaknemo iz ravnoteže na proizvoljne načine, one će se nastaviti gibati naizgled kaotično, s većim i manjim amplitudama, pri čemu će u nekim razdobljima jedna masa imati veću amplitudu, a u nekim drugim razdobljima će druga masa imati veću amplitudu. Pitamo se je li moguće postići da se mase gibaju sinkronizirano – da titraju istom frekvencijom?

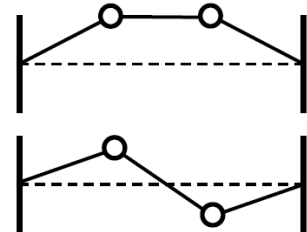
Pokusom pokazujemo da je to moguće. Postoje dva načina kako možemo pobuditi mase na takvo kolektivno gibanje. Svaki od tih načina ima svoju karakterističnu frekvenciju titranja.

1. način Čestice titraju zajedno (u fazi): $u_1(t) = u_2(t)$.

Frekvencija titranja je $\omega^{(1)} = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

2. način Čestice titraju u protufazi: $u_1(t) = -u_2(t)$.

Frekvencija titranja je $\omega^{(2)} = \sqrt{\frac{3K}{m}}$.



Ova dva načina titranja nazivamo *modovima*. Mod je način titranja u kojem se sva kinetička energija sustava pretvara u potencijalnu. Postoje trenutci kada su opruge nerastegnute i sva energija je kinetička i trenutci kada obje mase miruju i sva energija je potencijalna.¹

Možemo uočiti da prilikom titranja u modovima mase u svakom trenutku "leže" na sinusoidama. U prvome modu period sinusoide je $2L$, a u drugome modu L . Prostorni period sinusoide zvat ćemo *valna duljina* λ pa za valne duljine modova pišemo:

$$\lambda^{(1)} = 2L \quad ; \quad \lambda^{(2)} = L \quad . \quad (11.1)$$



¹Analogno bismo mogli postići modove i za longitudinalno titranje.

11.2 Sustav s više čestica

Razmatranje iz prošlog odjeljka možemo poopćiti na slučaj više jednakih masa povezanih oprugama.



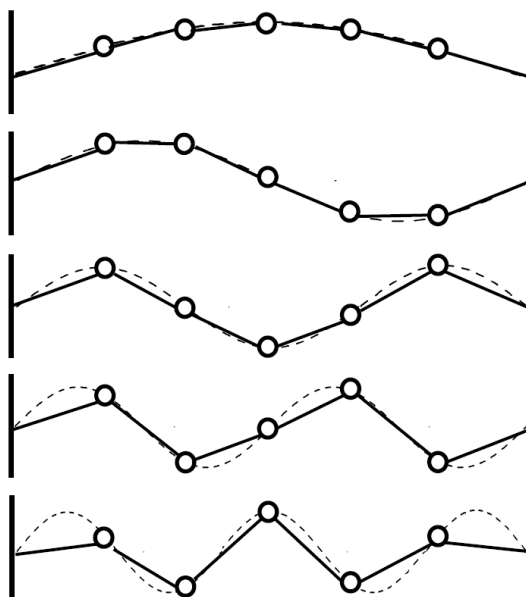
Razmotrimo najprije slučaj tri mase. Ovdje možemo postići tri moda titranja. Njihove valne duljine su

$$\lambda^{(1)} = 2L \ ; \ \lambda^{(2)} = L \ ; \ \lambda^{(3)} = \frac{2L}{3} \ . \quad (11.2)$$

Za karakteristične frekvencije tih modova vrijedi

$$\omega^{(1)} < \omega^{(2)} < \omega^{(3)} \ . \quad (11.3)$$

Slučaj titranja pet masa prikazan je na slici desno. Ovdje možemo postići 5 modova titranja.



Valne duljine su

$$\lambda^{(1)} = 2L \ ; \ \lambda^{(2)} = L \ ; \ \lambda^{(3)} = \frac{2L}{3} \ ; \ \lambda^{(4)} = \frac{L}{2} \ ; \ \lambda^{(5)} = \frac{2L}{5} \ , \quad (11.4)$$

a frekvencije modova su

$$\omega^{(1)} < \omega^{(2)} < \omega^{(3)} < \omega^{(4)} < \omega^{(5)} \ . \quad (11.5)$$

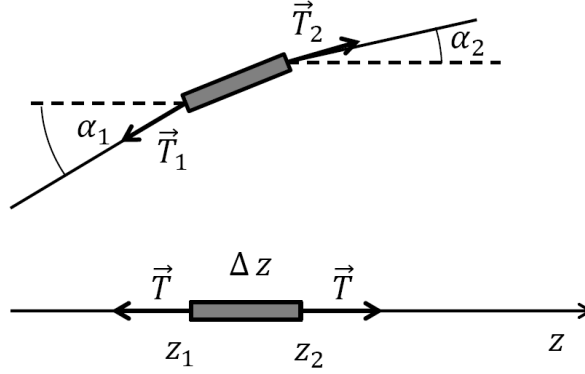
Valne duljine i frekvencije modova nisu nezavisne. Za svaki sustav titranja više čestica postoje dobro definirane relacije koje povezuju karakteristične frekvencije i valne duljine modova. Te relacije zovu se *dispersionijske relacije*.

Uočimo da je u svakom od promatranih sustava broj modova bio jednak broju čestica. Ako se sustav sastoji od N čestica, možemo definirati N modova titranja.

Treba spomenuti da se modovi nazivaju još i *stojni valovi*. U stojnim valovima trbusi i čvorovi ne putuju, nego su uvijek na istome mjestu.

11.3 Aproximacija kontinuuma

Sada želimo proučavati titranje kontinuiranog medija, kao što je npr. žica gitare. U prethodnom odjeljku smo proučavali titranje sustava s N masa povezanih identičnim oprugama. Da bismo prešli na proučavanje kontinuuma, trebamo napraviti limes $N \rightarrow \infty$. Promatramo sve manje segmente žice čija masa je sve manja, ali i razmak među masama a postaje sve manji. Zato proučavamo linijsku gustoću žice $\mu \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$. Elastična sila $K \cdot a$ prelazi u napetost niti T . Neka je os z usmjerena



uzduž žice. Napetost u ravnotežnom položaju je T . Promatramo dio žice (segment) između točaka z_1 i z_2 . Masa tog dijela je $m = \mu \cdot (z_2 - z_1) = \mu \cdot \Delta z$. Kad je segment izvan ravnoteže, on postaje zakrivljen. Sila na segment ovisi o elongaciji susjednih segmenata. Napetost \vec{T}_1 na mjestu z_1 čini kut α_1 s osi z , a napetost \vec{T}_2 na mjestu z_2 čini kut α_2 s osi z . Horizontalne komponente tih napetosti se poništavaju (jer se segment ne miče lijevo-desno):

$$T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 = T \quad . \quad (11.6)$$

Na segment djeluje samo razlika okomitih komponenti sile:

$$F_u = -T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 \quad . \quad (11.7)$$

Jednadžba gibanja je

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -(T_1 \sin \alpha_1 - T_2 \sin \alpha_2) \quad . \quad (11.8)$$

Vrijedi:

$$T_1 \sin \alpha_1 = \frac{T}{\cos \alpha_1} \sin \alpha_1 = T \tan \alpha_1 = T \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z_1} ; \quad T_2 \sin \alpha_2 = T \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z_2} \quad (11.9)$$

Sada je:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left[\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z_1} - \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z_2} \right] , \quad (11.10)$$

odnosno,

$$\mu \Delta z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \Delta z \frac{\left[\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z_1} - \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z_2} \right]}{\Delta z} \quad . \quad (11.11)$$

Razlomak s desne strane postaje u limesu $\Delta z \rightarrow 0$ druga derivacija $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ pa je *valna jednadžba*

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad . \quad (11.12)$$

Modovi u kontinuumu

Broj modova u sustavu s masama koje titraju ovisi o broju čestica N . Kad govorimo o kontinuiranom mediju, broj modova postaje beskonačan. Međutim u nekom određenom (n -tom) modu u nekom trenutku, sve čestice leže na istoj sinusoidi. Učvršćeni krajevi određuju dvije nul-točke te sinusoide. Elongacija dijela žice na mjestu z u trenutku t je

$$u^{(n)}(z, t) = A^{(n)} \cdot \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda^{(n)}}\right) \cdot \cos \omega^{(n)} t, \quad (11.13)$$

a uzeli smo kosinusnu vremensku ovisnost.² Uvrštavanjem ovog oblika moda u valnu jednadžbu (11.12) određujemo vezu između frekvencije i valne duljine n -tog moda:

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \frac{2\pi}{\lambda^{(n)}}. \quad (11.14)$$

Definiramo veličinu *kutni valni broj*:

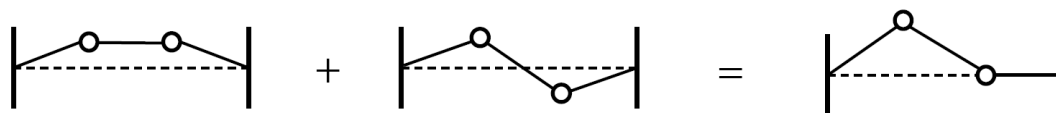
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (11.15)$$

pa uz tu definiciju disperzijska relacija za napetu žicu glasi:

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \cdot k^{(n)}. \quad (11.16)$$

11.4 Superpozicija modova

Pokazali smo da dobro definiranim početnim uvjetima možemo potaknuti sustav da titra u nekom modu i to karakterističnom frekvencijom tog moda. Međutim, ako početni uvjeti ne odgovaraju jednom od modova, sustav će oscilirati naizgled kaotično. Ipak, ponašanje sustava u bilo kojem trenutku može se matematički lako opisati superpozicijom modova. Svaki početni oblik položaja sustava možemo prikazati kao *superpoziciju* (zbroj) N početnih uvjeta za modove tog sustava. Primjer kako se dva moda zbrajaju za sustav dvije čestice prikazan je na slici. Ako se sustav nakon takvog početnog položaja pusti da titra, svaki mod titra svojom karakterističnom frekvencijom pa ponašanje sustava izgleda kaotično, ali ga možemo jednostavno opisati zbrajanjem modova.

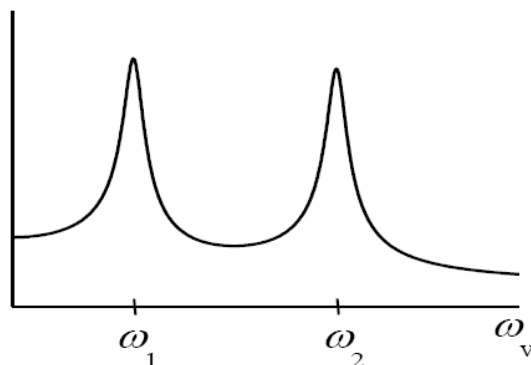
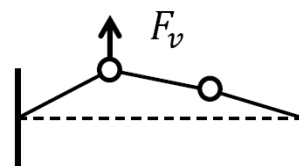


²Tako smo odabrali početni trenutak $t = 0$ da je elongacija maksimalna.

11.5 Prisilno gibanje sustava s više čestica

Razmotrimo najprije sustav dviju čestica. Kada vanjska peri-odična sila djeluje na jednu od čestica, pobuda se prenosi na obje čestice jer su međusobno povezane oprugom.

Kad se postigne stacionarno stanje (nakon vremena τ koje je određeno gušenjem u sustavu) čestice će se gibati frekvencijom vanjske pobude, ali različitim amplitudama i fazama, ovisno o frekvenciji pobude ω_V . Možemo načiniti pokus u kojemu ćemo promatrati amplitudu i fazu jedne čestice kao funkciju ω_V . Svaki put kada promijenimo frekvenciju pobude pričeka- mo da se postigne stacionarno stanje i onda izmjerimo amplitudu. Amplituda prve čestice (one koja je bliža pobudi) ovisi o frekvenciji pobude kao na slici. Uočavamo da je amplituda titranja velika samo na dvjema



karakterističnim frekvencijama. Druga čestica također ima maksimalne amplitude na tim frekvencijama, s time da na nižoj frekvenciji titra u fazi s prvom česticom, a na višoj frekvenciji titra u protufazi s prvom česticom. Cijeli sustav znatno apsorbira energiju vanjske pobude samo na svojim karakterističnim (rezonantnim) frekvencijama.

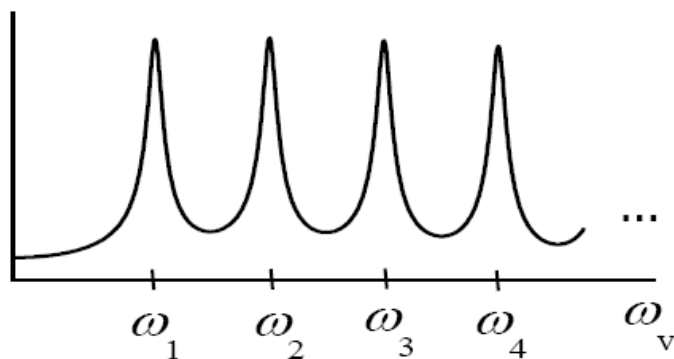
Sustav koji ima N čestica imat će N rezonantnih frekvencija.

Prisilno titranje kontinuuma

U slučaju kada promatramo kontinuum, postojat će beskonačno karakterističnih frekvencija. Na primjer, za elastičnu nit napetosti T i linijske gustoće μ , rezonancije se postižu na frekvencijama

$$\omega^{(n)} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \cdot \sqrt{2\pi\lambda^{(n)}} \quad . \quad (11.17)$$

Ovo možemo pokazati i pokusom. Pokus možemo izvesti na dva načina. Prvi način je da se napetost niti održava konstantnom, a da se mijenja frekvencija pobude. Drugi način je pobuđivanje niti stalnom frekvencijom uz kontinuiranu promjenu napetosti niti



Poglavlje 12

Valno gibanje

12.1 Putujući val

Do sada smo proučavali titranja u sustavima čestica koji su bili ograničeni na oba kraja. Uočili smo da takvi sustavi titraju u karakterističnim modovima – stojnim valovima, ili u superpoziciji više modova

Promotrimo sada sustav (elastični kontinuum) koji nije učvršćen na jednom kraju, nego se prostire u beskonačnost. Početna čestica (na mjestu $z = 0$) pobuđuje se vanjskom periodičnom silom tako da joj je elongacija u ovisnosti o vremenu:

$$u(0, t) = A \cdot \sin \omega t \quad . \quad (12.1)$$

Smjer vanjske sile u određenom trenutku označen je na slici strelicom. Budući da je riječ o elastičnom mediju, svaki komadić niti prati gibanje sebi susjednog komadića zbog sile napetosti T . Na slici je ilustrirano kako se poremećaj koji je vanjska sila učinila na mjestu $z = 0$ prostire duž niti. Ovdje smo ilustrirali nastajanje vala.

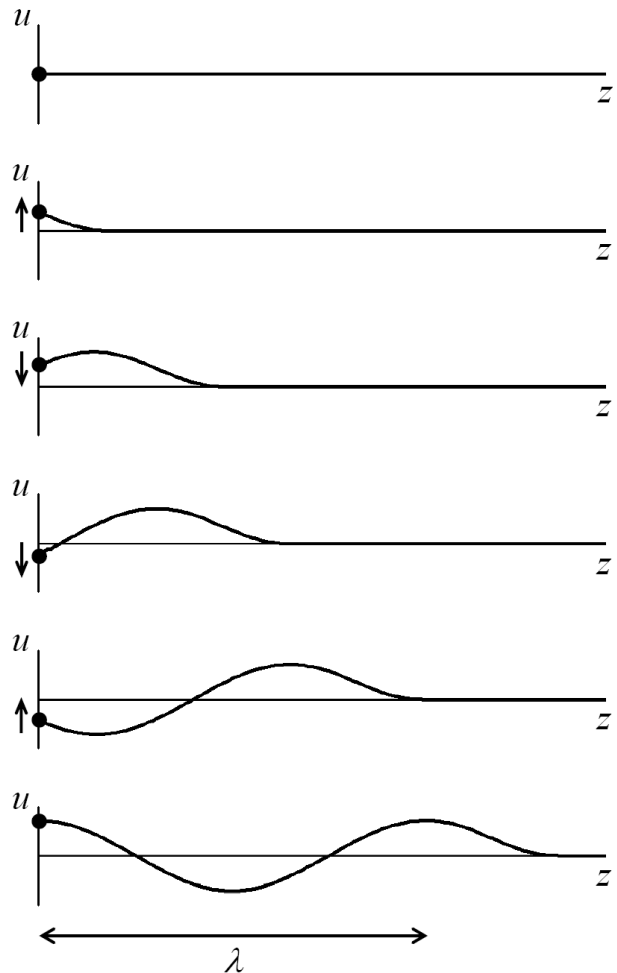
Val je poremećaj koji se širi sredstvom.

Val može biti *transverzalan* (kao u ovom primjeru) ili *longitudinalan*. U transverzalnemu valu su otkloni čestica okomiti na smjer prostiranja vala, dok su u longitudinalnom valu otkloni čestica na istom pravcu kojim se val prostire.

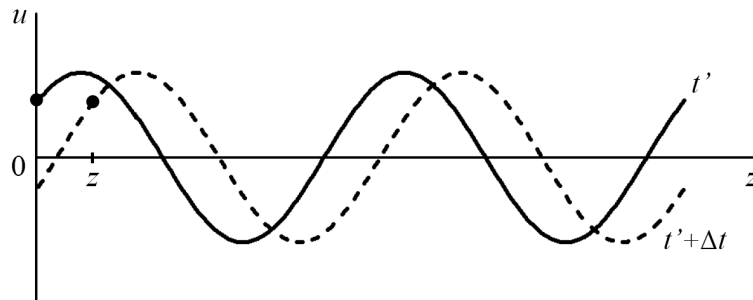
Uočimo da se čestica koja se nalazi na mjestu $z \neq 0$ giba na isti način kao početna čestica, ali s nekim vremenskim kašnjenjem Δt :

$$u(z, t) = A \cdot \sin \omega(t + \Delta t) \quad . \quad (12.2)$$

Nađimo koliko iznosi Δt na nekom mjestu z .



Pretpostavimo da je vanjska pobuda djelovala dovoljno dugo da se val u potpunosti proširio sredstvom. Na slici je prikazan oblik vala u dva trenutka: puna crta predstavlja val u trenutku t' , a isprekidana crta u trenutku $t' + \Delta t$.¹



Možemo uočiti da u trenutku $t' + \Delta t$ čestica koja se nalazi na mjestu z ima istu elongaciju i brzinu kao što to ima početna čestica na mjestu $z = 0$ u ranijem trenutku t' . Možemo pisati

$$u(z, t' + \Delta t) = u(0, t') = A \cdot \sin \omega t' \quad . \quad (12.3)$$

To znači da je poremećaj u vremenu Δt prešao udaljenost z . Brzina kojom se poremećaj premješta u ovom slučaju naziva se *fazna brzina*:²

$$v = \frac{z}{\Delta t} \quad . \quad (12.4)$$

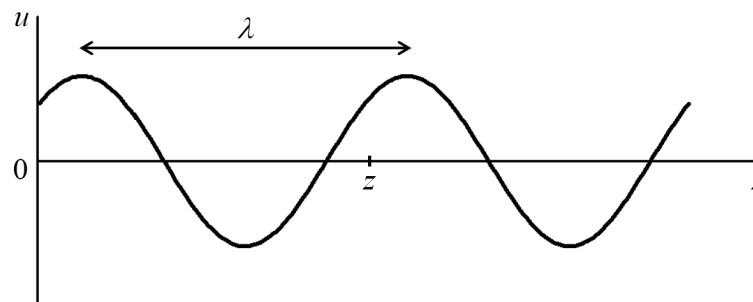
Elongacija čestice na mjestu z u trenutku t' je

$$u(z, t') = u(0, t') = A \cdot \sin \omega(t' - \Delta t) = A \cdot \sin \omega(t' - \frac{z}{v}) = A \cdot \sin(\omega t' - \frac{\omega}{v} z) \quad . \quad (12.5)$$

Valna duljina

Prostorni oblik vala je periodičan. Duljina tog prostornog perioda naziva se **valna duljina** i označava s λ . Drugim riječima, čestica na mjestu $z = \lambda$ ima istu elongaciju kao čestica na mjestu $z = 0$:

$$u(\lambda, t) = u(0, t) \quad . \quad (12.6)$$



¹kao da smo fotografirali val u dva uzastopna trenutka

²Fazna brzina je brzina širenja valova kroz sredstvo. Međutim, ta brzina ne odgovara uvijek i brzini prijenosa energije. Brzina prijenosa energije naziva se grupna brzina, ali razmatranje grupne brzine ostaje čitatelju kao znanje koje treba steći u kasnijem tijeku studija.

Uz rezultat (12.5), mora vrijediti

$$A \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v}\lambda\right) = A \cdot \sin(\omega t) \quad , \quad (12.7)$$

odnosno

$$\frac{\omega}{v}\lambda = 2\pi \quad . \quad (12.8)$$

Uz definiciju (11.15) za kutni valni broj, možemo napisati

$$\frac{\omega}{v} = k \quad . \quad (12.9)$$

Jednadžba (12.9) daje nam vezu između frekvencije i kutnog valnog broja, tj. određuje faznu brzinu u sredstvu. Takva relacija naziva se **dispersionijska relacija**.

Valna funkcija putujućeg vala sada glasi:

$$u(z, t) = A \cdot \sin(\omega t - kz) \quad . \quad (12.10)$$

Vidimo da su u valnoj funkciji putujućeg vala vremenski i prostorni dio uvršteni u argument sinusa zajedno kao razlika, za razliku od valne jednadžbe za stojni val (11.13) u kojoj su prostorni i vremenski dio odvojeni u dvije sinusoidne funkcije koje su međusobno pomnožene.

Valna funkcija (12.10) opisuje val koji putuje u pozitivnom z -smjeru. Val koji putuje u suprotnome smjeru ima oblik

$$u(z, t) = A \cdot \sin(\omega t + kz) \quad . \quad (12.11)$$

Valna jednadžba za napetu žicu dana je relacijom (11.12):

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad . \quad (12.12)$$

Ako u nju uvrstimo rješenje (12.10), dobivamo izraz za brzinu širenja vala napetom žicom:

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad . \quad (12.13)$$

Općeniti izraz za valnu jednadžbu glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad . \quad (12.14)$$

Također, vrlo općenito za elastičan medij možemo reći da valna jednadžba ima oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\text{elastičnost}}{\text{inercija}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad . \quad (12.15)$$

12.2 Longitudinalni valovi

Longitudinalni valovi nastaju zgušnjavanjem i razrjeđivanjem sredstva. Čestice sredstva osciliraju na pravcu prostiranja vala.



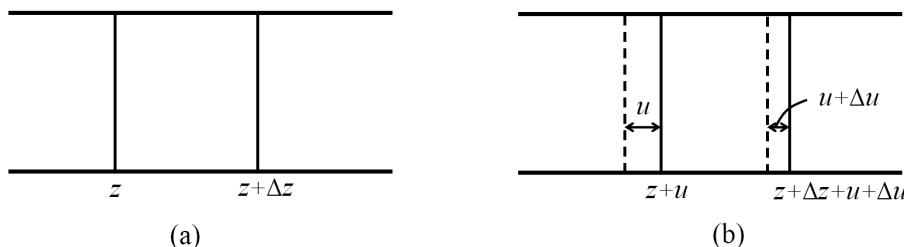
12.2.1 Elastična šipka

Proučimo longitudinalne valove u (kontinuiranom) elastičnom mediju koji je karakteriziran Youngovim modulom. Ako imamo šipku duljine l i poprečnog presjeka S , definicijska relacija za Youngov modul povezuje tlak $p = F/S$ s relativnim istezanjem šipke:

$$\frac{F}{S} = -Y \frac{\Delta l}{l} . \quad (12.16)$$

Negativan predznak nam kaže da vanjski tlak skraćuje šipku.

Da bismo proučavali valove u kontinuumu, promatrat ćemo kratke segmente šipke duljine Δz . Kad nema vala, segment šipke između z i $z + \Delta z$ prikazan je na slici a). Neistegnuta duljina mu



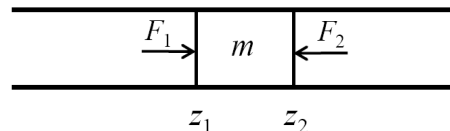
je Δz . Kad nastupi valni poremećaj (slika b)), sloj na mjestu z pomakne se za u , a sloj na mjestu $z + \Delta z$ pomakne se za $u + \Delta u$. Nova duljina segmenta je $\Delta z + \Delta u$. Relativno istezanje segmenta je $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ pa je tlak na njegovim krajevima

$$p = \frac{F}{S} = -Y \frac{\Delta u}{\Delta z} . \quad (12.17)$$

Za male Δz možemo reći da je tlak na mjestu z

$$p(z) = -Y \frac{\partial u}{\partial z} . \quad (12.18)$$

Pogledajmo sad dva bliska mjesta z_1 i z_2 . Tlak na mjestu z_1 je p_1 , a na mjestu z_2 je p_2 . Masa tog dijela štapa je $m = S \cdot \rho \cdot (z_2 - z_1)$. Na njega djeluje sila $F_1 = p_1 S$ u pozitivnom smjeru i $F_2 = p_2 S$ u negativnom smjeru. Ukupna sila je $F = S \cdot (p_1 - p_2)$. Drugi Newtonov zakon za gibanje tog dijela daje:



$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= F \\ \rho S (z_2 - z_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= S (p_2 - p_1) \\ \rho (z_2 - z_1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= Y \left[\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z_2} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z_1} \right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z_2 - z_1} . \end{aligned}$$

U limesu ($z_2 - z_1$) $\rightarrow 0$ dobivamo valnu jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} . \quad (12.19)$$

Ponovno vidimo da kvadrat brzine prostiranja vala možemo pisati

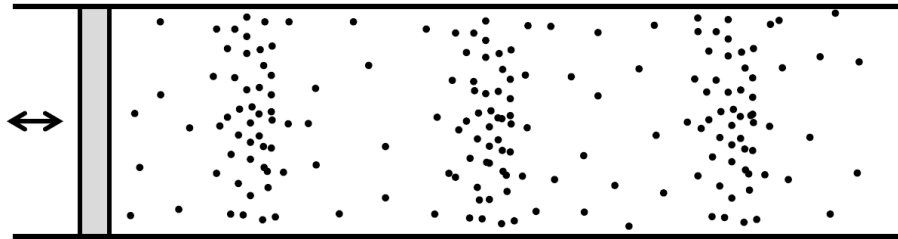
$$v^2 = \frac{Y}{\rho} = \frac{\text{elastičnost}}{\text{inercija}} . \quad (12.20)$$

Brzina longitudinalnog vala je

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} . \quad (12.21)$$

12.2.2 Stupac zraka

Zamislimo da imamo cijev ispunjenu zrakom i na jednom njezinom kraju membranu koja može vibrirati (i tako biti izvor vala).



Zrak će se u cijevi periodično zgušnjavati i razrjeđivati te će se tako stvoreni longitudinalni val propagirati kroz cijev. Ovaj primjer vrlo je sličan prethodnome u kojem se tlak periodično mijenja u prostoru. Ovdje, međutim, umjesto Youngovog modula upotrebljavamo veličinu *volumni modul* B :

$$B = -V \frac{\partial p}{\partial V} . \quad (12.22)$$

Izvod valne jednadžbe je isti kao u prošlom pododjeljku, a brzina vala je

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} . \quad (12.23)$$

Budući da su promjene tlaka brze pa ne dolazi do izmjene topline, ovo titranje zraka možemo smatrati nizom adijabatskih kompresija i ekspanzija. Za adijabatske promjene vrijedi

$$p \cdot V^\gamma = \text{konst.} \quad (12.24)$$

pa za volumni modul dobivamo

$$B = -V \frac{\partial p}{\partial V} = \gamma \cdot p . \quad (12.25)$$

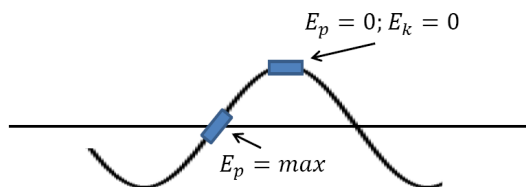
Sada lako možemo izračunati brzinu zvuka u plinu:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot p}{\rho}} . \quad (12.26)$$

Uvrstimo li vrijednost za atmosferski tlak, gustoću zraka u standardnim uvjetima i $\gamma = 1.4$, dobit ćemo $v = 332\text{m/s}$, što je upravo brzina zvuka u zraku.

12.3 Energija i snaga putujućeg vala

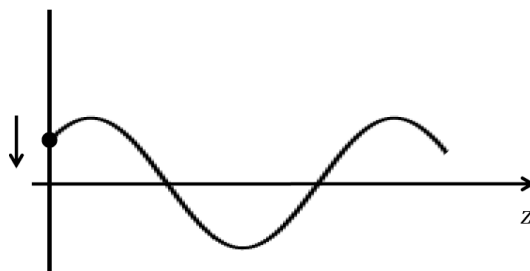
Promotrimo li u nekom trenutku transverzalni val koji putuje beskonačnom žicom (kontinuirani medij), uočit ćemo da je energija različito raspodijeljena uzduž žice.



Na mjestima na kojima je elongacija maksimalna, mase miruju pa je kinetička energija jednaka nuli. Na tim mjestima je žica u nerastegnutom stanju pa je i potencijalna energija jednaka nuli. Dakle na vrhu valnog brijega i na dnu valnog dola ukupna energija jednaka je nuli. Na mjestima na kojima je žica u ravnotežnom položaju, mase imaju najveću brzinu, a ujedno je i žica najviše istegnuta. Prema tome, na tim mjestima je i kinetička i potencijalna energija maksimalna. Kako val putuje, tako se i energija premješta brzinom prostiranja vala.

Snaga izvora

Da bi energija mogla putovati, izvor vala mora kontinuirano u sustav unositi novu energiju. Kolika mora biti snaga tog izvora?



U transverzalnemu valu čestice se gibaju okomito na smjer prostiranja vala. Periodična sila izvora je u smjeru gibanja čestica, tj. okomita na prostiranje vala. Ta vanjska sila savladava elastičnu silu žice koja je proporcionalna istegnutosti žice

$$F = -T \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad (12.27)$$

Snaga izvora jednaka je umnošku sile i brzine početne čestice $P = F \cdot \partial u / \partial t$, odnosno

$$P = -T \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (12.28)$$

Uvrstimo li valnu funkciju $u(z, t) = A \cdot \sin(\omega t - kz)$, a nakon deriviranja stavimo da je izvor na mjestu $z = 0$, dobivamo izraz za trenutnu snagu

$$P(t) = k\omega T A^2 \cos^2 \omega t \quad (12.29)$$

Uz disperzijsku relaciju $k = \omega/v$ i izraz za brzinu $v = \sqrt{T/\mu}$, trenutna snaga je

$$P(t) = A^2 \omega^2 \sqrt{T\mu} \cos^2 \omega t \quad (12.30)$$

a prosječna snaga je

$$\langle P \rangle = A^2 \omega^2 \sqrt{T\mu} \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \sqrt{T\mu} . \quad (12.31)$$

U ovom izrazu izvor određuje amplitudu i frekvenciju, a osim o tim parametrima, utrošena snaga ovisi i o svojstvu sredstva $Z = \sqrt{T\mu}$ koje zovemo *impedancija*.

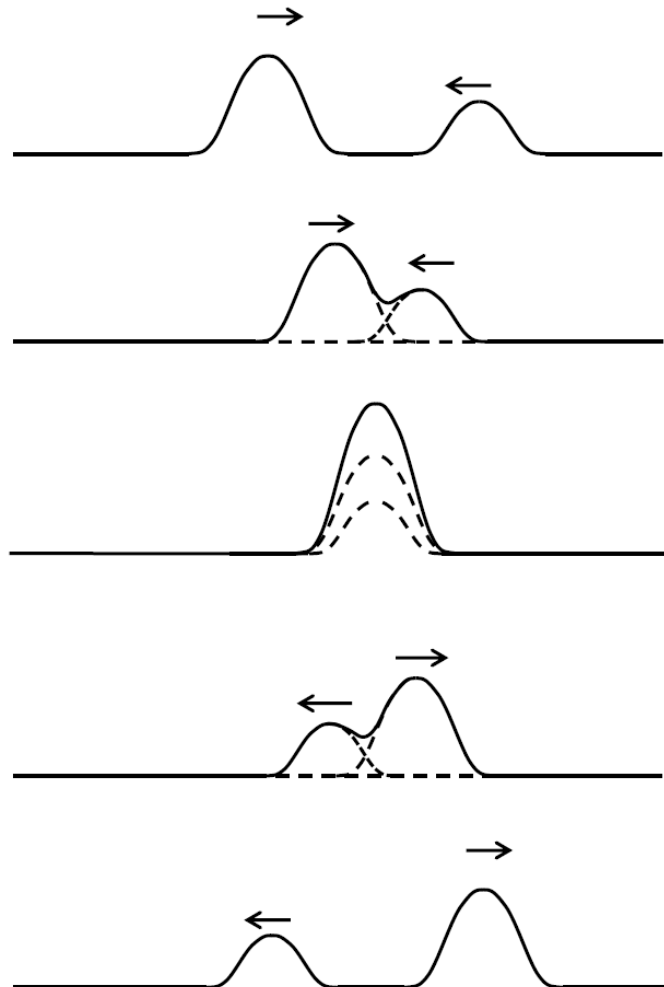
12.4 Superpozicija valova

Često se događa da dva vala (ili više njih) prolazi istim područjem. Zamislimo da dva valna paketa istodobno putuju napetom žicom. Neka je elongacija čestica u prvom valu predstavljena s $u_1(z, t)$, a u drugom valu s $u_2(z, t)$. Ukupna elongacija čestica na žici dana je zbrojem ovih funkcija:

$$u(z, t) = u_1(z, t) + u_2(z, t) . \quad (12.32)$$

To je princip superpozicije koji kaže da ako se nekoliko efekata pojavljuju istodobno, ukupni efekt je zbroj individualnih efekata.

Neka su promatrana dva valna paketa poremećaji koji putuju u suprotnim smjerovima. Na slici je prikazano njihovo prostiranje u vremenu. U trenutku kada se nađu na istome mjestu, oni se zbrajaju, ali se nakon toga nastave gibati svaki u svome smjeru nepromijenjeni – bez utjecaja jedan na drugoga.



12.4.1 Interferencija

Zamislamo da imamo dva vala koja putuju u istom smjeru. Neka su im amplitude i frekvencije jednake, a jedan u odnosu na drugoga su pomaknuti u fazi:

$$u_1(z, t) = A \sin(\omega t - kz) \quad (12.33)$$

$$u_2(z, t) = A \sin(\omega t - kz + \varphi) \quad (12.34)$$

Rezultantni val je superpozicija ova dva vala:

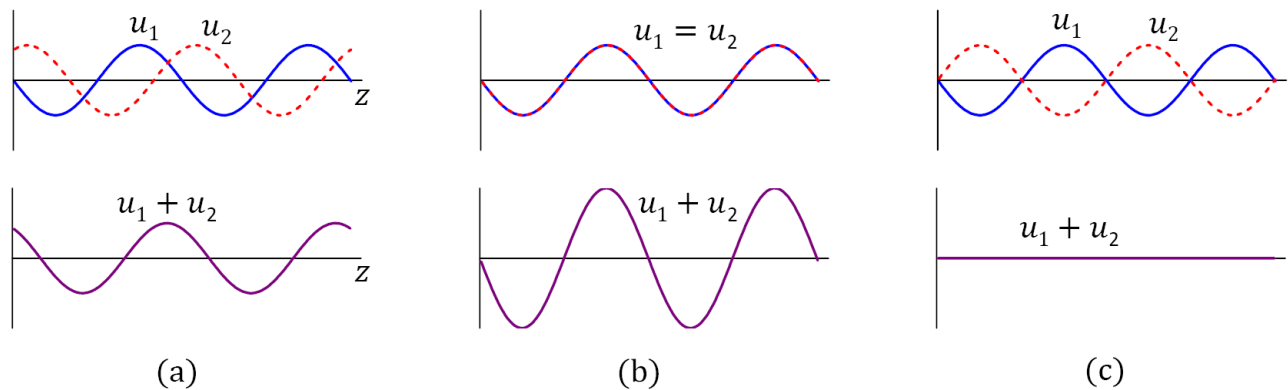
$$u(z, t) = A [\sin(\omega t - kz) + \sin(\omega t - kz + \varphi)] = 2A \cos \frac{\varphi}{2} \sin(\omega t - kz + \frac{1}{2}\varphi) \quad (12.35)$$

Na slici su prikazana tri slučaja interferencije za tri različita fazna pomaka.

Na slici (a) prikazana su dva vala pomaknuta u fazi za $\varphi = 2\pi/3$ te njihova superpozicija. Amplituda superpozicije je $2A \cdot \cos \varphi/2 = A$, a fazno je pomaknuta od prvog vala za $\pi/3$.

Na slici (b) prikazana su dva vala iste faze. Njihova superpozicija ima dvostruko veću amplitudu. Ovaj slučaj zove se *konstruktivna interferencija*.

Na slici (c) prikazana su dva vala pomaknuta u fazi za $\varphi = \pi$. Ta dva vala se u superpoziciji potpuno ponište. Ovaj slučaj zove se *destruktivna interferencija*.



Ako valovi putuju u suprotnim smjerovima, njihove valne funkcije su:

$$u_1(z, t) = A \sin(\omega t - kz) \quad (12.36)$$

$$u_2(z, t) = A \sin(\omega t + kz) \quad (12.37)$$

Superpozicija tih valova je:

$$u(z, t) = A [\sin(\omega t - kz) + \sin(\omega t + kz)] = 2A \sin kz \cos \omega t \quad (12.38)$$

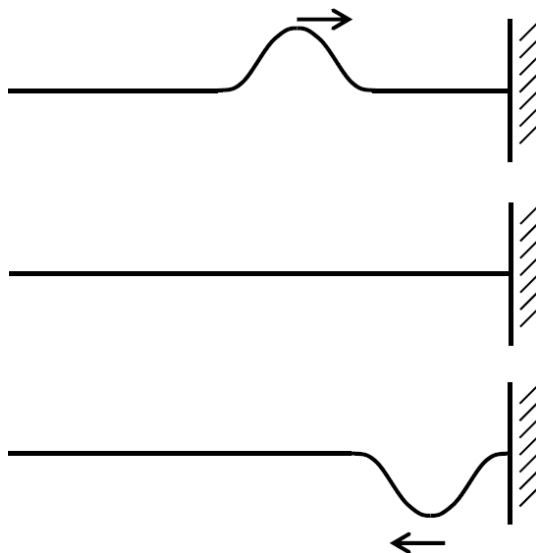
Što je upravo izraz za stojni val. Kada dva jednaka vala putuju u suprotnim smjerovima dobiva se stojni val. Ovo uvijek vrijedi u jednodimenzionalnom slučaju.

12.5 Refleksija valova

Kada val kontinuiranim sredstvom doputuje do njegova završetka, on će se odbiti (reflektirati). Način na koji će se val reflektirati ovisi o samom načinu kako je sredstvo prekinuto.

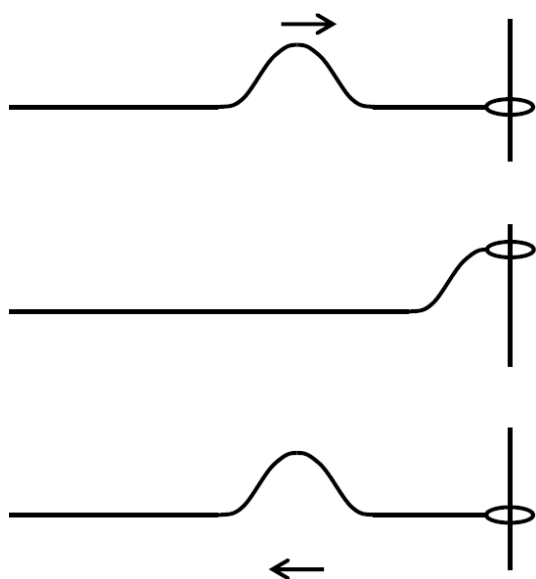
Jedan krajnji slučaj je *čvrsti kraj*, tj. kraj valnog sredstva učvršćen je u nepomičnu točku (npr. vijkom stegnut u zid). Dok val putuje sredstvom, svaka čestica koja titra prenosi susjednoj čestici količinu gibanja silom napetosti. Kada se val dođe do krajnje čestice, ona tu silu prenosi na zid, ali ne može titrati. Zbog trećeg Newtonovog zakona, i zid djeluje na česticu u suprotnom smjeru.³ Krajnja čestica sada tu silu prenosi na sebi susjednu česticu dajući joj tako količinu gibanja u smjeru suprotnom od smjera dolaznog vala. Tako valni brijeg prilikom refleksije na čvrstom kraju postaje valni dol i nastavlja se gibati u suprotnome smjeru. Kažemo da je prilikom refleksije na čvrstom kraju val dobio dodatnu fazu π .

Ovo ponašanje možemo zorno prikazati pokusom (slika desno). Pobudimo li jedan valni paket u obliku brijega, a kraj valnog sredstva je učvršćen, reflektirat će se valni dol.



Drugi krajnji slučaj je *slobodan kraj* valnog sredstva. Završna točka sredstva može se gibati transverzalno, a da na nju ne djeluje nikakva sila koja bi dolazila od završetka. To možemo zamisliti kao da je na kraju sredstva prsten koji bez trenja može kliziti po šipki. Krajnja točka slijedi oscilacije koje na nju prenose susjedne čestice, a tako oscilirajuća krajnja čestica služi kao novi izvor vala u suprotnome smjeru. Valni brijeg ostaje valni brijeg, tj. val pri refleksiji na slobodnom kraju ne mijenja fazu.

U oba slučaja reflektirani val ima istu amplitudu i frekvenciju kao dolazni val. Vidjeli smo u prošlom odjeljku da tada nastaje stojni val. U slučaju čvrstog kraja taj stojni val ima čvor na kraju sredstva, a u slučaju slobodnog kraja stojni val ima trbuh na kraju sredstva.



Da bi došlo do refleksije, ne mora val stići do kraja valnog sredstva (čvrstog ili slobodnog). Dovoljno je da dođe do nagle promjene impedancije sredstva $Z = \sqrt{T/\mu}$. Na mjestu skoka impedancije, dio vala se reflektira, a dio nastavlja putovati (transmitira se). Transmitirani val ostaje iste frekvencije kao i ulazni, ali mu se mijenja valna duljina.

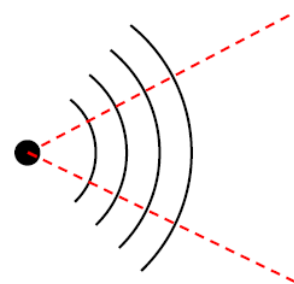
³Priroda sile je elastična.

12.6 Valovi u dvije dimenzije

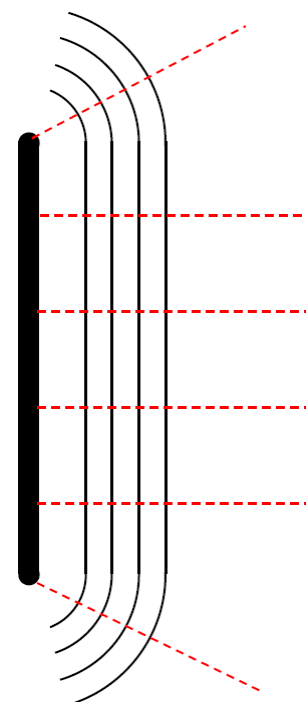
Dosad smo promatrali valove koji se prostiru jednodimenzionalnim sredstvom (napetom žicom, šipkom i sl.). Valovi se, naravno, mogu prostirati i ravninom (tj. u dvije dimenzije) ili prostorom (tj. u tri dimenzije).

Prostiranje valova u ravnini najbolje možemo dočarati promatranjem valova na vodi. To ćemo učiniti pokusima u kojima oscilator na površini vode predstavlja izvor valova, a valove promatramo pomoću grafoskopa.

Najprije pogledajmo širenje valova iz točkastog izvora. Uočavamo da se valovi šire u koncentričnim krugovima. Crtu koja povezuje sve točke na vrhu jednog brijega nazivamo *valna fronta*. Razmak dviju valnih fronti je valna duljina λ . Radijus valne fronte koja potječe iz točkastog izvora raste s vremenom. Na vrlo velikim udaljenostima valne fronte su gotovo ravni valovi. Na grafoskopu također uočavamo da su valne fronte sve bljeđe. To je zato što se amplituda valova smanjuje s udaljenošću od izvora. Ukupna energija vala sadržana u jednoj valnoj fronti je konstantna, ali raspodijeljena je na mnogo veću duljinu valne fronte.



Ravne valove možemo postići i tako da izvor ne bude točkast, nego izduljen. S tako proizvedenim ravnim valovima možemo promatrati refleksije na ravnoj prepreci. Ako je ravna prepreka paralelna s izduljenim izvorom, postizemo stojne valove slično jednodimenzionalnom slučaju. Ako je prepreka postavljena ukoso, možemo promatrati kako se odbijaju ravni valovi koji na prepreku dolaze pod nekim kutem.



U trećem pokusu promatramo dva točkasta izvora. Valovi koji izlaze iz tih izvora interferiraju i stvaraju tipične interferentne uzorke.

Valne fronte i valne zrake

Krivulju koja povezuje sve točke na vrhu jednog valnog brijega nazivamo *valna fronta*. Pravci koji su okomiti na valne fronte nazivaju se *valne zrake*. Zrake su usmjerene kao smjer prodiranja vala. One nam omogućuju da vizualiziramo prostiranje vala i eventualne refleksije koje se događaju putem.

U slučaju valova u prostoru (tri dimenzije), valne fronte su plohe koje sadržavaju sve točke jednog valnog brijega, a zrake su i dalje pravci, ovaj put okomiti na plohe valnih fronti.

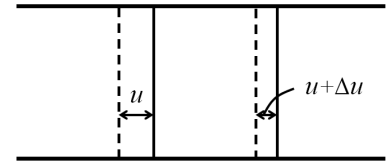
Poglavlje 13

Zvuk

Mehanički valovi frekvencija između 20 Hz i 20 kHz, nazivaju se *zvuk*. Valove tih frekvencija možemo detektirati osjetilom sluha. U fluidima su zvučni valovi uvijek longitudinalni, a u krutinama se oni mogu širiti i longitudinalno i transverzalno. Mehaničke valove viših frekvencija (20 kHz - 10 MHz) koje ne možemo čuti, nazivamo *ultrazvuk*. U ovom poglavlju baviti ćemo se zvukom.

13.1 Val pomaka i akustički tlak

Posebno nas zanima širenje zvuka u zraku. Razmotrimo zrak koji se nalazi u dugačkoj cijevi u ravnotežnom stanju. Tlak je jednak u svim točkama p_0 . Na jedan poprečni sloj zraka okolni slojevi djeluju silom $F = p_0 S$. Ako sad plinom putuje zvuk, nastaju lokalna zgušnjavanja i razrjeđenja. To su neravnotežna stanja. Ako je na mjestu promatranog poprečnog sloja u nekom trenutku zgušnjavanje, okolni slojevi djeluju silom $F + \Delta F$ pa je tlak u tom dijelu $p_0 + \Delta p$. Ovu razliku tlaka zovemo *akustički tlak* $\Delta p = p_{\text{ak}}(z, t)$, koji je funkcija položaja i vremena. Na nekom mjestu z , akustički tlak je



$$p_{\text{ak}}(z) = -B \frac{\partial u}{\partial z} , \quad (13.1)$$

pri čemu je $B = \gamma \cdot p$ volumni modul koji smo definirali u prošlom poglavlju. Ako je valna funkcija $u(z, t) = A \cdot \sin(\omega t - kz)$, onda su oscilacije tlaka

$$p_{\text{ak}}(z) = A \cdot B \cdot k \cdot \cos(\omega t - kz) . \quad (13.2)$$

Uočimo da su oscilacije pomaka u i tlaka p_{ak} pomaknute u fazi za $\pi/2$. Amplituda akustičkog tlaka je:

$$(p_{\text{ak}})_{\text{max}} = A \cdot B \cdot k = \gamma \cdot p \cdot k \cdot A . \quad (13.3)$$

13.2 Intenzitet zvuka

Intenzitet vala je prosječna snaga koju val prenosi po jedinici površine na koju val nailazi:

$$I = \frac{\langle P \rangle}{S} , \quad (13.4)$$

Snagu vala razmatrali smo u odjeljku 12.3:

$$I = \frac{\langle F \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \rangle}{S} = \left\langle p_{\text{ak}} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle . \quad (13.5)$$

Uvrštavajući izraze za $u(z, t)$ i $p_{\text{ak}}(z, t)$, te znajući da $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = 1/2$, dobivamo

$$I = \frac{1}{2} B \cdot A^2 \cdot k \cdot \omega \quad (13.6)$$

Koristeći disperzijsku relaciju $\omega = k \cdot v$, gdje je v brzina zvuka u sredstvu, te izraz (12.26) za brzinu $v = \sqrt{B/\rho}$, možemo pisati

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{(p_{\text{ak}})_{\text{max}}^2}{\rho \cdot v} \quad (13.7)$$

Intenzitet zvuka proporcionalan je kvadratu akustičkog tlaka.

Ovisnost intenziteta o udaljenosti

U otvorenom prostoru zvuk se iz točkastog izvora širi jednako u svim smjerovima (u tri dimenzije). U tom slučaju valne fronte su koncentrične sfere čije površine rastu s kvadratom udaljenosti od izvora. Budući da izvor daje uvijek istu prosječnu snagu, tj. istu energiju u svakom periodu, intenzitet na udaljenosti r od izvora dan je s

$$I(r) = \frac{\langle P \rangle}{4\pi^2 r^2} \quad (13.8)$$

U zatvorenim prostorima ova relacija ne vrijedi. Refleksije od podova zidova i stropova smanjuju gubitak intenziteta. U koncertnim dvoranama i crkvama zidovi su tako konstruirani da se intenzitet smanjuje s manjom potencijom od 2 (ponekad čak s $1/r$), a da se ne gubi jasnoća zvuka za većinu frekvencija u slušnom rasponu.

13.2.1 Decibelna skala

Ljudsko uho izuzetno je osjetljiv senzor za zvučne valove. Ono je sposobno osjetiti valove čiji intenzitet je 10^{-12}W/m^2 . Taj intenzitet uzima se kao *granica čujnosti*. S druge strane, uho je sposobno podnijeti i mnogo intenzivnije zvučne valove. Kada intenzitet zvuka postane veći od 1W/m^2 ljudsko uho to više ne može podnijeti i taj intenzitet nazivamo *granica boli*. Da bismo tako širok raspon intenziteta, koji se proteže preko 12 redova veličina, mogli opisivati, potrebna nam je veličina koja će u obzir uzimati logaritamsku skalu. Zato uvodimo *razinu jakosti zvuka* β . Za neki intenzitet I reći ćemo da ima razinu jakosti

$$\beta = (10\text{dB}) \log \frac{I}{I_0} \quad (13.9)$$

pri čemu je $I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$ intenzitet granice čujnosti. Jedinica dB (*decibel*) je deseti dio jedinice *bel*,¹ koja predstavlja jedan red veličine u intenzitetu. Tako granica čujnosti ima razinu 0 dB, a granica boli 120 dB. Lagano šuštanje lišća ima razinu 10 dB, normalan ljudski govor 50 dB, prometna ulica 70 dB, a polijetanje aviona 140 dB.

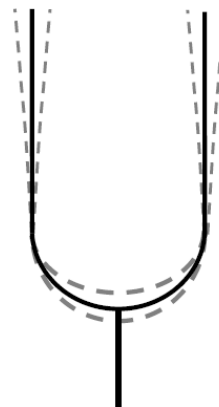
Zanimljivo je izračunati koliki je valni pomak i akustički tlak za neke razine zvuka. Na granici čujnosti valni pomak iznosi oko 10 pm (desetinka promjera atoma), a akustički tlak je približno $p_{\text{ak}} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{Pa}$ (tri milijarde puta manji od atmosferskog tlaka p_0). Čak i na granici boli valni pomak iznosi oko $100 \mu\text{m}$, a akustički tlak oko 30 Pa.

¹Ime je dobila po američkom fizičaru i inženjeru Alexanderu Grahamu Bellu

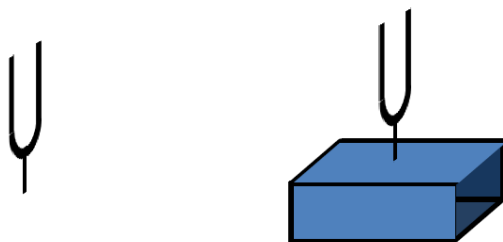
13.3 Glazbena vilica

Glazbena vilica je akustički rezonator koji služi za ugađanje blazbenih instrumenata. Načinjena je od elastičnog materijala u obliku zaobljenog slova Y. Razlog za uporabu glazbenih vilica leži u činjenici da one daju najčišće tonove od svih izvora zvuka. Mi ćemo pomoću glazbenih vilica napraviti nekoliko instruktivnih pokusa sa zvukom.

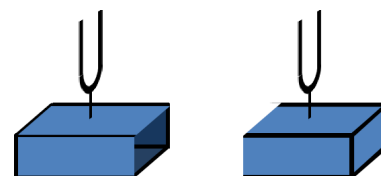
Najprije pogledajmo model glazbene vilice koja titra izuzetno niskom frekvencijom. Nakon udara batićem krakovi vilice titraju karakterističnom frekvencijom, a titranja se prenose i na donji dio vilice. Ako je rezonantna frekvencija vilice visoka, oscilacije krakova ne možemo vidjeti, ali možemo se uvjeriti u postojanje titranja tako da kraku približimo matematičko njihalo. Kada kuglica njihala dodirne vilicu koja titra, naglo odskoči jer preuzme količinu gibanja od kraka vilice.



Intenzitet zvuka koji daje glazbena vilica možemo pojačati ako stalak vilice učvrstimo u rezonantni ormarić. Titranje vilice prenosi se na stijenku rezonantnog ormarića, koji ima duljinu $\lambda/4$. U ormariću, kojemu je jedan kraj zatvoren, a drugi otvoren, pobuđuje se mod. Time se mnogo više energije u jednom periodu prenese na okolinu. U stvari, učvršćivanjem na rezonantni ormarić faktor dobrote Q se smanji i time pojača intenzitet emitiranog zvuka.

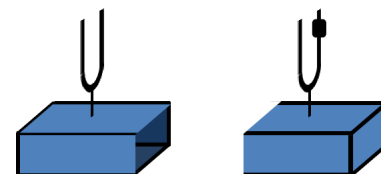


U trećem pokusu pokazujemo kako se zvukom energija titranja može prenijeti s jedne glazbene vilice na drugu. Dvije jednake glazbene vilice postavimo tako da im otvori rezonantnih ormarića "gledaju" jedan prema drugom. Batićem pobudimo prvu vilicu na titranje. zvuk koji izlazi iz ormarića pobudit će drugu glazbenu vilicu na titranje, budući da je to i njezina rezonantna frekvencija. Možemo provjeriti titra li druga vilica tako što ćemo na nju prisloniti kuglicu matematičkog njihala.



13.3.1 Udari

Pogledajmo kako se ponaša zvuk koji izlazi iz dva ormarića kao u prošlom primjeru, ali tako da su rezonantne frekvencije dviju vilica samo neznatno različite. To ćemo postići tako da jednoj vilici malo povećamo masu (stavljajući gumicu na jedan krak). Pobudimo li batićem obje vilice na titranje, čut ćemo zvučne udare.



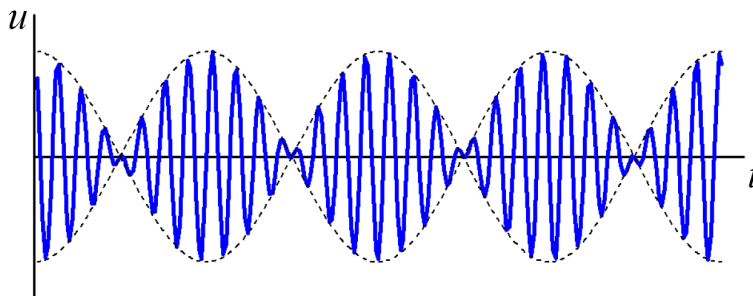
Udari nastaju kao superpozicija dvaju valova bliskih frekvencija $\omega_1 \approx \omega_2$:

$$u_1(t) = A \cos \omega_1 t \quad ; \quad u_2(t) = A \cos \omega_2 t \quad . \quad (13.10)$$

Superpozicija tih dvaju valova je

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = A [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t] = 2A \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) . \quad (13.11)$$

Ova funkcija prikazana je na donjoj slici. Rezultantni zvuk ima frekvenciju koja je između dva tona, a amplituda je modulirana s frekvencijom određenom razlikom frekvencija dvaju tonova. Kada su



frekvencije bliske, ova modulacija amplitude može se jasno razlučiti. Ovu pojavu glazbenici koriste prilikom ugađanja instrumenata. Pojavu možemo i vizualno prikazati uz pomoć osciloskopa.

13.4 Glazbeni instrumenti

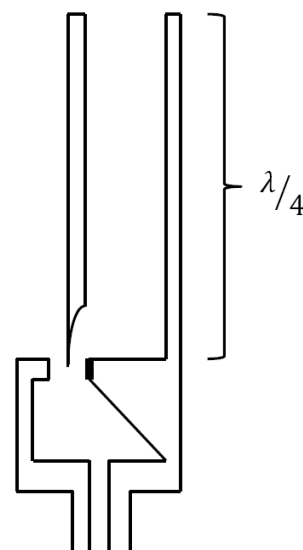
Različiti narodi i kulture poznaju mnoštvo različitih glazbenih instrumenata. Nemoguće je sve te instrumente nabrojiti, ali većina glazbala tonove proizvodi na jedan od sljedećih načina.

Glazbala s napetim žicama daju ton koji uglavnom odgovara osnovnom modu napete žice, ali se pobuđuju i viši modovi. Mod se pobuđuje udarcem mekanim batićem (npr. u glasoviru), trzajem (npr. na gitari ili tamburici), ili povlačenjem gudalom (npr. na violini).

Puhački instrumenti su obično cijevi na čijem jednom kraju (koji služi kao čvrsti kraj) se upuhuje zrak, a drugi kraj je otvoren (slobodan). Osnovni mod titranja stupca zraka u takvoj cijevi ima valnu duljinu četiri puta veću od duljine cijevi. Pobudimo li upuhivanjem zrak na titranje, najveću amplitudu imat će titranje u osnovnom modu, čime je definiran ton. Puhačke instrumente dijelimo na one koji imaju sviralo na klin (npr. orgulje) ili jezičac (npr. klarinet).

Kod orgulja (slika desno), nailaskom struje zraka na klin koji dijeli unutrašnjost cijevi od vanjskog prostora, turbulencije zraka uzrokuju titranje koje se guši za sve frekvencije osim za modove pojedine cijeci.

U klarinetu struja zraka pobuđuje jezičac na titranje, a jezičac svojim titranjem pobuđuje titranje stupca zraka u cijevi. I ovdje se naglašava ono titranje koje je u rezonanciji s osnovnim modom poluotvorene cijevi.

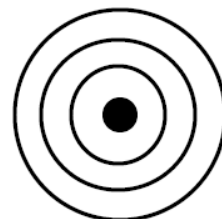


13.5 Dopplerov efekt

Kad postoji relativno gibanje izvora zvuka i slušatelja, opaža se promijenjena frekvencija (ν) u odnosu na onu koju emitira sam izvor (ν_0). Ovaj efekt otkrio je i opisao Christian Doppler 1842. godine pa se po njemu on naziva Dopplerov efekt. Primjer iz svakodnevnog života je kada pokraj nas prolazi vlak s upaljenom sirenom. Dok nam se približava, visina zvuka sirene je veća nego kad se udaljava. Razmotrimo Dopplerov efekt proučavajući četiri odvojena slučaja.

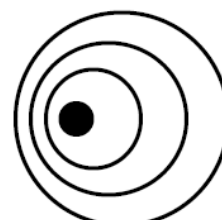
Izvor i slušatelj miruju

U ovom slučaju val se iz izvora širi u koncentričnim krugovima. Neka je brzina širenja vala u sredstvu v . Razmak valnih fronti (valnih brijegova) λ određen je frekvencijom izvora i brzinom širenja vala: $\lambda = v/\nu_0 = v \cdot T_0$, pri čemu je $T_0 = 1/\nu_0$ period oscilacija izvora. Frekvencija kojom valne fronte dolaze do mirujućeg opažatelja dana je omjerom brzine širenja vala i valne duljine. To je upravo frekvencija izvora $\nu_0 = v/\lambda$.



Izvor se giba – slušatelj miruje

U ovom slučaju svaka valna fronta se širi koncentrično iz mjesta na kojem je izvor bio u trenutku emitiranja te fronte. Ako se izvor giba brzinom v_I , središta sfera su razmaknuta za $v_I \cdot T_0$. Valovi koji putuju u smjeru gibanja izvora imaju skraćenu valnu duljinu $\lambda' < \lambda$, a valovi koji putuju u suprotnom smjeru imaju produženu valnu duljinu. Neka se izvor giba prema slušatelju. Udaljenost valnih fronti je $\lambda' = \lambda - v_I \cdot T_0$. Frekvencija kojom valne fronte dolaze do mirujućeg opažatelja dana je omjerom brzine širenja vala i skraćene valne duljine λ' :



$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - v_I T_0} = \frac{v}{\lambda} \frac{1}{1 - v_I \frac{T_0}{\lambda}},$$

odnosno

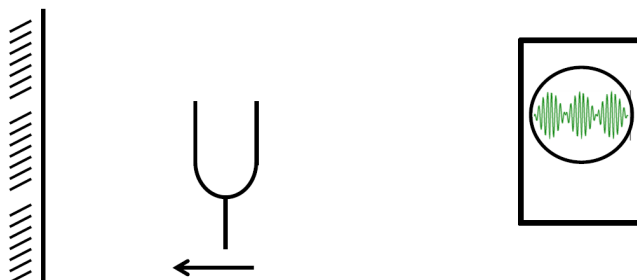
$$\nu' = \nu_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_I}{v}} \tag{13.12}$$

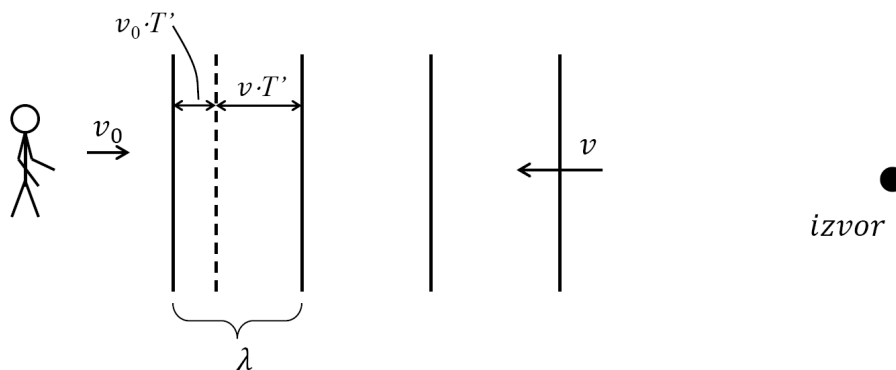
kada se izvor približava, odnosno

$$\nu' = \nu_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{v_I}{v}} \tag{13.13}$$

kada se izvor udaljava od slušatelja.

Zanimljiv pokus možemo napraviti s jednom glazbenom vilicom koja se giba brzinom v prema zidu. Ako iza vilice postavimo mikrofonski detektor, detektirat ćemo zvučne valove koji dolaze izravno od vilice (koja se udaljava od mikrofona) kao i zvučne valove koji su se reflektirali od zida. Ovi potonji imaju višu frekvenciju jer se vilica giba prema zidu. Ako mikrofonski detektor spojimo na osciloskop, opaziti ćemo udare.



Izvor miruje – promatrač se giba


Val se iz izvora širi u koncentričnim krugovima. Pretpostavimo da je udaljenost izvora i promatrača dovoljno velika tako da val na mjestu slušatelja možemo smatrati ravnim valom. Neka je brzina širenja vala u sredstvu v . Razmak valnih fronti je λ . Neka se promatrač giba prema izvoru brzinom v_P . Nakon što se on susretne s jednom valnom frontom, do susreta sa sljedećom valnom frontom prođe vrijeme T' . Za to vrijeme promatrač prijeđe put $v_P \cdot T'$, a valna fronta put $v \cdot T'$. Zbroj ta dva puta jednak je valnoj duljini

$$\lambda = v_P \cdot T' + v \cdot T' \quad . \quad (13.14)$$

Frekvencija kojom promatrač prima valne fronte je $\nu' = 1/T'$:

$$\nu' = \frac{v + v_P}{\lambda} = \frac{v}{\lambda} \left(1 + \frac{v_P}{v} \right) \quad ,$$

odnosno

$$\nu' = \nu_0 \left(1 + \frac{v_P}{v} \right) \quad . \quad (13.15)$$

Izvor i promatrač se gibaju jedan prema drugome

Kombinacijom gornjih razmatranja možemo dobiti općeniti izraz za opaženu frekvenciju kad se i izvor i promatrač gibaju, i to jedan prema drugome:

$$\nu' = \nu_0 \left(\frac{1 + \frac{v_P}{v}}{1 - \frac{v_I}{v}} \right) \quad . \quad (13.16)$$

Svi gornji izrazi bili su izvedeni za slučaj da se izvor i promatrač gibaju po istome pravcu. Dopplerov efekt se, naravno, opaža i u općenitijem slučaju, npr. kad avion prolazi po pravcu daleko od mirujućeg promatrača. Kako se udaljenost aviona od promatrača smanjuje, frekvencija opaženog zvuka je viša od stvarne frekvencije motora aviona, ali se kontinuirano mijenja i u trenutku kad je avion u najbližoj točki promatraču, opažena frekvencija jednaka je emitiranoj. Nakon toga frekvencija se nastavlja kontinuirano smanjivati kako se avion udaljava.

Dopplerov efekt za svjetlost

Dopplerov efekt opaža se i prilikom promatranja elektromagnetskih valova.² Međutim, za prostiranje elektromagnetskih valova nije potreban medij. Stoga nam je za Dopplerov efekt važna samo relativna brzina izvora i opažača v . Brzina prostiranja elektromagnetskih valova jednaka je $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ u svim inercijalnim sustavima. U relativističkoj fizici može se izvesti izraz za Dopplerov efekt svjetlosnih valova:

$$\nu' = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} . \quad (13.17)$$

Vidimo da je izraz drugačiji od onoga za zvučne valove, ali kvalitativno je efekt sličan. Ako se neka zvijezda od nas udaljava, opažena svjetlost imat će nižu frekvenciju od emitirane. Pretpostavimo da zvijezda emitira zelenu svjetlost. Ako se udaljava, opažena boja bit će nešto bliža crvenoj. Ta pojava naziva se "crveni pomak". Ako se zvijezda približava, opaziti ćemo "plavi pomak". Upravo Dopplerovim efektom možemo odrediti brzine udaljenih zvijezda u odnosu na Zemlju, a upravo takvim opažanjima je zaključeno da se Svemir širi.

Osim u astronomiji, Dopplerov efekt se koristi i u svakodnevnom životu. Tako npr. policijski radar mjeri brzinu automobila na cesti emitirajući elektromagnetske valove (mikrovalnih frekvencija) i mjereći frekvenciju reflektiranih valova.

²Svjetlost je također elektromagnetski val.

Poglavlje 14

Elektromagnetski valovi

14.1 Maxwellove jednadžbe

Maxwellove jednadžbe predstavljaju cjelinu koja potpuno definira sve elektromagnetske pojave, slično kao što Newtonovi zakoni potpuno definiraju mehaničke pojave. Maxwellove jednadžbe naučili smo u kolegiju Fizika 1, ali ćemo ih ovdje još jednom pregledno prikazati jer su nam potrebne za razumijevanje elektromagnetskih valova.

a) Gaussov zakon za električno polje

Ovaj zakon govori o toku električnog polja kroz zatvorenu plohu koja obuhvaća električni naboj:

$$\oint_A \vec{\mathcal{E}} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} . \quad (14.1)$$

To je prva Maxwellova jednadžba.

b) Gaussov zakon za magnetsko polje

Ovaj zakon govori o toku magnetskog polja kroz zatvorenu plohu:

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0 . \quad (14.2)$$

To je druga Maxwellova jednadžba koja nam kaže da ne postoje magnetski naboji.

c) Faradayev zakon indukcije

Elektromotornu silu koja se inducira u zatvorenoj strujnoj petlji zbog promjene magnetskog toka možemo pisati $\mathcal{E}_{\text{EMF}} = \oint_C \vec{\mathcal{E}} d\vec{l}$. Tada Faradayev zakon indukcije glasi:

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} . \quad (14.3)$$

To je treća Maxwellova jednadžba.

d) Amperov zakon

Integral magnetskog polja po zatvorenoj krivulji određen je strujom koja je obuhvaćena tom zatvorenom krivuljom:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I . \quad (14.4)$$

J. C. Maxwell je teorijskim razmatranjem simetrija gornjih jednadžbi zaključio da Amperov zakon nije potpun. Ako integral električnog polja po zatvorenoj krivulji u Faradayevom zakonu ovisi o

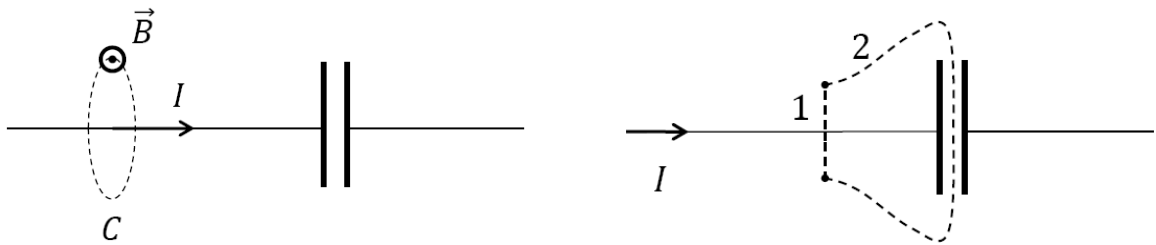
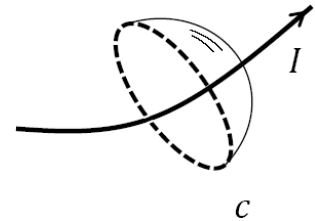
vremenskoj promjeni magnetskog toka, onda bi trebalo biti i obrnuto: Integral magnetskog polja po zatvorenoj krivulji mora ovisiti o vremenskoj promjeni električnog toka. Tako dopunjen Amperov zakon:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (14.5)$$

predstavlja četvrtu Maxwellovu jednadžbu. Ovo je bio velik korak u ujedinjavanju temeljnih sila – električne i magnetske. Dvadesetak godina kasnije Hertz je svojim eksperimentima pokazao ispravnost ovih jednadžbi.

Drugi član s desne strane jednadžbe (14.5) sadrži izraz $\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$ koji zovemo *pomačna struja*.

Nužnost uvođenja ovog člana prikazat ćemo primjerom. Ako žicu kojom teče struja "obuhvatimo" zatvorenom krivuljom, Ampereov zakon nam točno kaže koliki će biti integral magnetskog polja po toj zatvorenoj krivulji. Tom rezultatu doprinose sve struje koje prolaze kroz zamišljenu plohu razapetu preko zatvorene krivulje. Navedeni integral ne može ovisiti o tome kako je razapeta zamišljena ploha. Međutim, postoje slučajevi kad ova tvrdnja nije zadovoljena.



Razmotrimo struju koja nabija pločasti kondenzator. Možemo izračunati linijski integral magnetskog polja po kružnici koja obuhvaća struju daleko od kondenzatora. Ta kružnica omeđuje plohu S_1 kroz koju prolazi struja I . No, jednako je ispravno odabrati površinu S_2 na slici desno, jer je ona omeđena istom kružnicom po kojoj računamo linijski integral magnetskog polja. Rezultat mora biti neizmijenjen. Kroz površinu S_2 ne prolazi nikakva struja, ali postoji vremenska promjena električnog toka.¹ Lako se može pokazati da je vremenska promjena električnog toka između ploča kondenzatora upravo jednaka struji koja dovodi naboje na kondenzator podijeljenoj s ϵ_0 :

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0} .$$

Sve četiri Maxwellove jednadžbe možemo pregledno napisati:

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{E} d\vec{A} &= \frac{Q}{\epsilon_0} & \oint_C \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \oint_A \vec{B} d\vec{A} &= 0 & \oint_C \vec{B} d\vec{l} &= \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \end{aligned} \quad (14.6)$$

Za slučaj kada u prostoru nema električnih naboja i struja, Maxwellove jednadžbe glase:

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{E} d\vec{A} &= 0 & \oint_C \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \oint_A \vec{B} d\vec{A} &= 0 & \oint_C \vec{B} d\vec{l} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \end{aligned} \quad (14.7)$$

¹Kondenzator se nabija pa raste električno polje između ploča kondenzatora.

14.1.1 Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku

U prošlom semestru razmatrali smo operator gradijenta. To je prostorna derivacija skalarnog polja koja nam u nekoj točki kaže u kom smjeru je najveća promjena tog skalarnog polja. Rezultat operacije gradijent u cijelom prostoru je vektorsko polje.

Možemo li definirati operator prostorne derivacije vektorskog polja? Možemo, i to na dva načina. Jedan način će nam kao rezultat dati skalarno polje, a drugi način će dati vektorsko polje.

Pojam divergencije vektorskog polja

Zamislimo neko vektorsko polje $\vec{F}(\vec{r}, t)$. Odaberemo točku promatranja P i okružimo ju zatvorenom plohom S_i koja obuhvaća volumen ΔV_i . Tok polja \vec{F} iz volumena je

$$\Phi_i = \oint_{S_i} \vec{F} d\vec{a} . \quad (14.8)$$

Smanjujemo plohu S_i (a time i volumen V_i). Definiramo *divergenciju* vektorskog polja \vec{F} u točki P :

$$\text{div } \vec{F} \Big|_P = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Phi_i}{\Delta V_i} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{F} d\vec{a}}{\Delta V_i} . \quad (14.9)$$

To je skalarna veličina koja se može definirati za svaku točku u prostoru. Dakle, dobivamo skalarno polje.

Gaussov zakon u diferencijalnom obliku

$$\text{div } \vec{\mathcal{E}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{\mathcal{E}} d\vec{a}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta Q}{\epsilon_0}}{\Delta V} = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (14.10)$$

Divergencija polja postoji samo tamo gdje ima izvora ili ponora silnica. Za električno polje to je električni naboj, a za magnetsko polje divergencija je uvijek nula:

$$\text{div } \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (14.11)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (14.12)$$

Time smo dobili prve dvije Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku.

Pojam rotacije vektorskog polja

Zamislimo proizvoljno vektorsko polje $\vec{F}(\vec{r}, t)$. Odaberemo točku promatranja P i okružimo ju zatvorenom krivuljom C_i . Neka je ploha Δa_i omeđena s C_i i sadrži točku P . Možemo definirati veličinu *cirkulacija* vektorskog polja

$$\Gamma_i = \oint_{C_i} \vec{F} d\vec{l} . \quad (14.13)$$

Smanjujemo C_i i Δa_i tako da ploha postane ravna, a i dalje sadrži točku P . Neka je \hat{n} normala na tu ravnu plohu. Smanjivanjem plohe a_i smanjuje se i cirkulacija Γ_i ali očekujemo daomjer njihovih iznosa teži konstantnoj vrijednosti.

Definiramo *rotaciju* vektorskog polja \vec{F} u točki P tako da njezina komponenta u smjeru \hat{n} iznosi:

$$\left(\text{rot } \vec{F} \right) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta a_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{F} d\vec{l}}{\Delta a_i} . \quad (14.14)$$

Rotacija je vektorska veličina koja se može definirati za svaku točku u prostoru. Dakle, rotacija vektorskog polja je vektorsko polje. Gornja definicija daje nam samo jednu komponentu vektora $\text{rot } \vec{F}$ u smjeru \hat{n} . Da bismo odredili cijeli vektor, trebamo tri komponente – tri međusobno okomite krivulje.

Faradayev zakon u diferencijalnom obliku

Faradayev zakon u integralnom obliku glasi:

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} . \quad (14.15)$$

Podijelimo li obje strane jednadžbe s Δa i pustimo da $\Delta a \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{\mathcal{E}} d\vec{l}}{\Delta a} = -\frac{d}{dt} \frac{\vec{B} \cdot \Delta \vec{a}}{\Delta a} . \quad (14.16)$$

Lijeva strana jednadžbe je definicija komponente rotacije u smjeru normale na površinu Δa , a s desne strane imamo jedinični vektor $\hat{n} = \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta a}$ pa pišemo:

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} \cdot \hat{n} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \hat{n} . \quad (14.17)$$

Ovo vrijedi za bilo koji smjer \hat{n} pa pišemo

$$\text{rot } \vec{\mathcal{E}} = -\frac{d\vec{B}}{dt} . \quad (14.18)$$

Amperov zakon u diferencijalnom obliku

Sličnim postupkom dobivamo:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{d\vec{\mathcal{E}}}{dt} \right) . \quad (14.19)$$

Za slučaj kada u prostoru nema električnih naboja i struja, Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku glase:

$\begin{aligned} \text{div } \vec{\mathcal{E}} &= 0 & \text{rot } \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} \\ \text{div } \vec{B} &= 0 & \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{\mathcal{E}}}{dt} \end{aligned}$	(14.20)
--	---------

Divergencija i rotacija u kartezijevom koordinatnom sustavu

Može se pokazati da operatore divergencije i rotacije u kartezijevom koordinatnom sustavu izračunavamo na sljedeći način:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} , \quad (14.21)$$

$$\text{rot } \vec{F} = \hat{i} \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) . \quad (14.22)$$

Izraz za rotaciju možemo pregledno pisati pomoću determinante:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} . \quad (14.23)$$

Nabla operator

Podsjetimo se da smo dosad definirali tri vrste derivacija za skalarna i vektorska polja. Operator gradijenta djeluje na skalarno polje i daje vektorsko polje. Operator divergencije djeluje na vektorsko polje i daje skalarno polje, a operator rotacije djeluje na vektorsko polje i daje vektorsko polje. Možemo uvesti operator vektorske derivacije koji zovemo *nabla operator*:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} . \quad (14.24)$$

U tom operatoru objedinjena su svojstva vektora i prostorne derivacije. Možemo definirati množenje skalarnim poljem, zatim skalarni produkt s vektorskim poljem i vektorski produkt s vektorskim poljem.

Množenje nabla operatora sa skalarnim poljem daje vektorsko polje:

$$\vec{\nabla} \varphi = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \hat{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathbf{grad} \varphi . \quad (14.25)$$

Skalarno množenje nabla operatora s vektorskim poljem daje skalarno polje:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} F_x + \hat{j} F_y + \hat{k} F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \mathbf{div} \vec{F} . \quad (14.26)$$

I na kraju vektorsko množenje nabla operatora s vektorskim poljem daje vektorsko polje:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \mathbf{rot} \vec{F} . \quad (14.27)$$

Možemo definirati i množenje nabla operatora sa samim sobom (skalarni produkt):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 . \quad (14.28)$$

Ovaj operator zovemo *Laplaceov operator* ili u žargonu *laplasijan*.

Korisni teoremi

Gaussov teorem povezuje integral po zatvorenoj plohi i integral divergencije po volumenu obuhvaćenom tom istom plohom:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV . \quad (14.29)$$

Stokesov teorem povezuje integral po zatvorenoj krivulji i integral rotacije po plohi razapetoj tom istom krivuljom:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{a} . \quad (14.30)$$

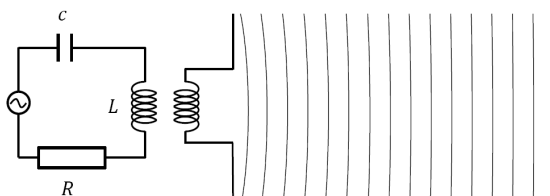
Dvostruka primjena operatora rotacije može se raspisati na dva člana:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} . \quad (14.31)$$

14.2 Elektromagnetski valovi

Potaknut Maxwellovim teorijskim razmatranjima, Henrich Hertz je 1887. godine otkrio radio valove i pokazao da se oni gibaju istom brzinom kao i svjetlost. Radiovalovi i svjetlost spadaju u široku porodicu elektromagnetskih valova. Frekvencije tih valova su u rasponu od 10^4 Hz do 10^{24} Hz, a odgovarajuće valne duljine variraju od kilometara do femtometara. Valovi valnih duljina manjih od mikrometara nastaju u objektima atomske veličine ili manjima pa za njihovo razumijevanje treba upotrijebiti pravila kvantne fizike. Međutim, nastajanje elektromagnetskih valova valnih duljina centimetara ili više možemo razumjeti korištenjem klasične fizike i Maxwellovih jednadžbi.

Za nastajanje elektromagnetskih valova potrebni su naboji koji se ubrzano gibaju ili promjenjive električne struje. Ovdje je prikazana shematska slika uređaja za generiranje elektromagnetskih valova.



U središtu uređaja je RLC oscilator koji ima karakterističnu rezonantnu frekvenciju.² U njemu struje i naboji osciliraju sinusoidalno. Zavojnica u RLC krugu je primar transformatora čiji sekundar je povezan na električnu dipolnu antenu – dva vodljiva štapa. Oscilirajuće struje uzrokuju osciliranje naboja između krajeva štapova antene. Antena se ponaša kao električni dipol čiji dipolni moment se sinusoidalno mijenja u vremenu. Time se i električno polje koje taj dipol stvara sinusoidalno mijenja u vremenu. Također, naboji putujući kroz antenu stvaraju oscilirajuće struje koje pak stvaraju oscilirajuće magnetsko polje. Međutim, promjene električnog i magnetskog polja ne događaju se istodobno u cijelom prostoru, nego se poremećaji šire brzinom svjetlosti. Ako je promatrač daleko od izvora, valne fronte postaju ravnine. Tada govorimo o ravnom valu.

Navedimo neka svojstva elektromagnetskih valova:

- Elektromagnetski valovi uvijek su transverzalni
- U elektromagnetskom valu je električno polje uvijek okomito na magnetsko
- Vektor $\vec{E} \times \vec{B}$ određuje smjer prostiranja elektromagnetskog vala.
- Električno i magnetsko polje su uvijek u fazi.

14.3 Valna jednadžba za elektromagnetski val

Proučavajući mehaničke i zvučne valove u prethodnim poglavljima naučili smo da se valna jednadžba uvijek može pisati

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \quad (14.32)$$

gdje je v brzina prostiranja vala u z smjeru. Rješenje ove valne jednadžbe je $u(z, t) = u_0 \cos(\omega t - kz)$.

Ako proučavamo valove u tri dimenzije, općeniti pomak je funkcija četiri varijable $u(x, y, z, t) = u(\vec{r}, t)$, a valna jednadžba postaje

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u \quad . \quad (14.33)$$

²Potrebna je i izvor energije da nadoknadi toplinsku energiju koja se gubi u otporniku, ali i energiju koja je odvedena elektromagnetskim zračenjem..

Rješenje je $u(\vec{r}, t) = u_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, pri čemu je \vec{k} kutni valni vektor koji određuje smjer prostiranja vala.

Budući da u ovom poglavlju proučavamo elektromagnetske valove, pitamo se možemo li sličnu valnu jednadžbu izvesti iz Maxwellovih jednadžbi. Razmotrit ćemo Maxwellove jednadžbe u diferencijalnom obliku za slučaj praznog prostora u kojem nema naboja i struja (14.20). Pođemo li od Faradayevog zakona u diferencijalnom obliku i na njega djelujemo operatorom rotacije, dobivamo

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = -\nabla \times \frac{d\vec{B}}{dt} . \quad (14.34)$$

Uz pomoć relacije (14.31) i znajući da smijemo zamijeniti redosljed prostorne i vremenske derivacije, ova relacija postaje

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = -\frac{d}{dt}(\nabla \times \vec{B}) . \quad (14.35)$$

Prema Gaussovu zakonu u diferencijalnom obliku $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$ kad nema naboja pa prvi član u gornjoj jednadžbi iščezava. S desne strane možemo primijeniti četvrtu Maxwellovu jednadžbu pa dobivamo

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}}{dt^2} . \quad (14.36)$$

Ovo je valna jednadžba u kojoj je poopćeni "pomak" električno polje $\vec{\mathcal{E}}$, a brzina prostiranja vala $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Rješenje ove valne jednadžbe je

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) , \quad (14.37)$$

a vrijedi disperzijska relacija $\omega = c \cdot k$.

Na sličan način, djelujući operatorom rotacije na Ampereov zakon i uvrštavanjem Faradayevog zakona, dobivamo valnu jednadžbu za magnetsko polje:

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{B} , \quad (14.38)$$

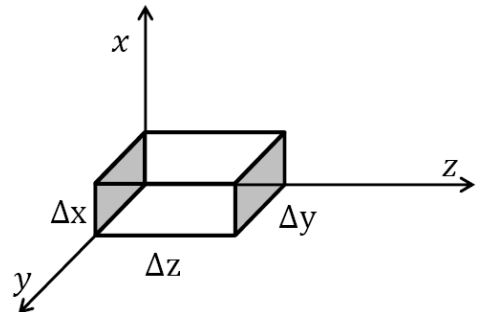
čije rješenje je

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) . \quad (14.39)$$

14.3.1 Elektromagnetski val je transverzalan

Pokažimo da električno i magnetsko polje u transverzalanom valu nemaju komponentu u smjeru prostiranja. Odaberimo koordinatni sustav tako da je smjer prostiranja z . Promatrajmo ravni val. U ravnom valu za neku vrijednost z u nekom trenutku t iznos električnog polja jednak je u bilo kojoj točki (x, y) ravnine okomite na z os u toj točki, tj. $\vec{\mathcal{E}}(z, t)$ ne ovisi o x ili y .³

Razapnimo Gaussovu plohu u obliku oplošja kvadra kao na slici. Budući da u prostoru nema slobodnih naboja, ukupni tok električnog (a i magnetskog) polja kroz tu plohu jednak je nuli. Nadalje, tok električnog polja kroz dvije plohe paralelne s $y - z$ ravninom se poništava jer $\vec{\mathcal{E}}(z, t)$ ne ovisi o x . Također, tok električnog polja kroz dvije plohe paralelne s $x - z$ ravninom se poništava jer $\vec{\mathcal{E}}(z, t)$ ne ovisi o y . Preostaje nam zaključiti da će se i tok kroz dvije plohe paralelne sa z osi (osjenčane na slici) također poništiti. To znači da za z komponentu električnog polja vrijedi $\mathcal{E}_z(z, t) = \mathcal{E}_z(z + \Delta z, t)$, tj. $\mathcal{E}_z(z) = \text{konst.}$ Budući da gledamo val koji sinusoidalno ovisi o z , ovo može biti zadovoljeno samo tako da je $\mathcal{E}_z(z) = 0$, tj. da je električno polje okomito na smer prostiranja. Isto vrijedi i za magnetsko polje.



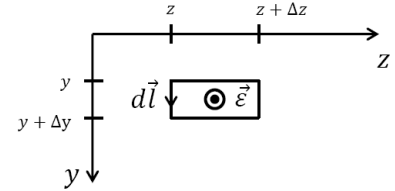
³Slično, magnetsko polje $\vec{B}(z, t)$ ne ovisi o x ili y .

14.3.2 Električno i magnetsko polje međusobno su okomita

Sada kad smo zaključili da je električno polje okomito na smjer prostiranja, možemo odabrati osi tako da je električno polje u x smjeru:

$$\vec{\mathcal{E}} = \hat{i} \mathcal{E}_x \quad . \quad (14.40)$$

U kom smjeru je \vec{B} ? Odaberimo zatvorenu pravokutnu putanju u $y-z$ ravnini kao na slici. Primijenimo Faradayev zakon (14.3) na tu pravokutnu petlju. Budući da je električno polje uvijek okomito na putanju, integral s lijeve strane jednak je nuli. Prema tome, tok magnetskog polja kroz plohu omeđenu pravokutnom putanjom mora biti jednak nuli. Vektor površine te plohe je u x smjeru, što znači da \vec{B} mora biti okomito na x , tj. električno i magnetsko polje međusobno su okomita.



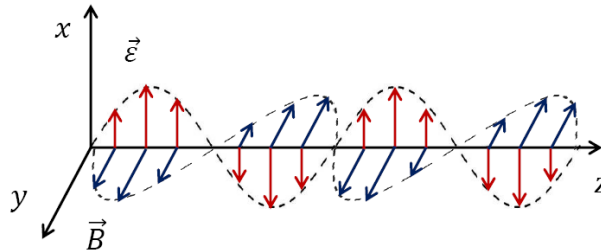
$$\vec{B} = \hat{j} B_y \quad . \quad (14.41)$$

Za ovaj jednodimenzionalan slučaj, valne jednačbe glase:

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_x}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{d^2 \mathcal{E}_x}{dz^2} \quad ; \quad \frac{d^2 B_y}{dt^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{d^2 B_y}{dz^2} \quad , \quad (14.42)$$

a rješenja su

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= \hat{i} \cdot \mathcal{E}_{x0} \cos(\omega t - kz) \\ \vec{B} &= \hat{j} \cdot B_{y0} \cos(\omega t - kz) \quad . \end{aligned} \quad (14.43)$$



14.4 Veza električne i magnetske komponente

Raspišemo li x komponentu Faradayevog zakona i y komponentu Amperovog zakona u diferencijalnom obliku (14.20), dobivamo jednačbe

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \quad . \quad (14.44)$$

Budući da je val transverzalan, z komponente polja iščezavaju pa vrijedi

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \quad . \quad (14.45)$$

Uvrstimo li u prvu od te dvije jednačbe rješenja (14.43), dobivamo

$$\mathcal{E}_{x0} = \frac{\omega}{k} B_{y0} = c \cdot B_{y0} \quad . \quad (14.46)$$

Vidimo da je električno polje u elektromagnetskom valu izraženo u mnogo većim jedinicama (jer vrijedi $c = 3 \cdot 10^8$ m/s), ali to je samo stvar odabira mjernih jedinica.

14.5 Energija i tlak elektromagnetskog vala

Još smo u prošlom semestru, u kolegiju Fizika 1, izveli izraze za gustoću energije električnog polja

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^2 \quad (14.47)$$

i za gustoću energije magnetskog polja

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (14.48)$$

U elektromagnetskom valu imamo istodobno i električno i magnetsko polje pa je gustoća energije dana s

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (14.49)$$

Zbog veze između električnog i magnetskog polja $\vec{\mathcal{E}}^2 = c^2 \cdot \vec{B}^2$, vidimo da su dva člana u gornjem izrazu jednaka, tj. u elektromagnetskom valu jednake iznose energije "nose" električno i magnetsko polje. Ukupnu gustoću energije možemo pisati:

$$\frac{dE}{dV} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^2 = \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \quad (14.50)$$

Za val koji putuje u smjeru z , možemo promotriti pločasti volumen debljine Δz i poprečnog presjeka $A = L_x \cdot L_y$. U nekom trenutku t energija vala sadržana u tom volumenu je

$$\Delta E = \frac{dE}{dV} \cdot A \Delta z = \frac{dE}{dV} \cdot A c \Delta t \quad (14.51)$$

Budući da val putuje brzinom c , sva ta energija će napustiti promatrani volumen i napuniti susjedni volumen u vremenu $\Delta t = \Delta z/c$. Tok energije po jedinici površine u jedinici vremena je:

$$S = \frac{1}{A} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dV} \cdot c \quad (14.52)$$

Uz pomoć relacija (14.50), ovu veličinu možemo pisati na tri načina:

$$S = c \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^2 = \frac{c \vec{B}^2}{\mu_0} = \frac{|\vec{\mathcal{E}}| \cdot |\vec{B}|}{\mu_0} \quad (14.53)$$

Poyntingov vektor

Veličina S predstavlja nam iznos toka energije. Možemo konstruirati vektor koji će po iznosu biti jednak S , a da mu se smjer podudara sa smjerom prostiranja vala:

$$\vec{S} = S \cdot \hat{k} \quad (14.54)$$

Budući da je smjer prostiranja vala određen vektorskim produktom električnog i magnetskog polja, vektor \vec{S} , koji nazivamo *Poyntingovim vektorom*, možemo pisati:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{B} \quad (14.55)$$

Dakle, definirali smo veličinu koja nam istodobno kaže iznos i smjer toka energije.

Intenzitet elektromagnetskog zračenja je prosječni tok energije po jedinici površine:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \frac{|\vec{\mathcal{E}}_{\max}| \cdot |\vec{B}_{\max}|}{2\mu_0} \quad (14.56)$$

Tlak zračenja

Pokazali smo da elektromagnetski val prenosi energiju. Može se pokazati da elektromagnetski val prenosi i količinu gibanja. Brzina protoka količine gibanja kroz jediničnu površinu je

$$\frac{1}{A} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{S}}{c} = \frac{\vec{\mathcal{E}} \times \vec{B}}{\mu_0 c} . \quad (14.57)$$

Kada ovo zračenje udara u neku površinu, ukupna količina gibanja je sačuvana. Ako površina potpuno apsorbira zračenje, govorimo o potpuno neelastičnom sudaru, a ako površina reflektira zračenje govorimo o elastičnom sudaru. U neelastičnom sudaru količina gibanja prenosi se na ozračenu površinu. Prosječni prijenos količine gibanja u jedinici vremena predstavlja prosječnu silu kojom zračenje djeluje na površinu, a ako se ta sila podijeli s površinom, dobivamo tlak zračenja:

$$p_{\text{rad}} = \frac{\langle |\vec{S}| \rangle}{c} = \frac{I}{c} \quad (14.58)$$

u slučaju potpune apsorpcije.

U slučaju potpune refleksije, promjena količine gibanja je dvostruko veća pa je tlak zračenja

$$p_{\text{rad}} = \frac{2 \langle |\vec{S}| \rangle}{c} = \frac{2I}{c} . \quad (14.59)$$

Danas znamo da se elektromagnetsko zračenje u kvantnoj fizici opisuje protokom čestica svjetlosti – *fotona*. Svaki foton predstavlja kvant svjetlosti čija energija iznosi $E = h\nu$, a količina gibanja je $p = E/c = h\nu/c$. Imajući to u vidu, razmatranje tlaka nam izgleda prirodnije, jer su sudari fotona s nekom površinom slični sudarima čestica u idealnom plinu s površinom pa i tlak možemo povezati s tlakom idealnog plina.

14.6 Elektromagnetski valovi u sredstvu

Dosad smo razmatrali elektromagnetske valove u vakuumu. Međutim, oni mogu putovati i kroz tvari, kao što su zrak, voda ili staklo. Ograničit ćemo se na prostiranje elektromagnetskih valova kroz nevodljive medije – dielektrike.

U dielektriku je brzina prostiranja elektromagnetskog vala v manja nego u vakuumu ($v < c$). U dielektriku, kada nema slobodnih naboja i struja, Ampereov zakon postaje

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{d\vec{\mathcal{E}}}{dt} , \quad (14.60)$$

gdje je ϵ_r relativna permitivnost dielektrika, a μ_r relativna permeabilnost sredstva. Uz ovu modifikaciju, valne jednačbe glase

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}}{dt^2} . \quad (14.61)$$

Ovo je valna jednačba u kojoj je poopćeni ”pomak” električno polje $\vec{\mathcal{E}}$, a brzina prostiranja vala $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Rješenje ove valne jednačbe je

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) , \quad (14.62)$$

a vrijedi disperzijska relacija $\omega = c \cdot k$.

Na sličan način, djelujući operatorom rotacije na Ampereov zakon i uvrštavanjem Faradayevog zakona, dobivamo valnu jednačbu za magnetsko polje:

$$\frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}}{dt^2} = v^2 \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} ; \quad \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = v^2 \nabla^2 \vec{B} , \quad (14.63)$$

pri čemu je

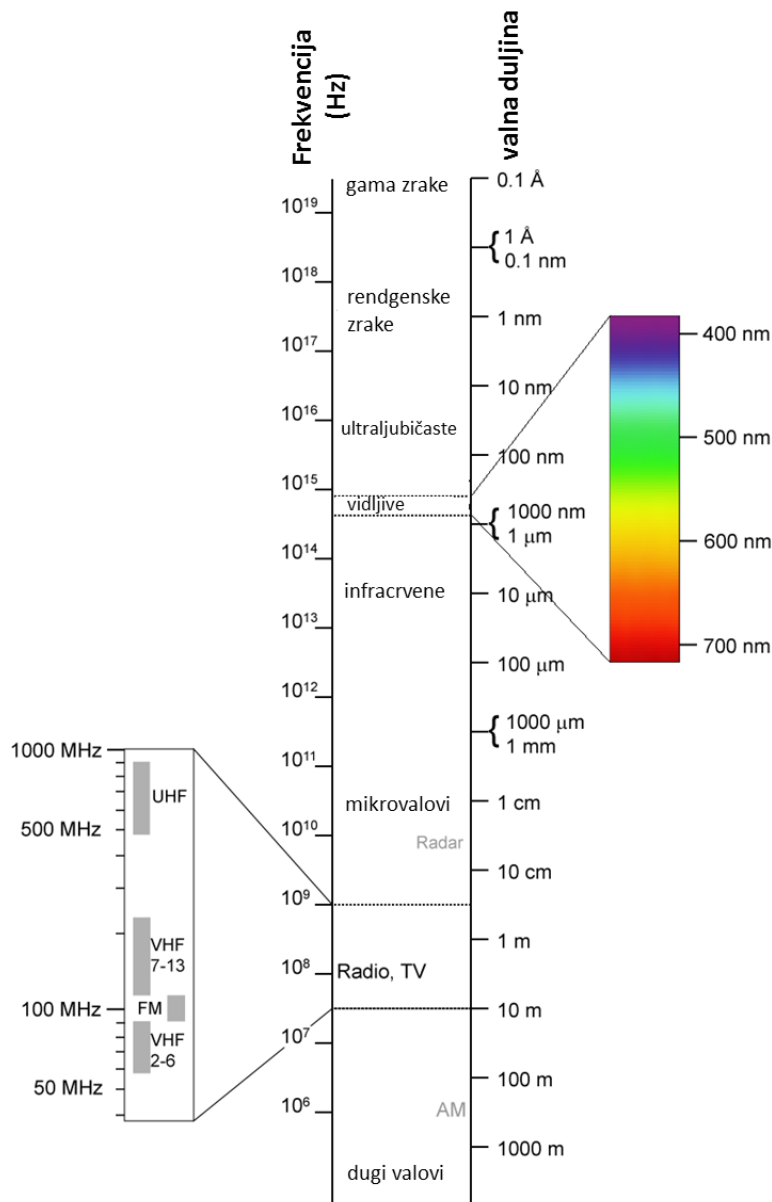
$$v = \frac{c}{n} \quad (14.64)$$

Veličina $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ zove se *indeks loma* svjetlosti za dani materijal. Budući da je u prozirnim materijalima magnetska permeabilnost najčešće $\mu_r \approx 1$, možemo reći da je indeks loma dan relacijom $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$.

Ovdje treba biti oprezan. Relativna permitivnost nekog sredstva ovisi o frekvenciji elektromagnetskog vala pa se za određivanje indeksa loma ne smiju uzeti vrijednosti permitivnosti izmjerene u statičkom slučaju. Izraziti primjer za to je voda. Statička dielektrična permitivnost vode je 80, a na optičkim frekvencijama je $\epsilon_r = 1.78$. Stoga je indeks loma vode za svjetlost $n = 1.33$.

14.7 Spektar elektromagnetskih valova

Valna duljina i frekvencija elektromagnetskih valova povezani su relacijom $c = \lambda \cdot \nu$. Sve frekvencije ili valne duljine koje zadovoljavaju tu relaciju su dopuštene. Slika prikazuje raspon frekvencija i valnih duljina koje su nam najznačajnije.



Poglavlje 15

Geometrijska optika

Prostiranje svjetlosti opisano je Maxwellovim jednažbama. Njihovo rješavanje, međutim, često može biti jako komplicirano, a ponekad i nepotrebno. Često nam je dovoljna informacija koji možemo dobiti metodama geometrijske optike koje su razvijene mnogo prije no što se je znalo da je svjetlost u stvari elektromagnetski val. Geometrijska optika dobro opisuje rezultate Maxwellovih jednažbi kad su valne duljine svjetlosti mnogo manje od objekata koje promatramo. Za opisivanje prostiranja valova koristit ćemo dva koncepta koja smo već spomenuli prilikom razmatranja valova na vodi i zvučnih valova: valne fronte i valne zrake. Valne zrake okomite su na valne fronte. Dobar primjer svjetlosne (valne) zrake je put laserskog snopa svjetlosti.

Kada laserska zraka udari u površinu koja razdvaja dva materijala, mogu se dogoditi različiti događaji. Zraka može biti apsorbirana (npr. ako pogodi crni papir). Ako zraka pogodi površinu koja je hrapava na skali usporedivoj s valnom duljinom ili većoj, reflektirat će se u svim smjerovima dajući *difuzno svjetlo* (npr. ako pogodi bijeli papir). Ako zraka pogodi glatku metalnu površinu, reflektirat će se u jednom smjeru – to nazivamo zrcalnom refleksijom. I konačno, ako zraka pogodi površinu stakla, ona će se i reflektirati i transmitirati (lomiti) u staklo. Mi ćemo proučavati zrcalnu refleksiju i lom svjetlosti.

15.1 Zakoni geometrijske optike

Prvi zakon geometrijske optike

Svjetlost se širi pravocrtno.

Ovo je aproksimacija koja vrijedi kada svjetlost prolazi kroz otvor mnogo veći od valne duljine svjetlosti.

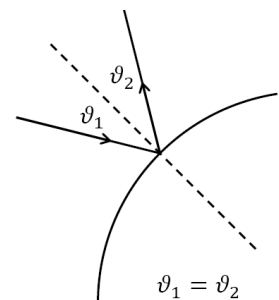
Drugi zakon geometrijske optike

Svjetlost se reflektira uvijek kad dolazi do promjene indeksa loma.

Refleksija može biti djelomična ili potpuna. Ako upadna zraka s okomicom (normalom) na površinu zatvara kut ϑ_1 , onda reflektirana zraka s okomicom zatvara kut ϑ_2 , pri čemu vrijedi

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 .$$

Refleksija je pod istim kutom pod kojim je zraka upala na ravninu refleksije. Osim toga, upadna i reflektirana zraka leže u istoj ravnini.

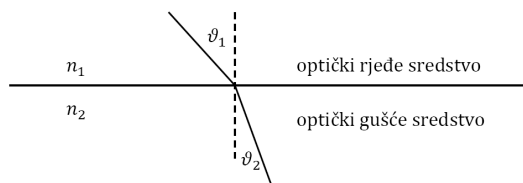


Treći zakon geometrijske optike

Smjer prostiranja transmitirane svjetlosti na granici dvaju sredstava određen je Snellovim zakonom loma:

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2 \quad (15.1)$$

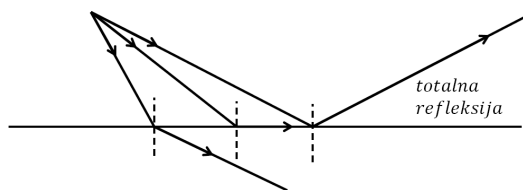
Upadna i lomljena zraka leže u istoj ravnini. Ako zraka dolazi iz optički rjeđeg sredstva u optički gušće sredstvo, lomljena zraka čini manji kut s okomicom na granicu sredstva.



Ako upadna zraka dolazi iz optički gušćeg u optički rjeđe sredstvo, kut loma je veći. Ako je kut upada takav da prema Snellovom zakonu $\sin \vartheta_2 = 1$, onda će lomljena zraka putovati tik uz površinu. Takav upadni kut nazivamo *kritičnim kutom* i vrijedi

$$\sin \vartheta_{\text{krit}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (15.2)$$

Za upadne kuteve veće od ϑ_{krit} svjetlost se ne može transmitirati, već se u potpunosti reflektira. Tu pojavu nazivamo *totalna refleksija*.



15.2 Predmet i slika u geometrijskoj optici

Predmet u geometrijskoj optici je izvor iz kojeg se širi divergentan snop svjetlosti. **Izvor** može biti primarni (npr. svijeća ili žarulja) ili sekundarni. Sekundarni izvor je osvijetljeni predmet čija površina je hrapava na skali valne duljine tako da se od njega svjetlo difuzno odbija u svim smjerovima.

Instrumenti geometrijske optike su glatki predmeti kao što su zrcala ili leće. Oni nam služe za stvaranje slika, ali ih ne smatramo predmetima u gornjem značenju jer se iz njih svjetlost ne širi u svim smjerovima.

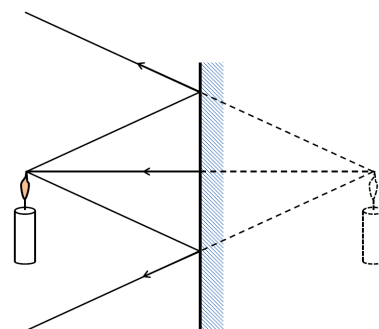
Slika u geometrijskoj optici je mjesto na kojemu se križaju svjetlosne zrake koje su izašle iz predmeta i nakon što smo im promijenili smjer pomoću optičkih instrumenata. Slika može biti realna ili virtualna.

Realna slika je ona koja nastaje na mjestu gdje se zrake uistinu križaju. Pogledamo li prema mjestu na kojem se realna slika nalazi iz smjera prema kojemu zrake putuju, vidjet ćemo predmet promijenjenih dimenzija ili orijentacije. Realnu sliku možemo vidjeti i iz drugih smjerova ako na mjesto slike stavimo zastor koji će reflektirati difuzno svjetlo. *Virtualna slika* je ona na čijem mjestu se zrake ne križaju, ali ako prema tom mjestu gledamo kroz neki optički instrument, vidjet ćemo predmet. U stvari, možemo reći da se produžeci zraka iza instrumenta križaju na mjestu virtualne slike.

15.3 Ravno zrcalo

Svaka zraka koja izađe iz predmeta odbija se od ravnog zrcala pod istim kutem pod kojim je upala na njega. Produžeci svih reflektiranih zraka sijeku se u jednoj točki iza zrcala. Promatraču ispred zrcala izgleda kao da su sve zrake došle iz točke iza zrcala koja je na jednakoj udaljenosti od zrcala kao i predmet.

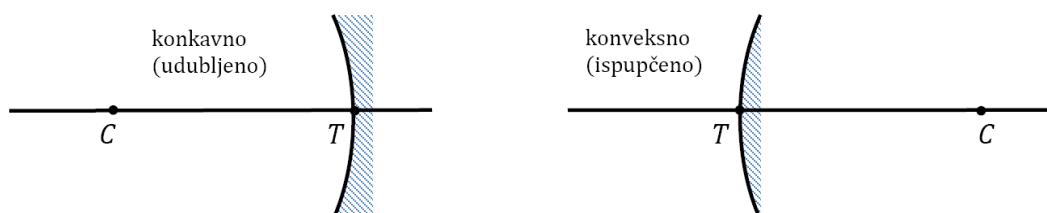
Ravno zrcalo daje *virtualnu sliku* predmeta koja je iste veličine i iste udaljenosti od zrcala kao i sam predmet.



15.4 Sferno zrcalo

Za razliku od ravnog zrcala, u sfernom zrcalu je reflektirajuća ploha (maleni) dio sfere. Sferno zrcalo može biti konkavno (udubljeno) ili konveksno (ispupčeno). Sferno zrcalo predstavlja maleni isječak sfere, najčešće omeđen kružnicom.

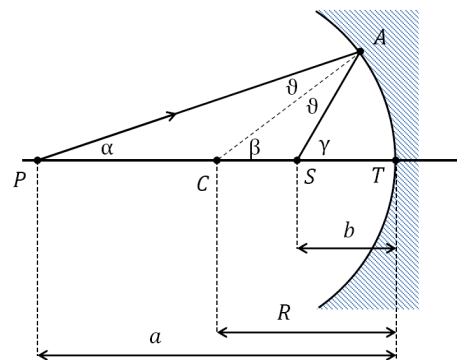
Središnja točka zrcala (najispupčenija, odnosno najudubljenija) naziva se *tjemena* T . Središte zakriv-



ljenosti sfernog zrcala označimo sa C . Udaljenost središta zakrivljenosti C od tjemena T je radijus zakrivljenosti zrcala R . Pravac određen točkama C i T nazivamo *optička os*. Središte zakrivljenosti za konveksno zrcalo nalazi se na optičkoj osi iza zrcala. Dogovorno kažemo da konveksno zrcalo ima negativan radijus zakrivljenosti $R < 0$.

15.4.1 Konkavno zrcalo

Razmotrimo odnos položaja slike i predmeta za konkavno zrcalo. Postavimo predmet na optičku os u točku P , udaljenu a od tjemena. Iz predmeta zrake izlaze u svim smjerovima. Odaberimo jednu proizvoljnu zraku koja izlazi iz predmeta. Neka ta zraka izlazi pod kutem α u odnosu na optičku os i neka dolazi do točke A na površini zrcala. Okomica na zrcalo prolazi kroz točku C i zatvara kut β s optičkom osi. Naša upadna zraka s tom okomicom zatvara kut ϑ . Zraka se reflektira pod istim kutem ϑ u odnosu na okomicu te siječe optičku os u točki S , zatvarajući s njome kut γ . Točka S udaljena je za b od tjemena. Razmatranjem trokuta $\triangle PCA$ zaključujemo da vrijedi $\beta = \alpha + \gamma$, a razmatrajući trokut $\triangle PSA$ imamo $\gamma = \alpha + 2\vartheta$. Kombinacijom tih relacija dobivamo $\alpha + \gamma = 2\beta$.



Kut β izražen u radijanima dan je omjerom duljine luka \widehat{AT} i radijusa R :

$$\beta = \frac{\widehat{AT}}{R} . \quad (15.3)$$

Budući da je sferno zrcalo maleni dio sfere, kotevi α i γ su maleni pa i za njih približno vrijedi

$$\alpha \approx \frac{\widehat{AT}}{a} ; \quad \gamma \approx \frac{\widehat{AT}}{b} \quad (15.4)$$

pa možemo napisati vezu između veličina a , b i R :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} . \quad (15.5)$$

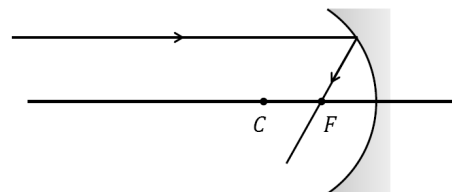
Vidimo da položaj točke S ne ovisi o odabiru točke A (tako dugo dok su kotevi mali). Sve reflektirane zrake sijeku se u točki S i dalje divergentno šire. Prema tome, točka S je slika točke P . To je realna slika.

15.4.2 Jednadžba sfernog zrcala

Žarišna daljina

Iz jednadžbe (15.5) vidimo da ako je predmet jako daleko ($a \rightarrow \infty$), sve zrake se sijeku na jednom mjestu F koje je od tjemena udaljeno

$$f = \frac{R}{2} .$$



Točku F zovemo *žarište* ili *fokus*, a njezinu udaljenost od tjemena f nazivamo *žarišna daljina*. Sve zrake svjetlosti koje na zrcalo dolaze paralelno s optičkom osi sijeku se u žarištu F .

Uz ovu definiciju žarišne daljine, vezu između udaljenosti a i b možemo pisati u obliku koji zovemo *jednadžba sfernog zrcala*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} . \quad (15.6)$$

Dogovor o predznacima

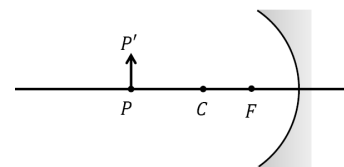
Jednadžba sfernog zrcala vrijedi jednako dobro za konkavno i za konveksno zrcalo ako se vodi računa o predznacima.

1. Za konkavno zrcalo je $R > 0$, a za konveksno zrcalo trebamo staviti $R < 0$. Isto vrijedi i za žarišne daljine. Za konkavno zrcalo je $f > 0$, a za konveksno je $f < 0$.
2. Ako je predmet s one strane zrcala s koje upadaju zrake, onda je njegova udaljenost od tjemena pozitivna: $a > 0$.
3. Ako rješavanjem jednadžbe zrcala dobijemo da je $b > 0$, to znači da je slika predmeta na onoj strani zrcala na koju se zrake reflektiraju. Slika je realna. U protivnom slučaju $b < 0$ slika je virtualna i nalazi se iza zrcala.

15.4.3 Konstrukcija slike

Stvarni predmeti nisu točke, nego imaju svoju visinu – u stvari, predmet se sastoji od mnoštva točkastih izvora. Svaki točkasti izvor ima svoju sliku. Slika predmeta je skup svih točkastih slika. Da bismo konstruirali sliku predmeta, odaberemo dvije točke koje će reprezentirati taj predmet. Jednu točku na optičkoj osi označimo s P , a drugu, iznad optičke osi, označimo s P' .

Za konstrukciju slike upotrebljavamo karakteristične zrake.



Karakteristične zrake

1. Svaka zraka koja prolazi kroz središte zakrivljenosti zrcala C vraća se istim putem natrag.
2. Svaka zraka koja upada na tjeme T vraća se pod istim kutom u odnosu na optičku os.
3. Svaka zraka koja upada paralelno optičkoj osi reflektira se kroz žarište i obratno, svaka zraka koja upada kroz žarište reflektira se paralelno optičkoj osi.

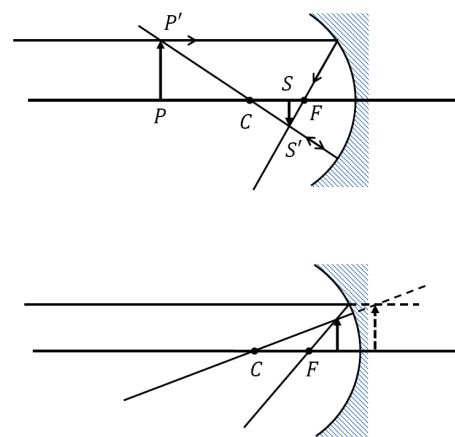
Konstrukcija

Da bismo konstruirali sliku dovoljne su nam dvije karakteristične zrake koje prolaze kroz točku P' . Možemo odabrati bilo koje dvije od gore navedenih četiri. Na mjestu gdje se križaju te dvije zrake nakon refleksije nalazi se slika S' .

U prvom prikazanom primjeru predmet je na udaljenosti od tjemena koja je veća od R . U tom slučaju slika predmeta nalazi se između žarišta i središta zakrivljenosti, realna je, umanjena i obrnuta.

U drugom prikazanom primjeru predmet je između žarišta i tjemena. Slika je iza zrcala, uvećana, virtualna i uspravna.

Napomena: Da bi se stvorila slika na nekom mjestu, nije nužno da karakteristične zrake postoje. Ako prekrijemo dio zrcala tako da spriječimo refleksiju nekih karakterističnih zraka, i dalje će se sve preostale zrake sijeći u jednoj točki i time stvoriti sliku. Jedino što ćemo postići bit će smanjeni intenzitet svjetlosti koja izlazi iz slike.



15.4.4 Koeficijent povećanja

Veličina slike se općenito razlikuje od veličine predmeta pa je korisno uvesti koeficijent povećanja

$$\gamma = -\frac{b}{a} . \quad (15.7)$$

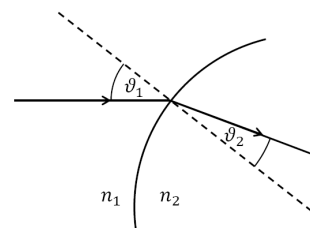
Ovdje smo omogućili da veličina γ bude pozitivna ili negativna. Iznos veličine γ nam daje omjer veličina slike i predmeta, a predznak nam kaže njihovu relativnu orijentaciju. Ako je $\gamma < 0$, slika je obrnuto orijentirana od predmeta.

15.5 Lom svjetlosti

Sada ćemo razmatrati dva optička sredstva indeksa loma n_1 i n_2 . Na granici sredstava vrijedi Snellov zakon loma svjetlosti

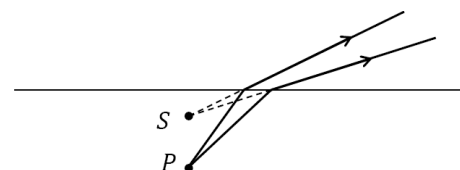
$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2 \quad . \quad (15.8)$$

Ako je granica zakrivljena, uvijek treba gledati okomicu na površinu na mjestu na kojem zraka upada i od te okomice računati upadni i izlazni kut.



15.5.1 Predmet u vodi

Gledamo li iz zraka predmete u vodi, oni nam uvijek izgledaju veći no što stvarno jesu. Indeks loma vode je $n_1 = 1.33$, a zraka $n_2 \approx 1$. Zrake svjetlosti koje izlaze iz točkastog predmeta P u vodi lome se na granici vode i zraka od okomice i dalje putuju divergentno kao da su izašle iz točke S . Točka S je virtualna slika predmeta P . Ona je bliže promatraču pa stoga predmet izgleda veći.



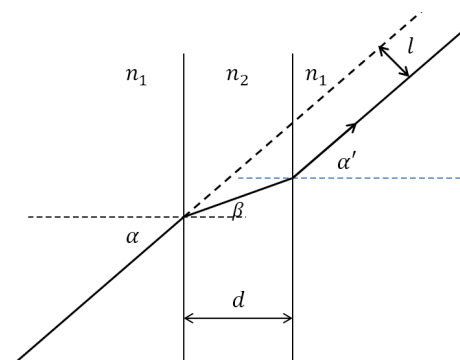
Ovo možete sami provjeriti pokusom kod kuće. Stavite na dno prazne šalice novčić i gledajte u šalicu iskosa tako da ne vidite novčić na dnu. Ne mičući glavu nalijte vodu u šalicu. Vidjet ćete da se slika novčića pojavila.

15.5.2 Planparalelna ploča

Promatramo kako svjetlost prolazi kroz ploču debljine d , indeksa loma većeg od okoline ($n_2 > n_1$). Plohe ploče međusobno su paralelne pa svaka zraka koja upada na jednu plohu, izlazi iz druge plohe u istom smjeru ($\alpha = \alpha'$), bez obzira na indeks loma. Pravac na kojem leži izlazna zraka malo je pomaknut u odnosu na pravac na kojem leži upadna zraka. Taj pomak je

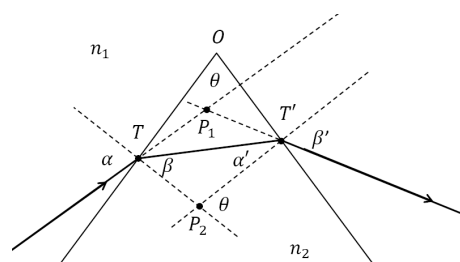
$$l = d \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \quad , \quad (15.9)$$

gdje je d debljina ploče. Budući da su prozorska stakla tanka, ovaj pomak obično ne primjećujemo.



15.5.3 Prizma

Za razliku od planparalelne ploče, svjetlost koja prolazi kroz prizmu na izlazu ide u drugom smjeru od ulaznog. Kut otklona označimo s δ . Kut između ploha prizme zovemo "kut prizme" θ . Neka zraka ulazi u prizmu u točki T pod kutom α u odnosu na normalu. Tada se lomi pod kutom β u odnosu na normalu kroz točku T i zatim prolazi kroz prizmu do točke T' . U točki T' ulazi pod kutom α' u odnosu na normalu i izlazi pod kutom β' u odnosu na tu normalu. Točku u kojoj se sijeku produžeci ulazne i izlazne zrake označimo s P_1 . Točku u kojoj se sijeku normale kroz T i T' označimo s P_2 . Razmatranjem trokuta $\Delta P_1TT'$ dobivamo relaciju $\theta = \alpha' + \beta$. Razmatranje trokuta $\Delta P_2TT'$ nam daje $\delta = (\alpha - \beta) + (\beta' - \alpha')$. Kombiniranjem ovih dviju relacija dobivamo $\delta = \alpha + \beta' - \theta$.



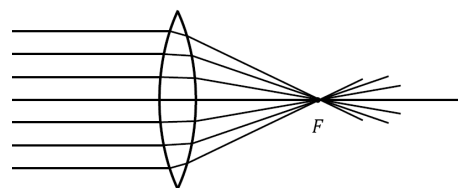
Kut otklona ovisi o više različitih varijabli – kutu upada, kutu prizme i omjeru indeksa lomova: $\delta = f(\alpha, \theta, n_2/n_1)$. Budući da indeks loma nije jednak za sve boje, nego je on funkcija valne duljine $n = n(\lambda)$, različite boje svjetlosti lome se pod različitim kutovima otklona. Ovo svojstvo prizme koristi se za spektralnu analizu svjetlosti.

15.5.4 Leće

Leća je objekt od prozirnog materijala koji ima dvije sferne površine sa zajedničkom optičkom osi. Ako je indeks loma materijala leće (npr. stakla) veći od indeksa loma okolne tvari (npr. zraka), zraka svjetlosti koja nailazi na leću dvaput će se lomiti i mijenjati smjer. Leća koja uzrokuje da se paralelni snop svjetlosti skupi u jednu točku naziva se *konvergentna leća*. Leća koja rasipa paralelni snop svjetlosti naziva se *divergentna leća*.

Leću možemo promatrati kao skup prizama. Svaki dio leće se ponaša kao prizma, ali se kut prizme θ mijenja s udaljenošću od optičke osi – najveći je na rubu. Zato je i kut otklona δ veći za zrake na rubu nego za one u sredini pa se onda sve skupe u jednoj točki (realno ili virtualno).

Mi ćemo razmatrati *tanke leće*, tj. leće čiji najdeblji dio je mnogo manji od udaljenosti predmeta i slike od leće, kao i od radijusa zakrivljenosti sfernih ploha.



Jednadžba leće

Može se pokazati da za tanku leću vrijedi ova jednadžba:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad , \quad (15.10)$$

pri čemu je a udaljenost predmeta od leće, b je udaljenost slike od leće, a f je žarišna daljina leće.

Dogovor o predznacima

Jednadžba leće vrijedi jednako dobro za konvergentne i za divergentne leće ako se vodi računa o predznacima.

1. Za konvergentnu leću je $f > 0$, a za divergentnu leću je $f < 0$.
2. Ako je predmet s one strane leće s koje upadaju zrake, onda je njegova udaljenost od središta leće pozitivna: $a > 0$.
3. Ako je slika s one strane leće na koju izlaze zrake svjetlosti, onda je $b > 0$. Slika je realna. U protivnom slučaju $b < 0$ slika je virtualna i nalazi se sa strane leće s koje dolaze zrake svjetlosti.

Povećanje

Kao i kod zrcala, uvodimo koeficijent povećanja

$$\gamma = -\frac{b}{a} \quad . \quad (15.11)$$

Iznos veličine γ nam daje omjer veličina slike i predmeta, a predznak nam kaže njihovu relativnu orijentaciju. Ako je $\gamma < 0$, slika je obrnuto orijentirana od predmeta.

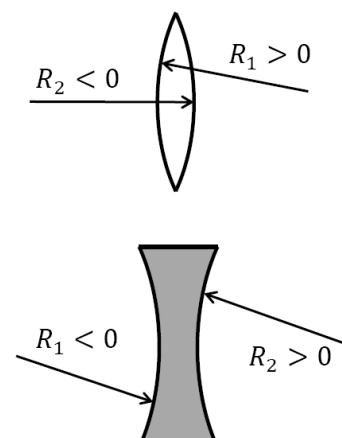
Valja napomenuti da leće koje imaju jako velika povećanja uzrokuju *kromatsku aberaciju*. Bijela svjetlost razlaže se na boje (efekt prizme). Ova pojava ne postoji kod zrcala pa se zato teleskopi za velika povećanja koriste (paraboličnim) zrcalima.

Izračun žarišne daljine

Prilikom izrade leće, u slučaju da je vanjsko sredstvo indeksa loma 1 (npr. zrak, žarišnu daljinu tanke leće možemo odrediti prema formuli

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) . \quad (15.12)$$

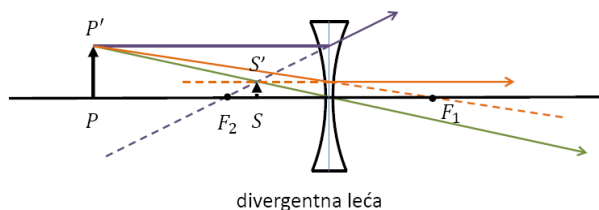
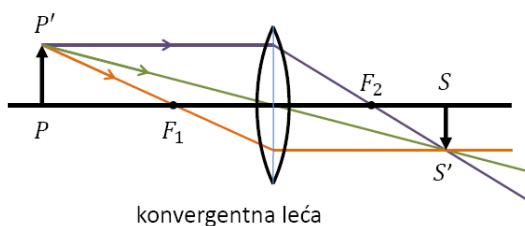
Ovdje je n indeks loma materijala od kojeg je načinjena leća, R_1 je radijus zakrivljenosti upadne plohe leće, a R_2 je radijus zakrivljenosti izlazne plohe leće. Oba radijusa su pozitivna ako je središte zakrivljenosti s izlazne strane leće, a negativni su ako je središte zakrivljenosti s ulazne strane leće.



Konstrukcija slike

Za konstrukciju slike upotrebljavamo *karakteristične zrake*.

1. Svaka zraka koja upada paralelno optičkoj osi lomi se kroz žarište.
2. Svaka zraka koja dolazi u središte tanke leće prolazi kroz nju bez loma.
3. Svaka zraka koja upada kroz žarište lomi se paralelno optičkoj osi.



15.6 Optički instrumenti

Povećalo

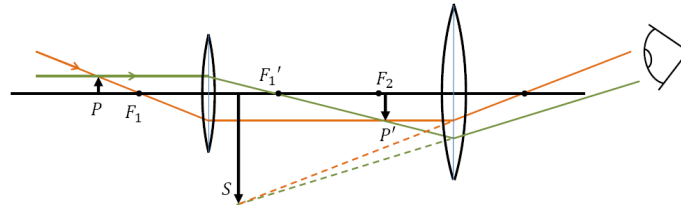
Ljudsko oko sposobno je jasno vidjeti predmet koji su udaljeni više od "bliske točke". Udaljenost bliske točke varira sa starošću čovjeka, ali se u prosjeku uzima da iznosi 25 cm. Naziva se još i "udaljenost jasnog vida". Veličina slike u oku ovisi o kutu koji zauzima u vidnom polju oka. Taj kut možemo povećati tako da se približimo predmetu, ali ako se približimo bliže od bliske točke, slika neće biti oštra. Oštrinu možemo popraviti tako da predmet gledamo kroz konvergentnu leću postavljenu tako da se predmet nalazi između žarišta i leće, što bliže žarištu. Na taj način slika predmeta zatvara isti kut u vidnom polju, ali je veća i udaljenija pa oko može izoštriti sliku.

Sustav dvije leće

Mnogi optički instrumenti sastoje se od dvije leće koje se nalaze na istoj optičkoj osi. Prva leća, koja se naziva *objektiv* stvara sliku predmeta, a ta slika služi kao predmet za drugu leću, koju nazivamo *okular*. Okular je postavljen tako da je slika koju stvara objektiv blizu žarišta okulara i tako stvara gotovo paralelan snop zraka koje ulaze u oko i stvaraju oštru sliku u oku.

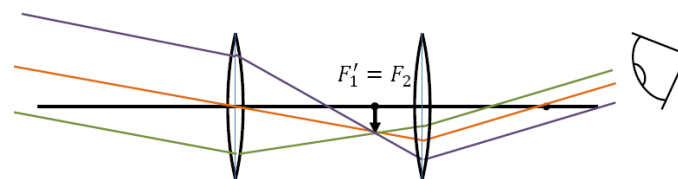
Mikroskop

Mikroskop je optički sustav sastavljen od dvije konvergentne leće, objektivu žarišne daljine nekoliko milimetara i okulara. Predmet smještamo tik do žarišta objektivu s "vanjske" strane pa on daje realnu sliku. Ta realna slika predstavlja predmet za okular i namješta se tik do žarišta okulara s "unutarnje" strane. Konačna slika je virtualna i na udaljenosti približno jednakoj udaljenosti jasnog vida.

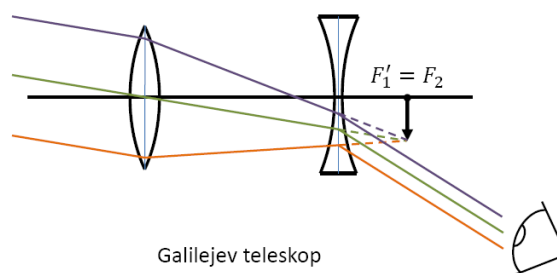


Teleskop

Teleskop je namijenjen proučavanju udaljenih predmeta. Stoga je slika koju stvara objektiv točno u žarištu objektivu. Prema vrsti okulara razlikujemo Keplerov i Galilejev teleskop. U Keplerovom teleskopu okular je konvergentna leća i postavlja se tako da se žarište okulara i objektivu poklapaju, i nalaze između tih dviju leća. U Galilejevu teleskopu okular je divergentna leća. I ovdje se žarišta objektivu i okularu poklapaju, ali se okular nalazi ispred zajedničkog žarišta.



Keplerov teleskop



Galilejev teleskop

Poglavlje 16

Fizikalna optika

U prošlom poglavlju bavili smo se geometrijskom optikom – granom fizike koja je razvijena mnogo prije no što je bilo poznato da je svjetlost u stvari elektromagnetski val. Zakoni geometrijske optike predstavljaju aproksimativna pravila koja dobro vrijede ako su dimenzije optičkih instrumenata mnogo veće od valne duljine svjetlosti.

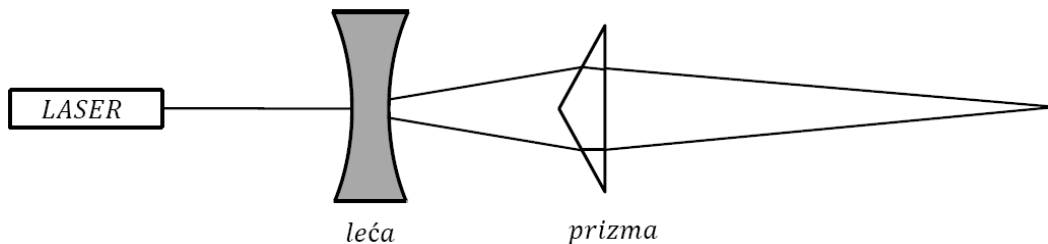
U ovom poglavlju bavit ćemo se fizikalnom optikom – granom optike koja uzima u obzir valna svojstva svjetlosti.

16.1 Interferencija elektromagnetskih valova

Da bismo lakše proučavali valne pojave trebat će nam *monokromatski* izvor svjetlosti – izvor koji daje svjetlost samo jedne valne duljine. U prošlosti su znanstvenici takav izvor postizali tako da su na izlazu iz izvora bijele svjetlosti postavljali jednobojni filtar (npr. crveni celofan). Takvi izvori su danas zamijenjeni laserima – izvorima svjetlosti koji monokromatsku svjetlost daju stimuliranom emisijom iz atoma jedne vrste.

Za uočavanje valnih pojava poput interferencije, potrebno je da dva ili više izvora budu koherentni. *Koherentni izvori* su monokromatski izvori iste valne duljine. Važno je da je fazna razlika svjetlosti koja izlazi iz tih izvora konstantna.

Koherentne izvore svjetlosti najčešće dobivamo tako da svjetlost iz jednog izvora podijelimo uz pomoć optičkih instrumenata, a zatim ih opet dovedemo na isto mjesto. Dok su zrake razdvojene, svjetlost može prelaziti različite optičke puteve u svakoj grani.



Razlika optičkih puteva dana je s

$$\Delta = n \cdot \Delta x \quad , \quad (16.1)$$

pri čemu je n indeks loma sredstva kroz kojeg prolazi zraka, a Δx je geometrijska razlika puteva dviju zraka. Kad se dvije zrake nađu na istome mjestu, razlika njihovih faza je

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \cdot \Delta x \quad . \quad (16.2)$$

Zamislimo da imamo dva koherentna izvora jednakog intenziteta. Promatramo svjetlost na dovoljno dalekoj udaljenosti da možemo govoriti o ravnom valu. Neka se zrake iz tih izvora na

nekom mjestu križaju. Vrijednosti električnih polja od ta dva vala u nekom trenutku na tom mjestu su:¹

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = \vec{\mathcal{E}}_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{i} \quad \vec{\mathcal{E}}_2 = \vec{\mathcal{E}}_0 \sin \omega t \quad . \quad (16.3)$$

Superpozicija ta dva vala na danom mjestu je

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{uk}} = \vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2 = 2\vec{\mathcal{E}}_0 \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \quad . \quad (16.4)$$

Dva su posebna slučaja razlike faza. Ako se faza razlikuje za paran višekratnik od π ($\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$), onda je ukupno polje dano s

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{uk}} = \pm 2\vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \quad . \quad (16.5)$$

Tada govorimo o *konstruktivnoj interferenciji*. Ako se faza razlikuje za neparan višekratnik od π ($\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$), onda je ukupno polje dano s

$$\vec{\mathcal{E}}_{\text{uk}} = 0 \quad (16.6)$$

i govorimo o *destruktivnoj interferenciji*.

Intenziteti pojedinačnih valova su

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_0^2 \quad . \quad (16.7)$$

Ukupni intenzitet na mjestu konstruktivne interferencije je $I_{\text{uk}} = 4I_1$, a na mjestu destruktivne interferencije je $I_{\text{uk}} = 0$.

16.2 Huygensov princip

Christiaan Huygens je 1678. godine razvio teoriju valova. Njegov glavni doprinos je tzv. Huygensov princip:

Svaku točku na valnoj fronti možemo promatrati kao izvor novih valova.

Dva primjera kako primjenjujemo taj princip prikazana su na donjim slikama. Ako imamo ravni val koji se prostire bez prepreke, svaka točka na valnoj fronti ponaša se kao izvor novih valnih fronti. Njihov zbroj opet daje ravnu valnu frontu (slika lijevo). Ako ravni val naiđe na prepreku s malim otvorom, iza prepreke će se val širiti kao da je taj otvor novi izvor. Svaka točka unutar otvora ponaša se kao novi izvor vala (slika desno).



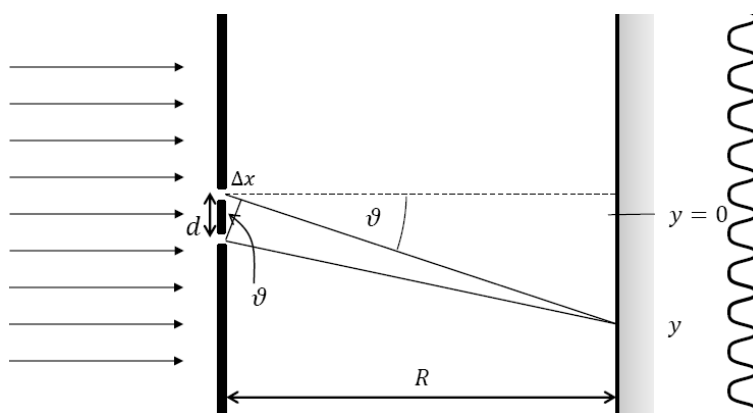
¹Ovdje izostavljamo prostornu komponentu $\vec{k} \cdot \vec{r}$.

16.3 Youngov pokus

Engleski fizičar Thomas Young je 1801. pokazao da je svjetlost valna pojava. Do tada je prevladavalo uvjerenje da je svjetlost čestične prirode, kako je to predložio Isaac Newton. Najpoznatiji Youngov pokus je pokus s dvije pukotine. Neka ravni val dolazi na prepreku u kojoj su urezane dvije uske ravne pukotine međusobno udaljene za d . Te dvije pukotine ponašaju se, prema Huygensovom principu, kao nova dva izvora svjetlosti koja su koherentna. Radi promatranja postavimo zastor na udaljenost $R \gg d$ od pukotina. Odaberimo na zastoru koordinatni sustav tako da ishodište $y = 0$ bude jednako udaljeno od obje pukotine.

Promatramo osvijetljenost zastora na nekom mjestu y . Da bi zrake svjetlosti došle do tog mjesta, morale su se na pukotinama otkloniti za kutove ϑ_1 i ϑ_2 . Budući da je $R \gg d$, ti kutovi su približno jednaki ϑ . Razlika putova koju pređu spomenute dvije zrake jednaka je

$$\Delta x = d \cdot \sin \vartheta \quad . \quad (16.8)$$



Da bismo imali konstruktivnu interferenciju na zastoru, kut pod kojim se zrake otklanjaju mora biti takav da je razlika faza dviju zraka parni višekratnik broja π

$$\Delta \varphi = 2m\pi \quad . \quad (16.9)$$

Budući da je razlika faza jednaka valnom broju pomnoženom s razlikom putova $\Delta \varphi = k \cdot \Delta x$, gornji uvjet će biti ispunjen za $\Delta x = m\lambda$, odnosno

$$d \sin \vartheta = m\lambda \quad . \quad (16.10)$$

Središnja konstruktivna interferencija (svijetla pruga) bit će na mjestu $y = 0$, tj. za $m = 0$ kada je $\vartheta = 0$. Prva sljedeća svijetla pruga bit će za $m = 1$, tj. kada je $\sin \vartheta = \lambda/d$. Položaj na zastoru određen je s $y = R \tan \vartheta$. Budući da je riječ o malim otklonima, možemo aproksimirati $\sin \vartheta \approx \tan \vartheta$ pa dobivamo $y = R\lambda/d$. Općenito, m -ta svijetla pruga bit će na položaju

$$y = \frac{mR\lambda}{d} \quad . \quad (16.11)$$

Sličnim razmatranjem dobit ćemo da se tamne pruge (destruktivna interferencija) dobivaju za kutove

$$d \sin \vartheta = \frac{2m+1}{2} \lambda \quad . \quad (16.12)$$

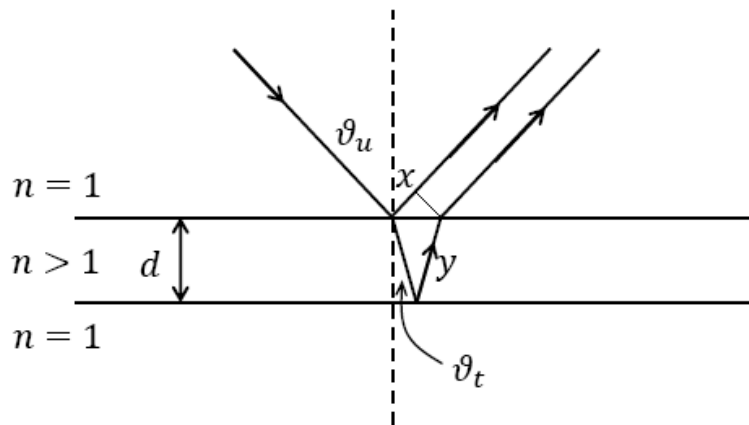
Napomenimo da su u idealiziranom slučaju vrlo tankih pukotina intenziteti svih svijetlih pruga jednaki. U stvarnosti, zbog konačne širine pukotina, dolazi do pojave difrakcije na pukotini² pa intenziteti svijetlih pruga variraju.

²Tu pojavu ćemo proučiti malo kasnije

16.4 Interferencija na tankom filmu

Prije razmatranja interferencije na tankom prozirnomo sloju, podsjetimo se razmatranja refleksije mehaničkih valova na čvrstom, odnosno slobodnom kraju, koja smo proveli u odjeljku 12.5. Vidjeli smo da mehanički val prilikom odbijanja od čvrstog kraja promijeni fazu za π , a prilikom odbijanja od slobodnog kraja nema promjene faze.

Vrlo je slično ponašanje imaju elektromagnetski valovi prilikom refleksije na granici sredstava različitih indeksa loma. Ako se elektromagnetski val odbija na granici sa sredstvom koje ima veći indeks loma, onda se električna komponenta vala ponaša kao da je došlo do refleksije na čvrstom kraju – promijeni fazu za π . Ako pak elektromagnetski val putuje sredstvom većeg indeksa loma i reflektira se na granici sa sredstvom manjeg indeksa loma, faza električne komponente vala neće se promijeniti.



Sada možemo razmotriti primjer interferencije svjetlosti na tankoj opni debljine d indeksa loma $n > 1$ koja se nalazi u zraku ($n = 1$). Neka paralelni snop svjetlosti pada na opnu pod kutom ϑ_u . Zrake će se dijelom lomiti (transmitirati) u opnu pod kutom ϑ_t , a djelomično će se reflektirati pod kutom ϑ_u . Reflektirana zraka pritom će promijeniti fazu za π .

Transmitirana zraka će se nailaskom na drugi rub opne također podijeliti. Dio će se lomiti i nastaviti put pod kutom ϑ_u , a dio će se reflektirati pod kutom ϑ_t . Prilikom ove refleksije neće se promijeniti faza. Ta reflektirana zraka će se opet lomiti na izlasku iz sredstva i nastaviti put pod kutom ϑ_u . Tako imamo dvije paralelne zrake koje se reflektiraju od opne i mogu interferirati na jako udaljenom zastoru (praktično u beskonačnosti). Kakva će biti njihova interferencija ovisit će o ukupnoj razlici faza $\Delta\varphi$ koja nastaje zbog razlike optičkih putova i promjene faze prilikom refleksije:

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta - \pi \quad . \quad (16.13)$$

Od trenutka razdvajanja do trenutka ponovnog zajedničkog puta, prva zraka prijeđe put x kroz zrak, a druga put $2y$ kroz opnu. Vrijedi

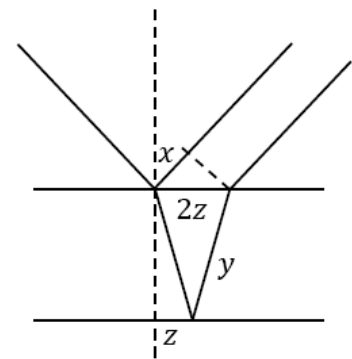
$$\frac{x}{2z} = \sin \vartheta_u \quad ; \quad y = \frac{d}{\cos \vartheta_t} \quad . \quad (16.14)$$

Razlika optičkih putova je

$$\Delta = 2ny - x \quad , \quad (16.15)$$

što uz Snellov zakon loma $\sin \vartheta_u = n \sin \vartheta_t$, daje

$$\Delta = 2nd \cos \vartheta_t \quad . \quad (16.16)$$



Konstruktivnu interferenciju reflektiranih zraka imat ćemo kad je $\Delta\varphi = 2m\pi$, odnosno za

$$\Delta = \frac{2m+1}{2}\lambda \quad . \quad (16.17)$$

Drugim riječima, konstruktivna interferencija reflektiranih zraka dogodit će se kad za debljinu opne i kut vrijedi:

$$d \cos \vartheta_t = \frac{2m+1}{4} \frac{\lambda}{n} \quad . \quad (16.18)$$

Najmanja debljina opne za koju se još može dobiti konstruktivna interferencija reflektiranih zraka postiže se za $m = 0$ i $\vartheta_t = 0$, tj. za

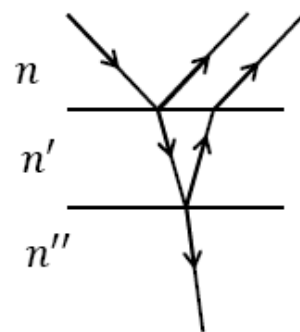
$$d = \frac{\lambda}{4n} \quad . \quad (16.19)$$

Ako je opna tanja od četvrtine valne duljine svjetlosti u njoj, opažatelj neće vidjeti reflektiranu zraku, odnosno, opna je njemu nevidljiva.

Drugi slučaj interferencije na tankom filmu je onaj kad je film indeksa loma n' nanesen na sredstvo čiji indeks loma n'' je veći nego indeks loma filma ($n'' > n' > 1$). U takvom slučaju ni na jednoj granici ne dolazi do promjene faze prilikom refleksije. Čak i za najtanji film opaziti će se reflektirana zraka.

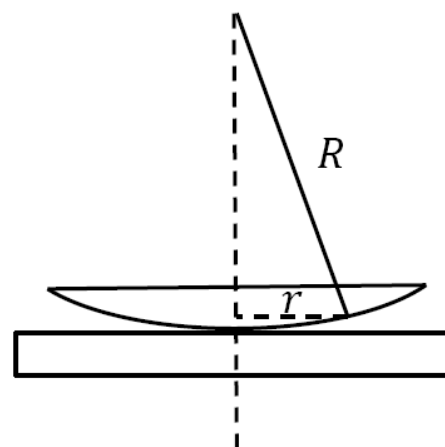
Ova pojava posebno je neugodna u slučaju kada ne želimo da se vidi refleksija od staklene površine, npr. od leće vojnog dalekozora. Može se pokazati da u tom slučaju refleksiju možemo izbjeći ako je film nanesen na površinu stakla debeo točno četvrtinu valne duljine. Tada će reflektirane zrake potpuno destruktivno interferirati.

U slučaju vojnih dalekozora tanki film je debljine $\lambda/4$ zelene svjetlosti, jer će u tom slučaju biti najviše prigušena refleksija svih boja vidljive svjetlosti.



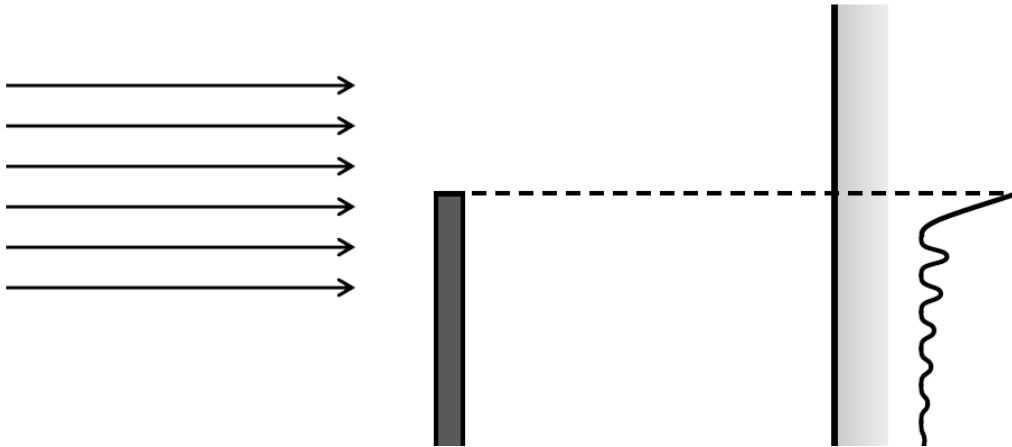
16.5 Newtonovi kolobari

Eksperimentalni postav koji se sastoji od jedne plankonvexne leće koja svojim tjemenom dodiruje jednu plan-paralelnu prozirnu ploču pogodan je za proučavanje Newtonovih kolobara (prstenova). To je pojava interferentnog uzorka koji nastaje zbog refleksije svjetlosti od dvije površine – sferne površine leće i ravne površine ploče. Svjetlost koja se reflektira na granici na koju dolazi iz optički gušćeg sredstva ne mijenja svoju fazu, a svjetlost koja se reflektira pri dolasku iz optički rijedeg sredstva mijenja fazu za π . Ukupna razlika faza dviju zraka koje su na leću došle zajedno ovisi o toj razlici faza i o geometrijskoj udaljenosti leće i ploče na mjestu r . Za $r = 0$ dolazi do destruktivne interferencije reflektirane svjetlosti, tj. središnji krug je tamn. Položaji tamnih prstenova u reflektiranoj svjetlosti su na mjestima određenim s $r = \sqrt{m\lambda R}$, pri čemu je m cijeli broj. U transmitiranoj svjetlosti središnji krug je svijetao. Iz ovakvog eksperimentalnog postava moguće je odrediti radijus zakrivljenosti leće, a lako se uočavaju i nepravilnosti u sfernom obliku leće. Stoga su Newtonovi kolobari vrlo korisni u procesu proizvodnje leća.



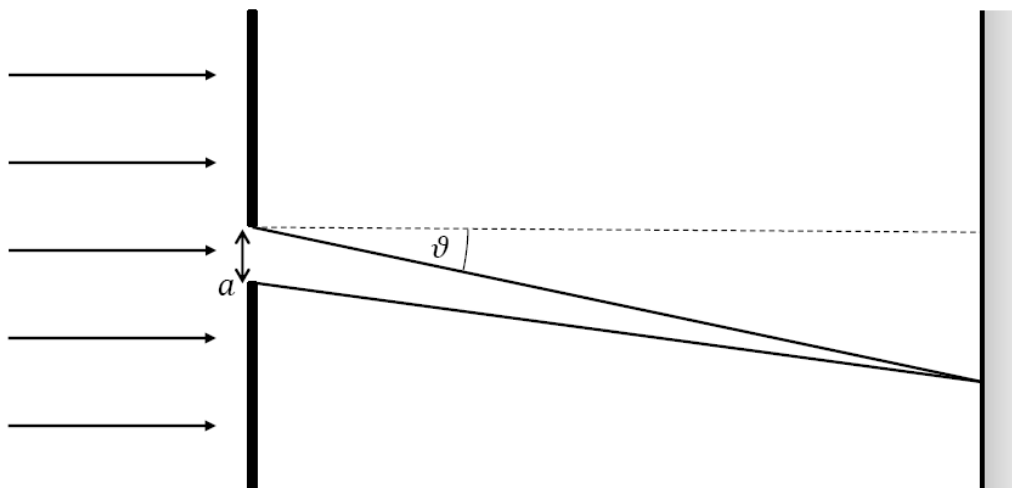
16.6 Ogib svjetlosti

Navikli smo da kada paralelan snop svjetlosti nailazi na prepreku iza prepreke ostaje oštra sjena. Međutim, kada bismo detaljnije pogledali rub te sjene, vidjeli bismo da nije sasvim oštar, nego da se mogu uočiti interferencijske pruge blizu tog ruba. To je posljedica valne prirode svjetlosti. Svjetlost se ogiba oko ruba prepreke, što je posljedica Huygensovog principa. Pojavu stoga nazivamo **ogib** ili **difrakcija** svjetlosti.



16.6.1 Difrakcija na pukotini

Promotrimo paralelan snop svjetlosti koji nailazi na pukotinu (konačne) širine a . Na samoj pukotini svjetlost će se ogibati, odnosno, prema Huygensovom principu, svaka točka na valnoj fronti koja se nalazi na pukotini predstavlja novi izvor vala koji se širi u svim smjerovima. Postavimo li zastor iza pukotine, opazit ćemo difrakcijski uzorak koji će imati svijetle i tamne pruge. U proučavanju difrakcije razlikujemo dva slučaja. Ako je zastor na maloj udaljenosti iza pukotine, govorimo o Fresnelovoj difrakciji u kojoj se interferirajuće zrake ogibaju pod raznim kutovima. Takvu difrakciju je relativno teško izračunati. Mnogo jednostavnije je odrediti difrakcijski uzorak ako je zastor dovoljno daleko tako da možemo aproksimativno reći da se interferirajuće zrake ogibaju pod istim kutovima. Takav slučaj nazivamo Fraunhoferova difrakcija. Očito je da će maksimalan intenzitet na udaljenom zastoru biti za zrake koje se ne otklanjaju ($\vartheta = 0$).



Odredimo položaj prvog minimuma intenziteta. Destruktivnu interferenciju dobit ćemo kad se zrake koje izlaze iz pukotine po parovima poništavaju. Da bismo odredili kut pod kojim se opaža prvi minimum, podijelimo pukotinu na dva dijela. Da bi prva zraka iz gornjeg dijela destruktivno interferirala s prvom zrakom iz donjeg dijela, njihova razlika putova mora biti neparan broj polovica valne duljine. Razlika putova je

$$\Delta x = \frac{a}{2} \sin \vartheta \quad , \quad (16.20)$$

a destruktivna interferencija se dobiva za

$$\Delta x = \frac{2m + 1}{2} \lambda \quad . \quad (16.21)$$

Prvi difrakcijski minimum dobiva se za $m = 0$, tj. za

$$a \cdot \sin \vartheta = \lambda \quad . \quad (16.22)$$

Da bismo dobili drugi minimum, pukotinu ćemo podijeliti na 4 dijela, a uvjet za drugi minimum je

$$a \cdot \sin \vartheta = 2\lambda \quad . \quad (16.23)$$

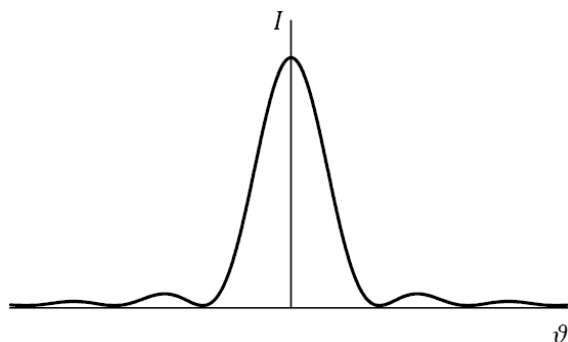
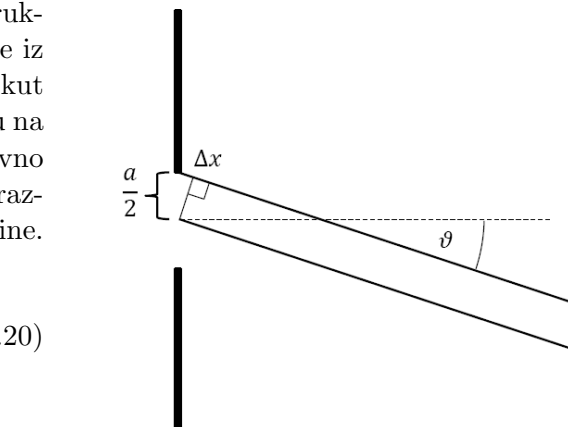
Između svaka dva minimuma opažamo maksimume čiji intenziteti se smanjuju.

Ovisnost intenziteta o kutu ogiba nećemo izvoditi, nego ćemo samo napisati rezultat:

$$I(\vartheta) = I_0 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a \sin \vartheta}{\lambda} \right)}{\frac{\pi a \sin \vartheta}{\lambda}} \right]^2 \quad . \quad (16.24)$$

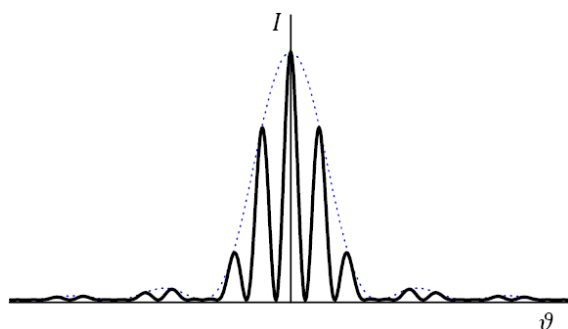
Ova ovisnost prikazana je na slici desno.

Možemo uočiti da što je uži otvor pukotine, to će centralni maksimum biti širi, a udaljenost pokrajnjih maksimuma veća.



Ogib na dvije pukotine

Imajući u vidu činjenicu da pukotina konačne širine sama po sebi stvara difrakcijsku sliku, pitamo se što se događa ako Youngov pokus izvodimo s preprekom na kojoj su dvije paralelne pukotine koje nisu jako tanke. Neka je razmak pukotina d , a širina svake pukotine a . U tom slučaju će difrakcijska slika Youngova pokusa s idealno tankim pukotinama biti modulirana (tj. pomnožena s) rezultatom (16.24). Na slici desno prokazan je slučaj kad je razmak pukotina d tri puta veći od širine pukotina a .



16.6.2 Optička rešetka

Razmotrimo ponovno idealizirani slučaj Youngovog pokusa u kojem imamo interferenciju svjetlosti koja prolazi kroz dvije vrlo tanke pukotine.

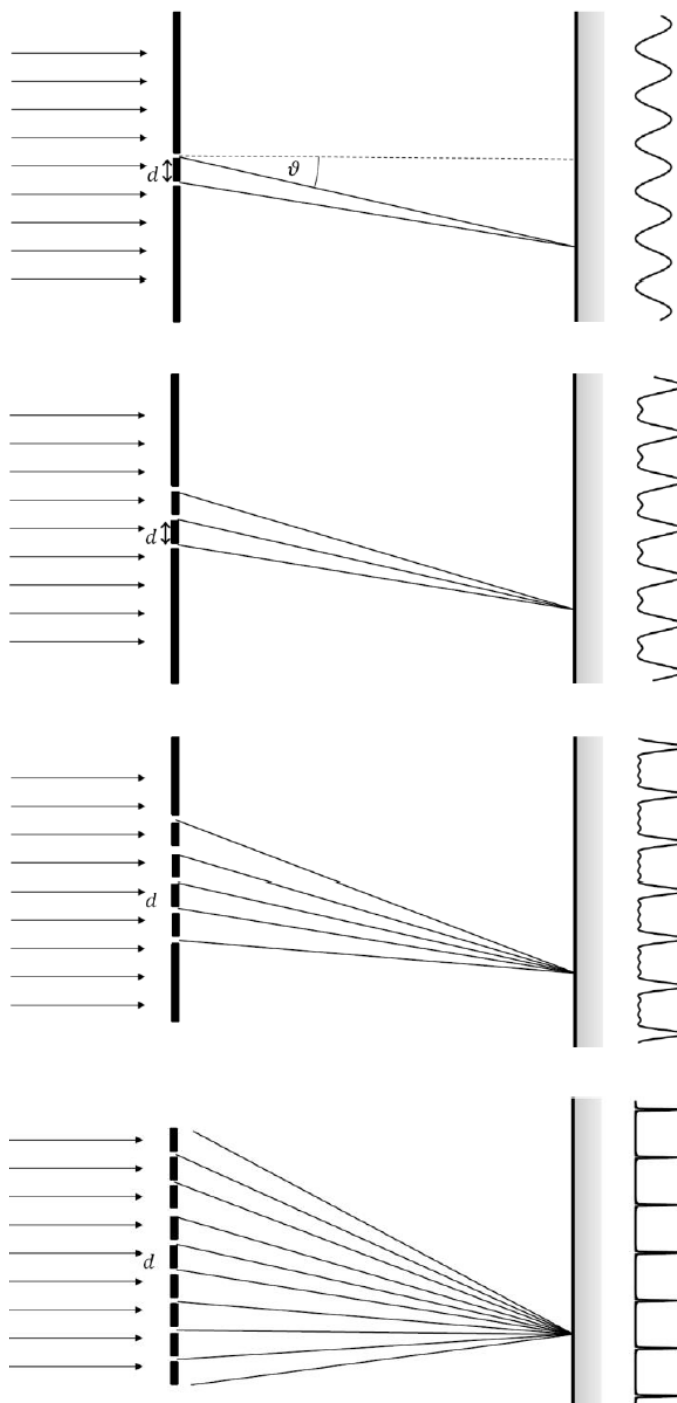
Položaji pruga maksimalnog intenziteta na zastoru određeni su Youngovom formulom (16.11):

$$\vartheta = \frac{m\lambda}{d}, \quad (16.25)$$

a između tih položaja su minimumi intenziteta kada dolazi do destruktivne interferencije. Interferencijski uzorak ima sinusoidalni oblik, što znači da maksimumi nisu oštro izraženi. Ovo je prikazano na prvoj slici desno.

Ako dodamo još jednu pukotinu tako da razmaci susjednih pukotina ostanu isti, položaji maksimuma (konstruktivne interferencije) i dalje će biti određeni Youngovom formulom, ali će biti užiji, a u sredini između dva glavna maksimuma pojavit će se jedan manji maksimum. To je slučaj kada zrake iz dvije krajnje pukotine međusobno konstruktivno interferiraju, a zraka iz srednje pukotine ima njima suprotnu fazu. Druga slika s desne strane pokazuje interferencijski uzorak za prepreku s tri vrlo tanke pukotine.

Povećavamo li broj pukotina, pazeći da budu ekvidistantne (međusobno udaljene za d), maksimalni intenziteti postaju oštriji i jači, a među njima se javlja veći broj malih svijetlih pruga čiji intenziteti su vrlo mali. Na trećoj slici prikazan je slučaj kada imamo 5 ekvidistantnih pukotina, a na četvrtoj slici slučaj kada imamo 30 ekvidistantnih pukotina.



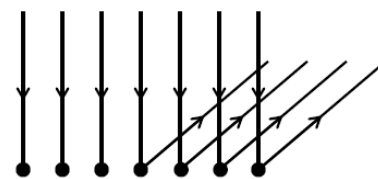
Optička rešetka

Posljednji primjer je u stvari slučaj optičke rešetke. Optičkom rešetkom nazivamo velik broj uskih paralelnih ekvidistantnih pukotina. Maksimumi su vrlo oštri, a njihov razmak ovisi samo o valnoj duljini upadne svjetlosti. Optičke rešetke su izuzetno korisne u spektroskopiji jer nam omogućuju da precizno odredimo valnu duljinu opažene svjetlosti, a ako imamo bijelu svjetlost možemo ju lako rastaviti na boje od kojih je sastavljena.

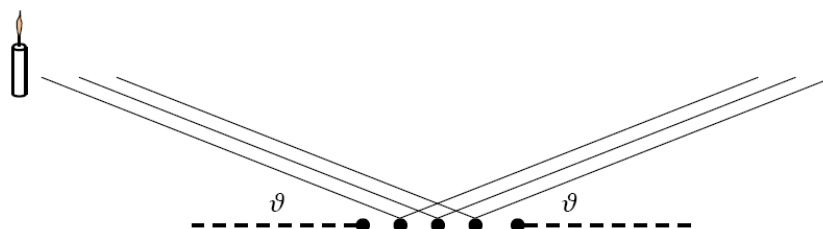
16.6.3 Refleksijska rešetka

Isti interferencijski efekt možemo postići ako umjesto ekvidistantnih pukotina kroz koje svjetlost prolazi i ogiba se, na put svjetlosti postavimo prepreku s nizom ekvidistantnih paralelnih brazdi ili žljebova. Zrake iz paralelnog snopa svjetlosti reflektiraju se na brazdama u svim smjerovima. Međutim, samo oni smjerovi za koje zrake reflektirane sa susjednih brazdi konstruktivno interferiraju, dat će svijetlu prugu na udaljenom zastoru.

To znači da kut mora biti takav da razlika puteva zraka reflektiranih od dvije susjedne brazde mora biti cijeli broj valnih duljina. Dobar primjer refleksijske rešetke je CD ili DVD.



Zamislimo da iz udaljenog izvora svjetlosti zrake padaju na ravninu rešetke pod nekim kutom ϑ . Od svake brazde rešetke zrake se reflektiraju u svim smjerovima. Međutim, možemo uočiti da će zrake koje se reflektiraju pod istim kutom ϑ i zatim putuju do udaljenog promatrača, sve imati jednak put od izvora do promatrača. To znači da će konstruktivno interferirati. Izgleda kao da se refleksijska rešetka ponaša kao zrcalo. Ovo zapažanje uporišbit ćemo u sljedećem odjeljku prilikom razmatranja rendgenske difrakcije na kristalima.



16.7 Rendgenska difrakcija

Rendgensko zračenje je elektromagnetsko zračenje valnih duljina reda veličine 10^{-10} m.³ Te valne duljine usporedive su s razmacima atoma u kristalima. Kristalna krutina sastoji se od pravilno raspoređenih atoma koji čine trodimenzionalnu "difrakcijsku rešetku" za rendgenske zrake.

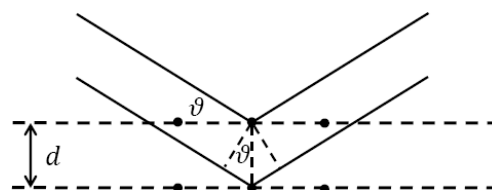
Kada rendgenska zraka uđe u takav pravilan kristal, raspršuje se u svim smjerovima. U nekim smjerovima ona konstruktivno interferira s drugim zrakama, a u nekim smjerovima ta interferencija je destruktivna. Pokazuje se da su maksimumi uvijek u smjeru kao da se zraka zrcalno reflektirala na obitelji paralelnih ravnina (kristalnih ravnina) koje se protežu kristalom i sadrže pravilan raspored atoma. Ako gledamo jednu od tih ravnina, možemo postaviti prvi uvjet za konstruktivnu interferenciju:

$$\vartheta_u = \vartheta_r \quad . \quad (16.26)$$

Taj uvjet je nužan, ali ne i dovoljan da bismo imali konstruktivnu interferenciju rendgenskih zraka. Kad smo odabrali jednu ravninu, u kristalu postoji čitav niz ravnina paralelnih toj ravnini, a sve te ravnine su međusobno udaljene za d .

Za postizanje konstruktivne interferencije, moraju zrake reflektirane od svih paralelnih ravnina biti u fazi, tj. razlika putova dviju zraka mora biti cjelobrojni višekratnik valnih duljina. Time smo dobili drugi, **Bragov uvjet** za konstruktivnu interferenciju:

$$2d \sin \vartheta_u = m\lambda \quad . \quad (16.27)$$



³Često se koristi, inače nedopuštena, jedinica *angstrom*

Uvjeti (16.26) i (16.27) nam omogućuju da potpuno rekonstruiramo kristalnu strukturu promatranog kristala. Kada opazimo svjetlu točku na detektoru, znamo smjer prostiranja ravnine od koje se ta zraka reflektirala i istodobno znamo međusobni razmak svih ravnina u toj obitelji kristalnih ravnina. Da bismo tako rekonstruirali kristalnu strukturu, valna duljina svjetlosti mora biti dovoljno malena ($\lambda < 2d$) pa je jasno zašto takvu strukturu ne možemo odrediti s pomoću vidljive svjetlosti ($\lambda \sim 550$ nm), nego moramo koristiti rendgenske zrake ($\lambda \sim 0.1$ nm).

16.8 Polarizacija

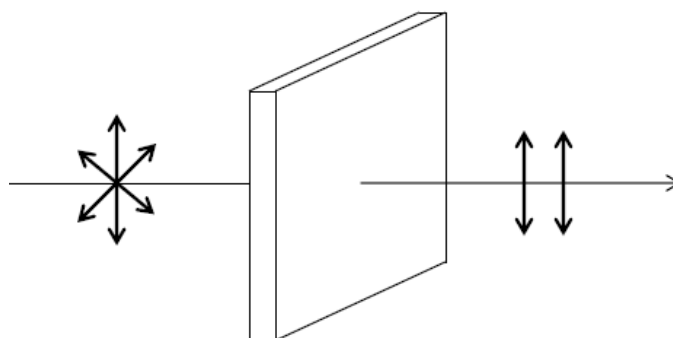
Podsjetimo se da je svjetlost elektromagnetski val. Kako smo pokazali u 14. poglavlju, izvori elektromagnetskih valova su promjenjive struje ili ubrzani električni naboji.

Prisjetimo se Hertzovog izvora elektromagnetskog vala. Dipolna antena stvara promjenjivo električno polje \vec{E} koje je uvijek paralelno s dipolnom antenom. Postavimo li koordinatni sustav tako da je os x paralelna s antenom, električno polje će imati samo x -komponentu, koja će mijenjati predznak iz pozitivnog u negativni. Neka se tako stvoreni elektromagnetski val prostire u z -smjeru. Budući da su elektromagnetski valovi transverzalni, magnetsko polje \vec{B} imat će samo y -komponentu. Za ovaj val reći ćemo da je *linearno polariziran*. Za smjer polarizacije uzet ćemo uvijek smjer električnog polja pa je ovaj val linearno polariziran u x smjeru.



Kada govorimo o prirodnom svjetlu, znamo da su izvori svjetlosti nasumično orijentirani atomi i molekule. Komponente električnog polja bit će usmjerene u svim smjerovima okomitim na smjer prostiranja. Zato kažemo da prirodno svjetlo nije polarizirano. Ako želimo polariziranu svjetlost, moramo koristiti *polarizatore*.

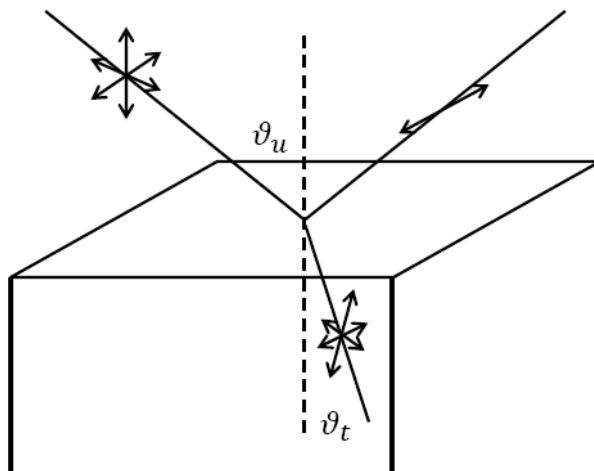
Želimo li polarizirati neki elektromagnetski val u radiofrekventnom ili mikrovalnom području, kao polarizator možemo upotrijebiti niz paralelnih vodljivih žica. Ako na takav polarizator naiđe nepolarizirani elektromagnetski val, kroz polarizator će proći samo ona komponenta vala koja je okomita na žice.



Za polarizaciju svjetlosti upotrebljavamo materijal koji nazivamo *polaroid*. To je materijal načinjen od polimernih molekula koje su izduljene i usmjerene u jednom smjeru. Svakom polarizatoru možemo definirati smjer polarizacije.

Ako na polarizator naiđe već polarizirani val kojemu je smjer polarizacije različit od smjera polarizatora za neki kut φ , onda će intenzitet svjetlosti na izlazu iz polarizatora biti:

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \varphi \quad . \quad (16.28)$$

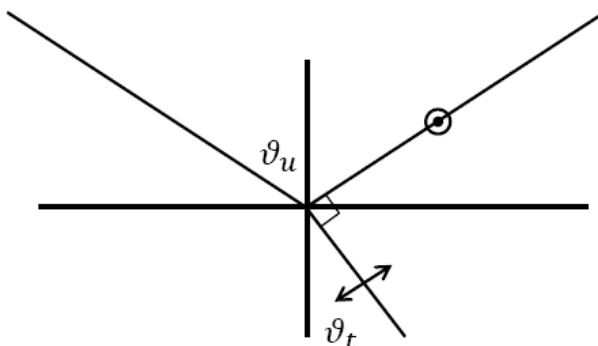
16.8.1 Polarizacija refleksijom

Kada nepolarizirana svjetlost nailazi na granicu dvaju sredstava, može se djelomično ili potpuno polarizirati. Ako zraka dolazi iz optički rjeđeg sredstva na granicu s optički gušćim sredstvom pod kutom ϑ_u , ona će se djelomično reflektirati pod istim kutom ϑ_u , a djelomično će se transmitirati pod kutom ϑ_t , koji je određen Snellovim zakonom loma. Reflektirana zraka bit će djelomično polarizirana pri čemu će najjača komponenta električnog polja biti ona koja je paralelna s plohom granice između dva sredstva. Jasno je da će transmitirana zraka imati jače komponente električnog polja koje nisu paralelne s graničnom plohom.

Stupanj polariziranosti reflektirane zrake ovisi o upadnom kutu. Škotski fizičar Sir David Brewster uočio je da će reflektirana zraka biti potpuno linearno polarizirana ako reflektirana zraka zatvara s transmitiranom zrakom pravi kut (90°). Da bi to bilo zadovoljeno, mora zbroj kutova refleksije $\vartheta_r = \vartheta_u$ i transmisije ϑ_t biti 90° . Drugim riječima, to znači da mora vrijediti $\cos \vartheta_u = \sin \vartheta_t$. Budući da prema Snellovom zakonu vrijedi $n \sin \vartheta_t = \sin \vartheta_u$, uvjet za **Brewsterov kut** možemo pisati:

$$n = \operatorname{tg} \vartheta_u \quad . \quad (16.29)$$

U slučaju kada nepolarizirana zraka svjetlosti pada na granicu sredstva pod Brewsterovim kutom, reflektirana zraka bit će potpuno linearno polarizirana i to horizontalno, tj. tako da električno polje bude paralelno graničnoj površini, a okomito na smjer prostiranja vala.



16.8.2 Cirkularna polarizacija

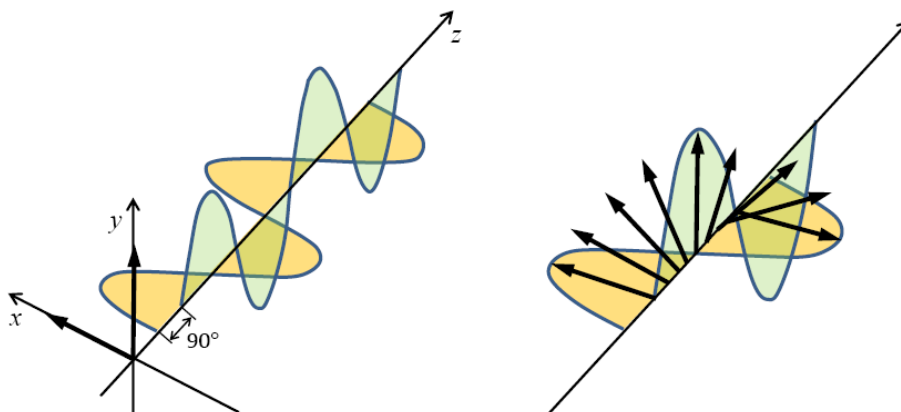
Val koji smo do sada promatrali u ovom odjeljku bio je linearno polariziran – električno polje uvijek je bilo paralelno s jednim pravcem koji smo odabrali da bude os x . Budući da za električna i magnetska polja vrijedi pravilo superpozicije, možemo zamisliti da imamo dva elektromagnetska vala koja putuju zajedno – jedan polariziran u smjeru osi x , a drugi u smjeru osi y . Ukupni val bit će superpozicija ta dva vala. Ako ta dva vala imaju istu fazu, tj. ako je u istom trenutku u oba vala električno polje jednako nuli, onda će superponirani val ponovno biti linearno polariziran, ali pod kutom 45° u odnosu na x i y osi.

Međutim, ako dva linearno polarizirana vala nisu u fazi, npr. val polariziran u y smjeru kasni u fazi za $\pi/2$ kao na slici, onda će rezultatni val biti *cirkularno polariziran*. Promatraču će izgledati kao da prema njemu dolazi val kojemu vektor električnog polja kruži u $x - y$ ravnini.

Cirkularna polarizacija može biti lijeva ili desna. Val na slici je desno cirkularno polariziran jer u desnom koordinatnom sustavu y -komponenta vala kasni u fazi za x -komponentom vala.

U prirodi postoje kristali koji mijenjaju fazu međusobno okomitih komponenta električnog polja. Takvi kristali zovu se *dvolomci*.

Cirkularno polarizirano svjetlo omogućujemo da razlikujemo makromolekule koje su kemijski identične, ali imaju različiti helicitet, kao što su biološke makromolekule. Poznato je da unatoč identičnoj kemijskoj strukturi, funkcionalnost takvih molekula ovisi o helicitetu. Eksperimentalna metoda koja nam omogućuje razlikovanje lijevih i desnih spiralnih molekula zove se cirkularni di-kroizam.



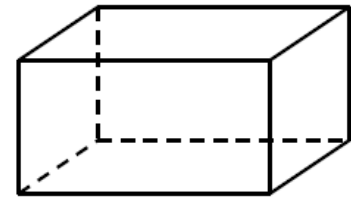
Poglavlje 17

Emisija i apsorpcija elektromagnetskih valova

U Hertzovom pokusu (odjeljak 14.2) vidjeli smo da elektromagnetski valovi nastaju kao posljedica promjenjivih električnih struja, tj. kao posljedica ubrzavanja električnih naboja. Tako stvoreni val putuje od izvora praznim prostorom brzinom svjetlosti. Ograničimo li prostor u kojem je stvoren elektromagnetski val, možemo stvoriti stojne valove, odnosno modove.

17.1 Stojni elektromagnetski valovi

Struktura u kojoj se stvaraju stojni elektromagnetski valovi naziva se rezonantna struktura. Najčešće je riječ o rezonantnoj šupljini – zatvorenoj posudi s metalnim oplošjem. Radi jednostavnosti, zamislimo pravokutnu metalnu kutiju – pravokutnu rezonantnu šupljinu. Ako u njoj na neko način pobudimo elektromagnetske oscilacije, stvorit će se stojni elektromagnetski valovi točno određenih valnih duljina. Zbog vodljivih stijenki, električno polje takvog vala uvijek će imati čvor na rubu šupljine $\vec{E} = 0$ (metalna stijenka djeluje kao čvrsti kraj) pa će dopuštene valne duljine stojnih valova biti određene geometrijom šupljine. Ako gledamo stojni val duž osi z , njegova transverzalna komponenta će imati oblik



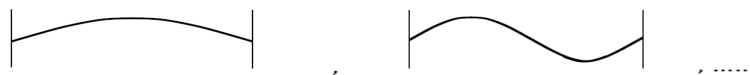
$$\mathcal{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_{x0} \cdot \sin kz \cdot \cos \omega t \quad , \quad (17.1)$$

pri čemu valni vektor k i frekvencija ω mogu poprimiti samo određene diskretne vrijednosti:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad ; \quad \omega_n = c \cdot k_n \quad , \quad (17.2)$$

pri čemu je L duljina kutije u z -smjeru.

Oblik amplitude električnog polja u prvim modovima prikazan je na slici.



Za razliku od električnog, magnetsko polje može imati transverzalnu komponentu uz vodljivu stijenku (tj. komponentu koja je paralelna stijenci):

$$B_y(z, t) = B_{y0} \cdot \cos kz \cdot \cos \omega t \quad . \quad (17.3)$$

Oblik amplitude magnetskog polja u prvim modovima prikazan je na slici.

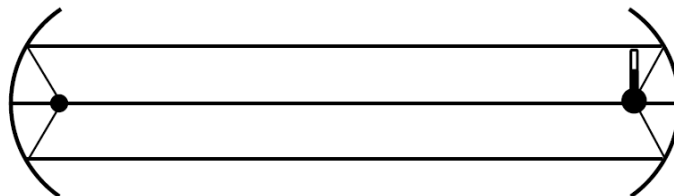


Stojni elektromagnetski valovi u rezonantnoj šupljini posljedica su titranja naboja u stijenkama šupljine. Jedan primjer rezonantne šupljine koji svakodnevno susrećemo jest mikrovalna pećnica. Pravokutna metalna kutija ima karakteristične frekvencije modova elektromagnetskih valova, a izvor mikrovalova služi da tjera naboje uz stijenku da osciliraju frekvencijom jednog od tih modova. Na taj način u šupljinu se pohranjuje energija oscilirajućeg električnog i magnetskog polja, a ta energija troši se na zagrijavanje vode (rotacija molekula vode) ili na otpor metalnih zidova koji nisu savršeni vodiči. Metalna rešetka na vratima sprječava zračenje elektromagnetskih valova iz pećnice jer je razmak oka rešetke mnogo manji od valne duljine stvorenih stojnih valova.

Kada bismo otvorili vrata, velika snaga zračenja bi izlazila iz pećnice, što je opasno za osobu koja stoji pred pećnicom. Zato pećnice imaju ugrađeni sigurnosni mehanizam da se mikrovalni izvor isključi čim se vrata otvore. Kad ne bi postojala ta zaštita, pećnica bi zračila elektromagnetske valove upravo one frekvencije koja odgovara pobuđenom modu.

17.2 Toplinsko zračenje

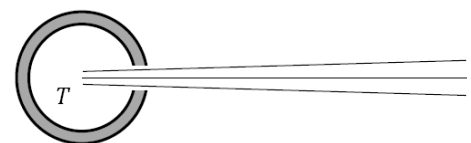
Već smo nekoliko puta rekli da se elektromagnetskim valovima prenosi energija. To vrijedi za cijeli spektar elektromagnetskog zračenja, od radiovalova, mikrovalova, preko vidljive svjetlosti do rendgenskih i gama zraka. Za vidljivu svjetlost sasvim nam je normalno da možemo primijeniti geometrijsku optiku za usmjeravanje zraka. Ista pravila moraju vrijediti i za onaj dio elektromagnetskog zračenja koji ne možemo vidjeti. Zračenje nešto nižih frekvencija od vidljivog nazivamo infracrveno zračenje. To zračenje osjećamo kao toplinu. Jednostavnim pokusom možemo pokazati da i za prijenos topline vrijede zakoni geometrijske optike, a time potvrđujemo da se prijenos obavlja elektromagnetskim valovima.



17.2.1 Crno tijelo

Tijela koja imaju temperaturu višu od 0 K emitiraju toplinsko zračenje, ali jednako tako i apsorbiraju takvo zračenje. Ako tijelo apsorbira svo zračenje koje padne na njegovu površinu, onda takvo tijelo zovemo **savršeno crno tijelo**. Takvo tijelo onda ima i svojstvo emitiranja zračenja u svim područjima valnih duljina. Savršeno crno tijelo ne postoji – npr. čađa reflektira oko 1% upadnog zračenja.

Ipak, eksperimentalno možemo ostvariti gotovo savršeno crno tijelo. To može biti maleni otvor crne kutije – šupljine. Neka je unutrašnjost šupljine začađena. Zračenje koje uđe u šupljinu bit će većim dijelom apsorbirano u prvom sudaru sa začađenom stijenkom. Onaj maleni dio koji se reflektira ili rasprši, ponovno se apsorbira u drugim dijelovima unutrašnjosti šupljine. Otvor takve šupljine ponaša se kao crno tijelo: svo zračenje koje padne na otvor potpuno je apsorbirano.



Ako je šupljina na nekoj temperaturi T , onda otvor koji se ponaša kao crno tijelo ujedno i emitira zračenje. Atomi u stijenkama šupljine titraju raznim frekvencijama koje odgovaraju modovima te šupljine. Titranje atoma ujedno je i titranje naboja, a oscilirajući naboji su izvor elektromagnetskih valova. Prema ekviparticijskom teorem, energija je jednako raspodijeljena po svim modovima. No upravo ta pretpostavka klasične statističke fizike pokazala se kao netočna i dovela je do razvoja kvantne fizike. Navedimo najprije nekoliko eksperimentalnih opažanja koja su bila poznata krajem 19. stoljeća.

17.2.2 Stefan-Boltzmannov zakon

Slovenski fizičar Jožef Stefan je 1879. godine eksperimentalno odredio intenzitet zračenja crnog tijela koje je na nekoj temperaturi T . Nešto kasnije taj izraz teorijski je izveo Ludwig Boltzmann. Stefan-Boltzmannov zakon kaže da je ukupni intenzitet zračenja crnog tijela (integriran po svim frekvencijama) dan izrazom

$$I = \sigma \cdot T^4 \quad , \quad (17.4)$$

pri čemu je $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^4$ Stefan-Boltzmannova konstanta. Intenzitet apsorpcije zračenja iz okoline dan je istim izrazom, pri čemu je T temperatura okoline.

Pokažimo to primjerom. Izračunajmo snagu emitiranog i apsorbiranog toplinskog zračenja prosječnog čovjeka. Kao vrlo dobru aproksimaciju možemo pretpostaviti da je čovjek crno tijelo. Neka je ukupna površina tijela $S = 1.5\text{m}^2$, a temperatura $T = 310\text{K}$. Na toj temperaturi intenzitet emitiranog zračenja crnog tijela je $I = 524\text{W/m}^2$ pa je snaga zračenja $P = I \cdot S = 786\text{W}$. Istodobno crno tijelo apsorбира zračenje iz okoline. Ako je temperatura zraka 20°C (293K), intenzitet apsorbiranog zračenja je $I = 418\text{W/m}^2$, a apsorbirana snaga je $P = I \cdot S = 627\text{W}$. Razliku od 160W nadoknađujemo hranom.

17.2.3 Rayleigh-Jeansova katastrofa

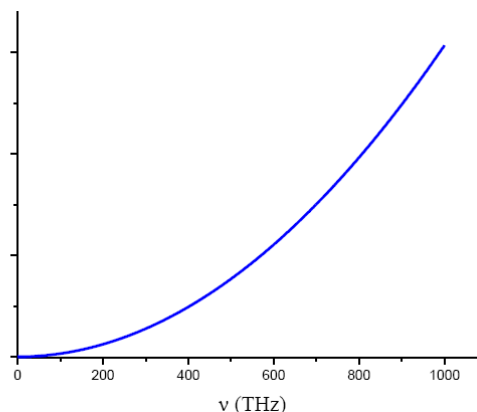
Klasično predviđanje da je energija jednako raspodijeljena po svim modovima titranja čestica u crnom tijelu dovela je do paradoksalnog rezultata. Ekviparticijskim teoremom pretpostavljeno je da svakom harmonijskom oscilatoru u toplinskoj ravnoteži pripada srednja energija $k_B T$. Kako je ta energija raspodijeljena po frekvencijama? Želimo li znati gustoću modova na nekoj frekvenciji ν , moramo gledati interval frekvencija $[\nu, \nu + d\nu]$. Što je viša promatrana frekvencija to će biti veća gustoća modova u promatranom frekventnom intervalu. Rayleigh i Jeans su izračunali da na nekoj temperaturi gustoća modova ovisi o frekvenciji kao $u(\nu) \propto \nu^2$, točnije

$$I_\nu(T) = \frac{2\nu^2 k_B T}{c^2} \quad . \quad (17.5)$$

Ovaj rezultat, prikazan na slici desno, ne može biti fizikalno prihvatljiv. Ukupni intenzitet zračenja $I(\nu)$ crnog tijela bio bi

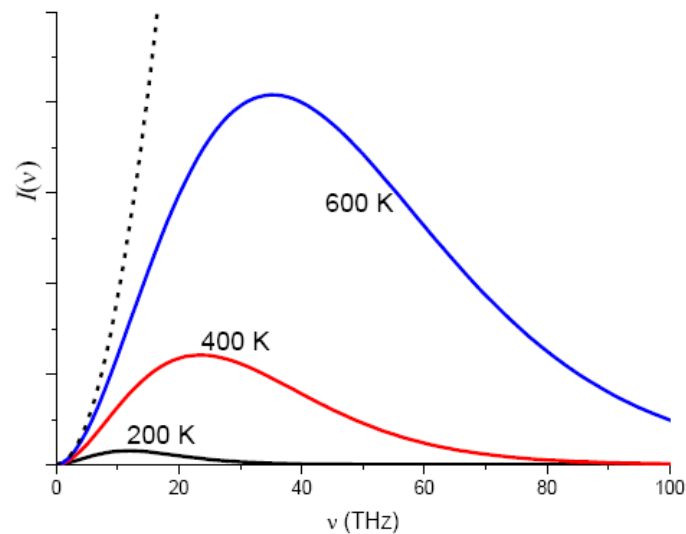
$$I(T) = \int_0^\infty I_\nu(T) d\nu = \infty \quad , \quad (17.6)$$

što bi značilo da tijelo zrači beskonačnom snagom. Naravno, Stefan-Boltzmannov zakon zračenja kazuje nam da to nije točno.



U stvarnosti, eksperiment pokazuje sasvim drugačije ponašanje. Na vrlo niskim frekvencijama, intenzitet zračenja uistinu ovisi kvadratično o frekvenciji, upravo prema predviđanju Rayleigha i Jeansa. Međutim, na višim frekvencijama ta ovisnost prestaje rasti, postiže maksimum i nakon toga pada prema višim frekvencijama. Integral ovakve krivulje na nekoj temperaturi je konačan i odgovara upravo intenzitetu predviđenom Stefan-Boltzmannovim zakonom za tu temperaturu.

Na slici su prikazane krivulje ovisnosti intenziteta o frekvenciji za tri različite temperature. Radi usporedbe, isprekidanom crtom nacrtano je ponašanje predviđeno Rayleigh-Jeansovim zakonom za temperaturu 600 K.



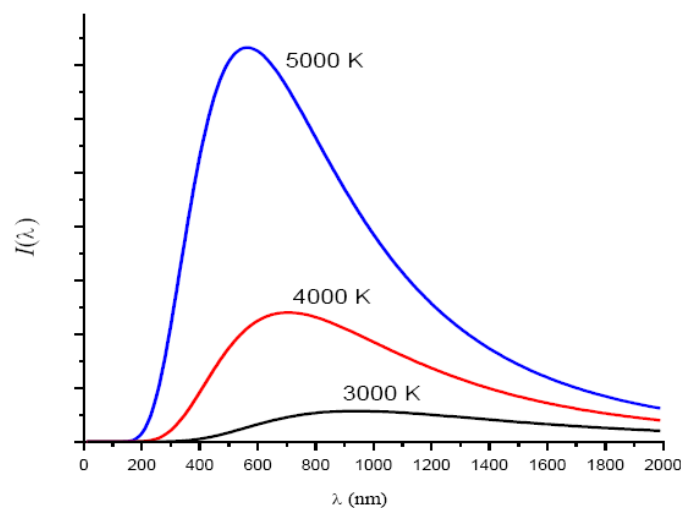
17.2.4 Wienov zakon

Budući da su valna duljina i frekvencija elektromagnetskog vala povezani relacijom $c = \lambda \cdot \nu$, gustoću intenziteta zračenja možemo prikazati u ovisnosti o valnoj duljini. U intervalu valnih duljina $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, intenzitet zračenja je $I(\lambda) \cdot d\lambda$, što znači da je $I(\lambda)$ gustoća intenziteta po valnim duljinama. Očito je da postoji valna duljina za koju je gustoća intenziteta maksimalna. Wilhelm Wien eksperimentalno je utvrdio da valna duljina maksimalnog intenziteta λ_{\max} raste s temperaturom crnog tijela i to tako da vrijedi relacija:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m} \quad . \quad (17.7)$$

Ta relacija naziva se Wienov zakon.

Kao primjer navedimo da zračenje Sunca ima maksimalni intenzitet na valnoj duljini $\lambda_{\max} \approx 500 \text{ nm}$. Pomoću Wienova zakna možemo izračunati temperaturu na površini Sunca koja iznosi 5770 K.



17.3 Planckov zakon zračenja crnog tijela

U prethodnom odjeljku naveli smo nekoliko eksperimentalnih činjenica koje su uzdrmale klasičnu statističku fiziku, koja je do pred kraj 19. stoljeća bila jedna od najbolje utemeljenih grana znanosti. Rayleigh-Jeansov zakon zračenja koji je striktno izveden iz temeljnih postulata klasične statističke fizike, predviđao je potpuno nefizikalno rezultata da će crno tijelo na konačnoj temperaturi zračiti beskonačnom snagom i to tako da snaga divergira na najmanjim valnim duljinama. Suprotno tome, Stefan i Boltzmann pokazali su da je ukupni intenzitet zračenja na nekoj temperaturi konačan i točno određen. Wien je pokazao da intenzitet zračenja ne divergira na najmanjim valnim duljinama, već da postoji valna duljina za koju je intenzitet zračenja maksimalan, a da se na najmanjim valnim duljinama intenzitet eksponencijalno smanjuje.

Max Planck pronašao je objašnjenje za ovakvo ponašanje zračenja crnog tijela. On je posumnjao u valjanost ekviparticijskog teorema za raspodjelu energija po modovima titranja atoma u crnom tijelu. Naime, Rayleigh-Jeansov rezultat (17.5) može se pisati kao

$$I_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} \cdot \bar{E}_n \quad , \quad (17.8)$$

pri čemu je \bar{E}_n prosječna energija n -tog moda titranja naboja u crnom tijelu. Prema ekviparticijskom teoremu klasične statističke fizike, svaki mod harmonijskog titranja ima prosječnu energiju $k_B \cdot T$. Planck je 1900. godine na temelju postojećih eksperimentalnih rezultata postavio teoriju prema kojoj se na nekoj temperaturi svi modovi ne pobuđuju jednako. Pretpostavio je da se nekom modu, čija karakteristična frekvencija je ν , energija može dodavati samo u cjelobrojnim iznosima $\Delta E = h \cdot \nu$, pri čemu je h eksperimentalno određena konstanta

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad , \quad (17.9)$$

koja je kasnije nazvana *Planckovom konstantom* i temeljna je veličina kvantne fizike. Uz ovu pretpostavku izveo je rezultat za prosječnu energiju n -tog moda na temperaturi T :

$$\bar{E}_n = \frac{h \cdot \nu_n}{e^{\frac{h \cdot \nu_n}{k_B \cdot T}} - 1} \quad . \quad (17.10)$$

Ovaj rezultat je u skladu s Bose-Einsteinovom statistikom koju su 1924. godine izvela ta dva fizičara.

Primijetimo da za modove malih frekvencija ($h\nu_n \ll k_B T$), prosječna energija odgovara predviđanju ekviparticijskog teorema $\bar{E}_n = k_B T$, ali za modove velikih frekvencija ($h\nu_n \gg k_B T$) \bar{E}_n teži u nulu. Povežemo li relacije (17.8) i (17.10) dobivamo Planckov zakon zračenja crnog tijela:

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad , \quad (17.11)$$

Ovaj zakon zračenja prikazan je na slici u prošlom odjeljku. U limesu malih frekvencija, Planckov zakon zračenja crnog tijela poklapa se s Rayleigh-Jeansovim izrazom (17.5), ali za visokefrekvencije on teži u nulu.

Ako želimo izraziti gustoću intenziteta u ovisnosti o valnoj duljini, ovaj izraz se transformira u

$$I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad . \quad (17.12)$$

I ovaj izraz prikazan je za razne temperature na slici u pododjeljku o Wienovom zakonu. Da bismo našli na kojoj valnoj duljini je gustoća intenziteta maksimalna, gornji izraz treba derivirati po λ i izjednačiti s nulom. Tako ćemo dobiti Wienov zakon.

Poglavlje 18

Zametci kvantne fizike

Krajem 19. stoljeća, fizika je bila dobro utemeljena znanost koja je dobro opisivala pojave u Sve-miru. Newtonova mehanika objašnjavala je gibanja svih tijela, termodinamika je bila izvedena iz mehanike i dovela do otkrića novih strojeva koji su revolucionarno promijenili svijet, a Maxwellove jednadžbe ujedinile su elektricitet, magnetizam i optiku. Sve te teorije dobro su se uklapale u naše svakodnevno poimanje svijeta i davale su nova predviđanja koja su se mogla eksperimentalno pro-vjeriti. Preostalo je samo još nekoliko eksperimentalnih opažanja koja je trebalo objasniti u okviru postojećih teorija. Upravo pokušaji rješavanja tih nekoliko problema doveli su do revolucionarnih promjena u razmišljanjima znanstvenika te do otkrića sve više novih pojava koje nisu bile objašnjive u klasičnoj fizici poznatoj do početka 20. stoljeća. I dok je klasična fizika ostala korisna u opisi-vanju cijelog niza makroskopskih pojava, novo razvijena kvantna fizika bavi se nizom fenomena na atomskoj i subatomskoj razini. Međutim, iako je koncept kvantizacije prvenstveno značajan za mikroskopske sustave, posljedice kvantizacije mogu se makroskopski opaziti u pojavama kao što su toplinski kapacitet, zračenje crnog tijela ili supravodljivost i suprafluidnost.

U ovom poglavlju dat ćemo pregled nekoliko eksperimenata čije objašnjenje je dovelo do razvoja kvantne teorije.

18.1 Dvojna priroda svjetlosti

18.1.1 Zračenje crnog tijela

Opažanja vezana uz zračenje crnog tijela detaljno smo opisali u prošlom poglavlju. Upravo je Planckov prijedlog za objašnjenje spektralne raspodjele zračenja crnog tijela bio prvi dokaz da se energija u neki sustav može dodavati samo u konačnim iznosima – kvantima. Planck je uveo i prirodnu konstantu $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ koja definira iznos kvanta energije za neki sustav. Sam Planck nije bio zadovoljan svojim rješenjem problema – smatrao ga je očajničkim pokušajem nakon što nije uspio naći rješenje unutar postojećih postulata klasične fizike.

18.1.2 Toplinski kapacitet

Eksperimentalni rezultati za toplinski kapacitet plinova i krutina predstavljali su jedan od najsta-rijih neriješenih problema klasične fizike. Maxwell, koji je bio utemeljitelj kinetičke teorije plinova, uočio je da eksperimentalno opažanje za toplinski kapacitet dvoatomnih plinova ($C_V = \frac{5}{2}nR$) nije u skladu s teorijskim predviđanjem ($C_V = \frac{7}{2}nR$), ali nije mogao pronaći pogrešku u teoriji. Nekoliko godina kasnije otkrivene su nove anomalije u toplinskim kapacitetima krutina. Klasično predviđanje toplinskog kapaciteta krutina i plinova opisali smo u odjeljku 5.3. Dulong-Petitov zakon predviđa da će toplinski kapacitet svih krutina iznositi $C_V = 3nR$ i to predviđanje potvrđeno je svim eksperimen-talnim opažanjima početkom 19. stoljeća, koja su uglavnom obavljena na sobnim temperaturama. Međutim, kako su se razvijale tehnike ukapljivanja plinova, eksperimenti su provedeni na sve nižim temperaturama i sve su češći bili dokazi odstupanja od Dulong- Petitovog zakona.

Ključni doprinos u objašnjenju ovog odstupanja dao je Einstein 1907. godine prijedlogom da se kvantizacija mora primijeniti ne samo na elektromagnetsko zračenje, nego na svaki oscilirajući sustav. Dulong-Petitov izraz za unutarnju energiju krutina (5.23), može se pisati

$$E = 3N\bar{E}_1, \quad (18.1)$$

gdje je \bar{E}_1 prosječna energija jednodimenzionalnog harmonijskog oscilatora, za koju ekviparticijski teorem predviđa (dva stupnja slobode) $\bar{E}_1 = k_B T$ bez obzira na frekvenciju oscilacija. Einstein je primijenio Planckovo razmišljanje da prosječna energija oscilatora (17.10) mora ovisiti o frekvenciji, i da se svakom oscilatoru energija može dodavati samo u kvantima $h\nu$. Uz tu pretpostavku, unutarnja energija krutine koja sadrži harmonijske oscilatore karakteristične frekvencije ν iznosi

$$E = 3N \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T}} - 1}. \quad (18.2)$$

Derivacija ovog izraza po temperaturi dat će toplinski kapacitet C_V koji je u skladu s eksperimentalnim opažanjima.

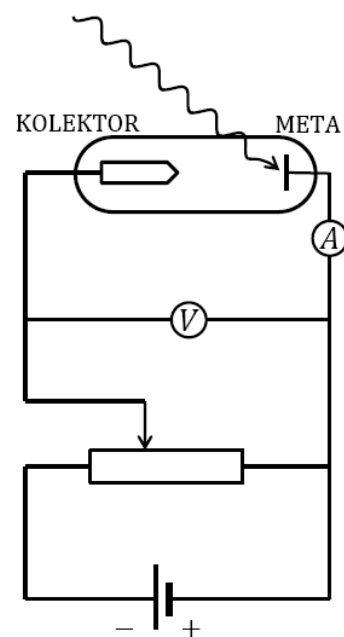
Toplinski kapacitet dvoatomnih plinova trebao bi, kako je Maxwell ispravno uočio, prema ekviparticijskom teoremu iznositi $C_V = \frac{7}{2}nR$. Naime, svaka molekula plina ima sedam stupnjeva slobode – kvadratičnih članova u energiji: tri translacijska kinetička člana, dva rotacijska kinetička člana te dva stupnja slobode za oscilacije udaljenosti atoma (kinetički i potencijalni član u energiji harmonijskog oscilatora). Međutim, budući da su karakteristične frekvencije tih oscilacija toliko visoke da vrijedi $h \gg k_B T$, vibracijski modovi molekule su vrlo rijetko pobuđeni na sobnoj temperaturi. Stoga kažemo da su vibracijski stupnjevi slobode "zamrznuti" pa molekula na sobnoj temperaturi ima samo 5 stupnjeva slobode. To se ne bi događalo kad bi se harmonijskom oscilatoru mogla dodati proizvoljno mala količina energije, tj. kad bi Planckova konstanta h bila jednaka nuli.

18.1.3 Fotoelektrični efekt

Prilikom eksperimenta u kojem je prvi put generirao elektromagnetske valove 1887. godine, Heinrich Hertz je uočio da detektorska ploča ponekad iskri i da je to iskrenje učestalije ako je osvijetljena. Kasnije se pokazalo da iskrenje u stvari predstavlja izbacivanje elektrona, a Hertzovi studenti su nastavili proučavati pojavu aparaturom koja je ovdje shematski prikazana.

U eksperimentu je moguće varirati napon na kolektoru. Budući da je napon negativan, on će usporavati elektrone koji se približavaju te će na njega doći samo oni elektroni koji imaju dovoljno kinetičke energije da savladaju taj napon. Rezultati istraživanja mogu se pobrojati u ovih nekoliko tvrdnji:

- Elektroni se emitiraju iz osvijetljene površine (nazivamo ih fotoelektronima).
- Fotoelektroni se emitiraju trenutno, bez obzira koliko slab bio intenzitet upadne svjetlosti.
- Postoji granična frekvencija svjetlosti ν_c ispod koje neće biti emitiranih fotoelektrona bez obzira na intenzitet svjetlosnog zračenja.
- Ako je frekvencija svjetlosti veća od ν_c , postoji maksimalna kinetička energija fotoelektrona, koja se određuje naponom na kolektoru. Ta maksimalna kinetička energija je linearna funkcija frekvencije zračenja.



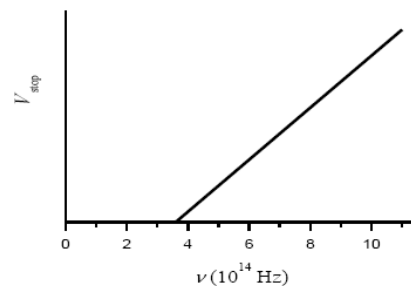
- Ako je frekvencija svjetlosti veća od ν_c , broj emitiranih elektrona proporcionalan je intenzitetu svjetlosti.

Maksimalna kinetička energija elektrona emitiranih iz osvijetljene površine može se mjeriti naponom na kolektoru V_{stop} na kojem prestaje struja prema relaciji

$$e \cdot V_{\text{stop}} = E_{k\text{max}} \quad (18.3)$$

Eksperimentom je utvrđena ovisnost tog napona o frekvenciji svjetlosnog zračenja kako je prikazano na slici:

$$E_{k\text{max}} = e \cdot V_{\text{stop}} = h\nu - \phi \quad , \quad (18.4)$$



pri čemu je ϕ izlazni rad elektrona iz mete. Izlazni rad ovisi o materijalu od kojeg je meta načinjena. Sva ova opažanja teško se mogu objasniti u sklopu klasične teorije elektromagnetskog zračenja. Rješenje je opet dao Einstein 1905. godine¹ i za to otkriće dobio je Nobelovu nagradu 1922. godine: *”Energija koja se zrači iz točkastog izvora nije uniformno raspodijeljena po sve većem prostoru, nego se ta energija sastoji od konačnog broja prostorno lokaliziranih kvantata energije koji se gibaju bez dijeljenja i mogu biti stvoreni ili apsorbirani samo kao cijele jedinice”*

Te cijele jedinice danas zovemo *fotoni* koje možemo smatrati ”česticama svjetlosti”.

18.1.4 Zakočno zračenje

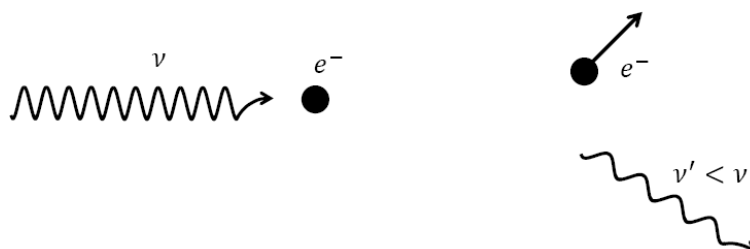
Kada u rendgenskoj katodnoj cijevi elektroni bivaju ubrzani naponom V_A , njihova kinetička energija prije udara u anodu iznosi $e \cdot V_A$. Elektroni se u anodi naglo zaustavljaju, a to uzrokuje elektromagnetsko zračenje koje nazivamo rendgensko zračenje. To zračenje u pravilu ima kontinuirani spektar (uz nekoliko oštih vrhova), ali uvijek postoji najmanja valna duljina emitiranog zračenja koja je ovisna o naponu V_A :

$$\lambda_c = \frac{hc}{eV_A} \quad . \quad (18.5)$$

Zračenje te valne duljine postiže se kada se sva kinetička energija elektrona pretvori u energiju jednog fotona. Ova pojava u stvari je inverzni fotoelektrični efekt.

18.1.5 Comptonovo raspršenje

Možda najuvjerljiviji eksperiment koji pokazuje čestičnu prirodu svjetlosti izveo je A. H. Compton. Ako elektromagnetska energija putuje kao struja fotona i ako su ti fotoni čestice, onda bi i te čestice u sudaru s elektronom trebale zadovoljavati zakone očuvanja količine gibanja i energije.



Na slici je prikazan tipičan događaj sudara. Neka foton valne duljine λ_i udara u mirujućeg elektrona. Nakon sudara elektron će odletjeti pod nekim kutom φ , a foton će se odbiti pod kutom ϑ . Energija odbijenog fotona mora biti manja od energije upadnog fotona jer je dio energije pretvoren

¹rad je tiskan 1906. godine: A. Einstein, *Ann. d. Phys.* **20**, 199 (1906).

u kinetičku energiju elektrona, što znači da će valna duljina izlaznog fotona λ_f biti veća od λ_i . Osim toga, mora vrijediti zakon očuvanja ukupne količine gibanja po komponentama – u smjeru ulaznog fotona i u smjeru okomitom na ulazni foton. Iz ovih uvjeta lako se može pokazati da foton posjeduje količinu gibanja

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad . \quad (18.6)$$

Budući da je količina gibanja vektorska veličina, možemo pisati $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, pri čemu je \vec{k} valni vektor.

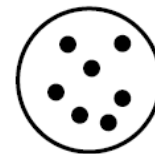
18.1.6 Svjetlost je val i čestica

U poglavlju o elektromagnetskim valovima nedvojbeno smo pokazali valnu prirodu svjetlosti, što se pokazuje pojavama interferencije i difrakcije u poglavlju o fizikalnoj optici. S druge strane, pokusi opisani u ovom odjeljku jasno pokazuju da je energija elektromagnetskog zračenja kvantizirana i da se kvanti te energije u međudjelovanju s materijom ponašaju kao čestice koje imaju svoju količinu gibanja i energiju.

Ovu dualnu prirodu svjetlosti nazivamo principom komplementarnosti: prilikom širenja u prostoru, svjetlost se ponaša kao val, a prilikom emisije ili apsorpcije, svjetlost pokazuje svoju čestičnu prirodu.

18.2 Rutherfordov atom

Krajem 19. i početkom 20. stoljeća otkriveno je postojanje elektrona te je određena njegova masa i elementarni naboj. Budući da je većina materije električki neutralna, postojale su razne ideje o tome kako izgleda striktra atoma, tj. kako izgleda pozitivna pozadina koja neutralizira negativan naboj u atomu. Vrlo je popularna bila slika o homogeno raspodijeljenom pozitivnom naboju u koji su uronjeni negativno nabijeni elektroni. Model je nazvan "puding od šljiva" u kojem homogena pozitivna pozadina predstavlja puding, a u nju umetnute šljive predstavljaju elektrone.



Početkom 20. stoljeća poznato je bilo da se α -zračenje sastoji od pozitivno nabijenih čestica naboja $+2e$ i mase koja je oko 7000 puta veća od mase elektrona. Ernest Rutherford je 1909. godine pokrenuo pokus u kojem je trebalo tanke listiće zlata zračiti α -zrakama i promatrati kako će se one otklanjati. Prema modelu "pudinga", očekivalo se da će te zrake prolaziti kroz listiće zlata bez velikog skretanja. Naime, čestice velike mase i brzine prolazile bi kroz želatinozni materijal, a ako bi se slučajno i sudarile sa 7000 puta lakšim elektronom, to ih ne bi mnogo skrenulo s puta.

Na veliko Rutherfordovo čuđenje, pokus je pokazao da se određeni broj čestica odbija unatrag prema izvoru, kao da su udarile u mnogo masivniji predmet. Ovaj pokus smatra se začetkom nuklearne fizike, jer je postalo jasno da se masa atoma koncentrira na vrlo malom radijusu – u atomskoj jezgri, koja je pozitivno nabijena.



Dokaz da se atom sastoji od masivne pozitivno nabijene jezgre i od negativno nabijenih elektrona male mase koji su na velikoj udaljenosti od jezgre, definitivno je odbacio Thomsonov model atoma (puding od šljiva). Logičan novi prijedlog za model atoma bio je "planetarni model" u kojem elektroni kruže oko jezgre kao što planeti kruže oko Sunca. Međutim, taj model ima jednu poteškoću ako se promatra u okviru klasične fizike. Brzina kruženja elektrona je takva da ulogu centripetalne sile predstavlja Coulombova sila. Nabijeni elektroni se, dakle, cijelo vrijeme ubrzano gibaju, a to znači da zrače elektromagnetsko zračenje. Time gube energiju i nakon nekog vremena bi trebali pasti na jezgru i neutralizirati ju. Budući da znamo da se udaljenost elektrona od jezgre uglavnom ne mijenja u vremenu, a k tome ne opažamo elektromagnetsko zračenje iz stabilnih atoma, bilo je potrebno objasniti ovo odstupanje od klasičnog predviđanja.

18.3 Bohrov model atoma

Rutherfordov planetarni model atoma bio je mehanički stabilan, ali elektromagnetski nestabilan u okviru klasične fizike. Da bi objasnio stabilnost atoma, Niels Bohr je pokušao pomiriti Planckovu ideju kvantizacije energije i Rutherfordov planetarni model uvodeći četiri postulata koja bi trebala vrijediti na razini atoma:

- Dinamička ravnoteža sustava jezgra–elektron podvrgava se Newtonovoj mehanici.
- Elektroni mogu postojati samo u određenim posebnim putanjama oko jezgre. One se zovu *stacionarne putanje* ili *stacionarna stanja*. Pritom ne zrače elektromagnetske valove.
- Kutna količina gibanja elektrona u nekoj stacionarnoj putanji je cjelobrojni višekratnik reducirane Planckove konstante $\hbar = h/2\pi$:

$$L = n \cdot \hbar \quad . \quad (18.7)$$

- Elektron iz jedne putanje u drugu može prijeći samo **kvantnim skokom** emitirajući (ili primajući) foton energije

$$\Delta E = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega \quad . \quad (18.8)$$

Ovi postulati uveli su revolucionarnu promjenu u razmišljanjima o dotad prihvaćenim dogmama. Teško da bi bili prihvaćeni da nisu savršeno opisivali sve dotad poznate eksperimente, posebno spektralne linije vodikovog atoma. Danas znamo da niti Bohr nije bio dovoljno revolucionaran te 1913. godine. Njegovi postulati zadržali su klasičan pojam *putanje*. Kasnijim filozofskim raspravama, a posebno novim eksperimentima, pokazalo se da će fizičari morati odustati i od tog koncepta klasične fizike.

Pogledajmo kako je Bohr, koristeći svoje postulate, izračunao radijus vodikova atoma, energije elektrona u atomu i spektralne linije. Kutna količina gibanja $L = r \cdot p = m \cdot v \cdot r$ mora prema trećem postulatu biti kvantizirana. Veza između brzine elektrona u n -toj putanji i radijusa te iste putanje prema tome mora biti:

$$v = \frac{n \cdot \hbar}{r \cdot m} \quad . \quad (18.9)$$

Za stabilnost kružne putanje moramo izjednačiti Coulombovu silu s centripetalnom silom

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad . \quad (18.10)$$

To nam daje izraz za radijus n -te putanje

$$r_n = a_0 n^2 \quad , \quad (18.11)$$

pri čemu konstantu

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{m} \quad (18.12)$$

nazivamo *Bohrov radijus* vodikova atoma. Izraz za brzinu elektrona na n -toj putanji je

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar n} \quad (18.13)$$

pa je kinetička energija elektrona u n -toj putanji

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{me^4}{2 \cdot (4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = E_0 \cdot \frac{1}{n^2} \quad . \quad (18.14)$$

Istodobno je potencijalna energija elektrona na udaljenosti r_m od jezgre

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -2 \cdot E_k \quad (18.15)$$

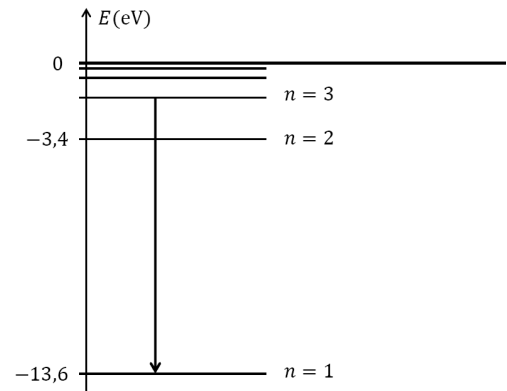
pa je ukupna energija

$$E = E_k + E_p = -\frac{E_0}{n^2} \quad , \quad (18.16)$$

a za atom vodika vrijedi

$$E_0 = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} \quad . \quad (18.17)$$

Elektron je u atomu u vezanom stanju pa je njegova energija negativna. Energetski nivoi za nekoliko najnižih energijskih nivoa prikazani su na slici. Za velike n , energijski nivoi su vrlo bliski, gotovo kontinuirani. Praktično je moguće da elektron posjeduje bilo koju energiju u tom području – gubi se efekt kvantizacije. Ovdje se prvi puta susrećemo s principom *korespondencije kvantne i klasične fizike*. Uvijek kad u kvantnoj fizici promatramo stanja s velikim n , možemo zanemariti kvantne efekte i sustav se ponaša "klasično". Ovaj princip postulirao je Bohr sljedećim iskazom: "Dinamika nekog sustava opisanog kvantnom teorijom mora se slagati s klasičnim opisom tog sustava u granici velikih kvantnih brojeva".



Ako elektron ima pozitivnu energiju, on nije vezan uz jezgru, nego se može slobodno udaljiti. Tada kažemo da dolazi do ionizacije.

Vratimo se na slučaj malih kvantnih brojeva n . Bohr je postulirao da su prijelazi između stacionarnih stanja mogući samo u kvantnim skokovima pri čemu se emitira (ili apsorbira) foton točno određene energije koja odgovara razlici energija početnog i konačnog stacionarnog stanja:

$$h\nu = E_i + E_f = E_0 \cdot \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad , \quad (18.18)$$

pri čemu indeks i označava početno (inicijalno) stanje, a indeks f konačno (finalno) stanje. Ovime je Bohr objasnio dotad opažene spektre vodikova atoma iz Balmerove serije ($n_f = 2$) i iz Paschenove serije ($n_f = 3$). Štoviše, predvidio je postojanje serija spektralnih linija za $n_f = 1$ (kasnije nazvana Lymanova serija) i za $n_f = 4$ (kasnije nazvana Bracketova serija).

18.4 Valna priroda čestica

Francuski fizičar vojvoda de Broglie sugerirao je 1924. godine da bi zbog simetrije u prirodi čestice trebale pokazivati valno ponašanje. Naime, tada je bila već općeprihvaćena dvojna priroda elektromagnetskog zračenja – svjetlost pokazuje valnu prirodu prilikom prostiranja, što se očituje u interferenciji i difrakciji i općenito poštivanju Huygensovog principa. S druge strane, Planck i Einstein su pokazali da je energija svjetlosne zrake kvantizirana i da kvanti svjetlosti – fotoni – posjeduju energiju $E = h\nu$ i količinu gibanja $p = E/c$. Dakle za foton vrijedi

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad . \quad (18.19)$$

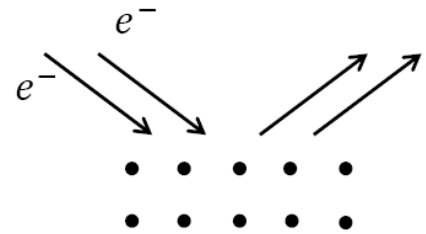
Prema de Broglievoj sugestiji, ako neka čestica posjeduje količinu gibanja p , onda bi ona morala imati valnu duljinu

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad . \quad (18.20)$$

Premda je ova ideja bila vrlo elegantna i primamljiva, ona ne bi bila općeprihvaćena da nije uslijedila njezina eksperimentalna potvrda. Već je bilo poznato da se rendgenske zrake, čije valne duljine su usporedive s veličinom jedinične ćelije u kristalima, raspršuju na kristalnoj rešetki i stvaraju interferencijske uzorke na detektoru. Ako se elektroni pri kretanju uistinu ponašaju kao valovi, trebalo je odrediti koliku kinetičku energiju oni moraju imati da bi im valna duljina bila usporediva s razmakom atoma u kristalu. Iz izraza za kinetičku energiju

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \quad (18.21)$$

lako je izračunati da je potrebna kinetička energija reda veličine 100 eV. Eksperimente koji pokazuju difrakcijske efekte prilikom refleksije elektrona od kristalne rešetke izveli su 1927. godine neovisno C. J. Davisson i G. P. Thomson, za što su dobili Nobelovu nagradu 1937. godine.



Ovim eksperimentima postalo je jasno da i elektromagnetski valovi i materijalne čestice imaju dualnu valno-čestičnu prirodu. Međutim, hoćemo li opaziti čestična ili valna svojstva, ovisi o prirodi samoga eksperimenta. Niels Bohr formulirao je *načelo komplementarnosti*: Valna i čestična priroda kvantnih objekata ne dolaze do izražaja istodobno, već je njihovo opažanje određeno samim pokusom kojim promatramo pojave.

18.5 Heisenbergove relacije neodređenosti

Werner Heisenberg formulirao je *princip neodređenosti* koji kaže:

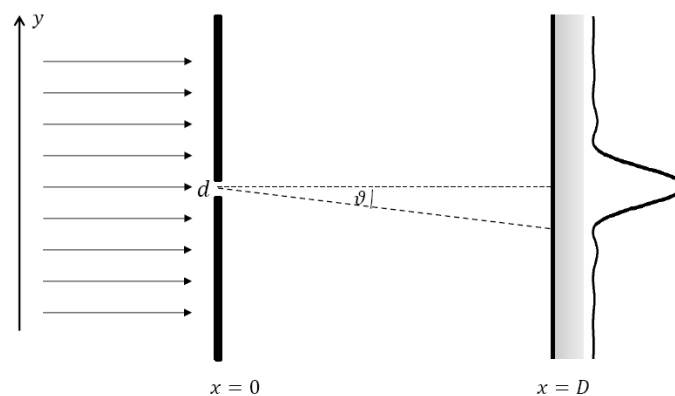
U principu je nemoguće istodobno precizno odrediti položaj i količinu gibanja neke čestice.

Ako označimo s Δx i Δp_x neodređenosti koordinate i odgovarajuće količine gibanja, princip neodređenosti zahtijeva da bude zadovoljena nejednakost

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} . \quad (18.22)$$

Premda je ovaj princip protivan našem svakodnevnom iskustvu i klasičnoj Newtonovoj mehanici, on je izravna posljedica valne prirode čestica.

Kao primjer, zamislimo da šaljemo paralelan snop čestica čija količina gibanja je p_x kroz uzak prorez kao na slici. Prorez je na mjestu $x = 0$, a njegova širina je d . To znači da položaj čestica u trenutku prolaza kroz prorez možemo odrediti do na $\Delta y = d$. Kad bi se čestice ponašale klasično,



one bi udarale u zaslon na udaljenosti $x = D$ unutar uske pruge širine d . Međutim, ako se čestice ponašaju kao val, na zaslonu će se pojaviti difrakcijski uzorak čiji središnji maksimum ima širinu određenu kutom 2ϑ . Za difrakciju valova znamo da vrijedi

$$\sin \vartheta \approx \vartheta = \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{\Delta y} \quad . \quad (18.23)$$

S druge strane, kut ϑ određen je neodređenošću količine gibanja Δp_y na izlazu iz proreza:

$$\operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta = \frac{\Delta p_y}{p_x} \quad . \quad (18.24)$$

Prema de Broglievoj relaciji je $\lambda = h/p_x$ pa kombinacijom ovih relacija dobivamo

$$\Delta y \Delta p_y = h \quad , \quad (18.25)$$

što je konzistentno s relacijom neodređenosti (18.22).

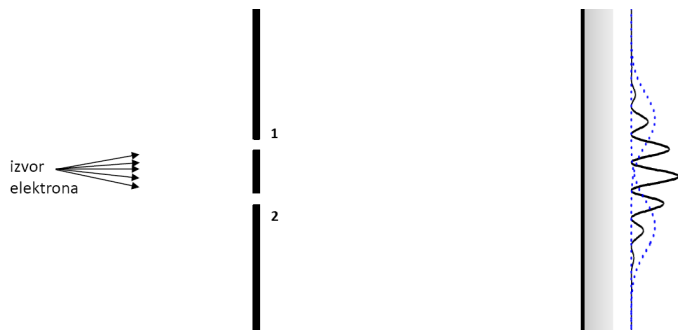
Relacije neodređenosti možemo specificirati i za druge tzv. konjugirane koordinate, kao što su energija i vrijeme:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (18.26)$$

ili za kutnu količinu gibanja L i kut φ i sl.

18.5.1 Gedanken eksperiment

Promotrimo zamišljeni eksperiment difrakcije elektrona na dvije pukotine. Kada elektron nailazi na pukotine, mi ne znamo kroz koju od njih će proći. Kao rezultat, na zastoru dobivamo difrakcijsku interferentnu sliku (skicirana punom crtom). Zatvorimo li jednu od dvije pukotine, znat ćemo da je elektron prošao kroz onu drugu. Međutim, na zastoru će se pojaviti slika koja nije interferentna (skicirana jednom od točkastih crta).



Zamislimo da sada provodimo eksperiment s dvije otvorene pukotine i da između njih na izlazu postavimo promatrača koji će bilježiti kroz koju pukotinu je elektron prošao. U takvom eksperimentu dobit ćemo dva maksimuma koja su zbroj neinterferentnih slika prolazaka kroz pojedinačne pukotine. Ovaj paradoks možemo objasniti time da je promatrač prilikom opažanja prolaska elektrona kroz pukotinu morao koristiti svjetlo koje se sastoji od fotona. Foton koji je djelovao s elektronom prenio mu je dio svoje količine gibanja $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ i tako promijenio sam eksperiment. Ovu zamku mogli bismo izbjeći da za promatranje koristimo fotone toliko malih energija (i malih količina gibanja) da ne mogu utjecati na eksperiment. Međutim, valne duljine takvih fotona su veće od razmaka pukotina i takvo promatranje nam ne omogućuje određivanje podatka kroz koju pukotinu je elektron prošao. Ovaj zamišljeni (njem. *gedanken*) eksperiment zorno opisuje značenje relacija neodređenosti.

18.5.2 Valni paket

Zamislimo da promatramo česticu koja se giba u x -smjeru količinom gibanja p_x . Ako je p_x točno određen, onda je prema De Broglievoj relaciji, točno određena i valna duljina λ , odnosno valni

vektor $k = k_x$. Čestica bi bila predstavljena čistim sinusnim valom $u(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$. Takav val proteže se u beskonačnost pa ne bismo imali informaciju o položaju čestice – bila bi potpuno delokalizirana. Naravno, to je jedna od manifestacija principa neodređenosti. Međutim, ako bismo željeli prikazati česticu koja je donekle lokalizirana, onda moramo konstruirati *valni paket*.

Valni paket nastaje kao superpozicija mnogo valova bliskih valnih vektora:

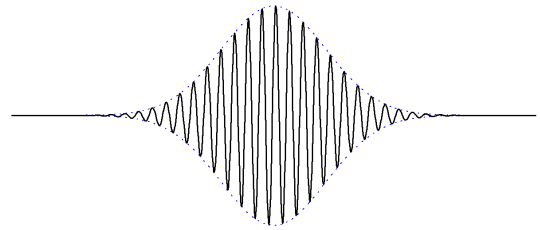
$$u(x, t) = \sum A_i \sin(k_i x - \omega_i t) \quad , \quad (18.27)$$

odnosno, ako su razlike između susjednih valnih vektora male, sumu možemo aproksimirati integralom:

$$u(x, t) = \int A(k) \sin(kx - \omega t) dk \quad . \quad (18.28)$$

Amplituda ovisi o valnom vektoru tako da ima maksimum za onaj valni vektor k_0 koji odgovara najvjerojatnijem iznosu količine gibanja. Najčešći primjer je *Gaussov* valni paket u kojem je amplituda dana s

$$A(k) = \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{2(\Delta k)^2} \right] \quad . \quad (18.29)$$



Kao rezultat, u trenutku $t = 0$ valna funkcija ima oblik

$$u(x, 0) = \sqrt{2\pi} \Delta k \exp \left[-\frac{(\Delta k \cdot x)^2}{2} \right] \sin k_0 x \quad (18.30)$$

koji je prikazan na slici.

Poglavlje 19

Kvantna fizika

Na osnovu niza eksperimentalnih činjenica oje smo opisali u prošlom poglavlju postalo je jasno da je potrebno razviti sasvim novu teoriju koja će opisivati pojave na atomskim skalama. Pokazalo se da svjetlost ima dvojni prirodu – valnu i čestičnu. Isto tako su materijalne čestice pokazuju dvojni prirodu. Zbog relacija neodređenosti, postaje upitan klasičan pojam putanje koji pretpostavlja da nekom tijelu možemo istodobno odrediti položaj i brzinu. Samim time dovodi se u pitanje i Bohrov model atoma, koji je u začetcima kvantne fizike uspješno objasnio spektre vodikova atoma.

Nova teorija morala se postulirati na isti način kao što je Newton postulirao zakone klasične mehanike. Newtonovi zakoni nisu izvedeni iz nekih drugih principa, ali njihova valjanost potvrđuje se u uspješnosti opisivanja prirodnih pojava. Tako je i sada trebalo razviti matematički formalizam koji bi opisivao valove materije na sličan način kao što su Maxwelllove jednačbe opisivale elektromagnetske valove. Trebalo je postaviti vezu između takvih valnih polja za čestice i fizičkih observabli – mjerljivih veličina – kao što su energija, položaj, količina gibanja ili zamah. Trebalo je postulirati kako valovi materije interagiraju s okolinom, kako uvesti poznate sile kao što su Coulombova, gravitacijska i sl.

Novi zakoni moraju makroskopski davati iste rezultate kao Newtonovi zakoni, a mikroskopski dobro opisivati valnu i čestičnu dualnost. Ne možemo dobro definirati putanju čestice, ali ćemo željeti moći predvidjeti vjerojatnost da se čestica nađe na nekom položaju ili u nekom stanju.

Za opisivanje čestica u novoj teoriji služiti će VALNA FUNKCIJA koju ćemo označiti sa

$$\Psi(\vec{r}, t)$$

Valna funkcija općenito može biti kompleksan broj, jer ona sama nema mjerljivo fizikalno značenje. Interpretaciju valne funkcije dao je Max Born: Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ predstavlja mjeru vjerojatnosti da se čestica nađe na nekom mjestu u nekom trenutku. Točnije, to predstavlja gustoću vjerojatnosti. Infinitesimalna vjerojatnost da se čestica nađe u djeliću volumena dV iznosi

$$dP = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \cdot dV \quad . \quad (19.1)$$

Ukupna vjerojatnost da se čestica nađe u volumenu V je

$$P = \int_V |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \cdot dV \quad . \quad (19.2)$$

Radi jednostavnosti razmatrat ćemo za početak jednodimenzionalne sustave, a kasnije ćemo razmatranja proširiti na tri dimenzije. Matematički, valna funkcija treba biti rješenje valne jednačbe oblika

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad , \quad (19.3)$$

a jedno od rješenja je

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad , \quad (19.4)$$

pri čemu mora vrijediti odnos

$$\omega = vk \quad (19.5)$$

koji znamo pod nazivom disperzijska relacija.

19.1 Schrödingerova jednadžba

Austrijski fizičar Werner Schrödinger postulirao je temeljnu jednadžbu kvantne fizike. Pritom je morao voditi računa o nekoliko činjenica:

- Jednadžba mora biti konzistentna s klasičnom valnom jednadžbom, ali i s Planck-Einsteinovom relacijom $E = \hbar \cdot \omega$, s de Broglievom relacijom $\lambda = h/p$ i s Heisenbergovim relacijama neodređenosti.
- Jednadžba mora poštivati zakon očuvanja energije – u protivnom bi se ne bi mogla postići konzistentnost s makroskopskim zakonima.
- Potrebno je očuvati princip superpozicije. To znači da jednadžba mora biti linearna u Ψ , $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ i $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$.
- Valna funkcija mora imati **konačni integral** preko cijelog prostora. Valna funkcija i prva derivacija moraju biti kontinuirane.

19.1.1 Operatori

Uočimo da deriviranje valne funkcije (19.4) po vremenu donosi prefaktor $-i\omega$, a deriviranje po x -koordinati donosi prefaktor ik . To nam omogućuje da napišemo relacije oblika:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hbar\omega\Psi = E\Psi \quad (19.6)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \hbar k\Psi = p\Psi \quad (19.7)$$

Ove dvije jednadžbe su oblika

$$(\text{diferencijalni operator})\Psi = (\text{konstanta}) \cdot \Psi \quad .$$

Operator je "uputa" kako treba djelovati na valnu funkciju da bi se dobila neka dinamička veličina. Tako možemo definirati operator energije, operator količine gibanja, operator položaja itd. Da bismo ih razlikovali od fizikalnih veličina, operatore ćemo označiti s oznakom "kapa", kao npr \hat{E} . Identificirajmo neke od operatora:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (19.8)$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (19.9)$$

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla \quad (19.10)$$

$$\hat{x} = x \quad (19.11)$$

$$\hat{\vec{r}} = \vec{r} \quad (19.12)$$

Uočimo da smo operatore položaja izjednačili s koordinatama, tj. ovi operatori djelujući na valnu funkciju ništa ne mijenjaju.

19.1.2 Postuliranje Schrödingerove jednadžbe

Vodeći se ovim pridruživanjem operatora fizikalnim veličinama, možemo postulirati valnu jednadžbu za kvantne valne funkcije. Polazimo od zakona očuvanja energije. U slučajevima kada se u klasičnoj jednadžbi neka fizikalna veličina pojavljuje kvadrirana, u našoj valnoj jednadžbi to će značiti da se odgovarajući operator primjenjuje dvaput uzastopce.

Ako promatramo slobodnu česticu koja posjeduje samo kinetičku energiju, klasična relacija glasi

$$\frac{p^2}{2m} = E \quad , \quad (19.13)$$

a valna jednadžba će glasiti

$$\frac{1}{2m} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \quad , \quad (19.14)$$

odnosno

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad . \quad (19.15)$$

Ako čestica uz kinetičku energiju posjeduje i potencijalnu energiju, tj. nalazi se u potencijalu $U(x, t)$, klasični izraz za energiju glasi

$$\frac{p^2}{2m} + U = E \quad , \quad (19.16)$$

dok će valna jednadžba glasiti

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x, t) \right] \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) \quad . \quad (19.17)$$

Jednadžba (19.17) naziva se Schrödingerova jednadžba u jednoj dimenziji. Ako želimo rješavati trodimenzionalne probleme, potencijal će ovisiti o položaju $-U(\vec{r}, t)$, a količina gibanja će imati tri komponente $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. Schrödingerova jednadžba u tri dimenzije glasi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad , \quad (19.18)$$

pri čemu ∇^2 predstavlja diferencijalni operator

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad .$$

Operator s lijeve strane jednadžbe (19.17) ili (19.18) često se skraćeno piše u obliku

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) \quad , \quad (19.19)$$

gdje \mathcal{H} nazivamo hamiltonijanom. Schrödingerova jednadžba sada poprima jednostavni oblik

$$\mathcal{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \quad . \quad (19.20)$$

19.1.3 Vremenski neovisna Schrödingerova jednadžba

U mnogim slučajevima proučavamo čestice u stacionarnim potencijalima kada možemo pisati $U(x)$, tj. U ne ovisi o vremenu. U takvim slučajevima rješavanje Schrödingerove jednadžbe (19.17) postaje jednostavnije. Pokazuje se da sva rješenja $\Psi(x, t)$ takve jednadžbe možemo pisati u obliku umnoška

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \cdot \varphi(t) \quad . \quad (19.21)$$

Ovakav postupak zove se *SEPARACIJA VARIJABLI*. Funkciju koja ovisi o dvije varijable razdvojili smo na dvije funkcije koje ovise svaka o jednoj varijabli.¹ Uvrstimo sada ovako napisanu valnu funkciju (19.17) i dobivamo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi(t) \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \varphi(t) \cdot U(x) \cdot \psi(x) = \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) \right] \cdot \psi(x) \quad . \quad (19.22)$$

Nakon malo sređivanja ova relacija se može pisati

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x) = \frac{1}{\varphi(t)} \cdot i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) \quad . \quad (19.23)$$

Ovdje možemo uočiti da je s lijeve strane jednakosti izraz koji ovisi samo o položaju, a s desne strane izraz koji ovisi samo o vremenu. Budući da jednadžba mora vrijediti u svakom trenutku i na svakom položaju, jedini način da se to postigne je da obje strane budu jednake istoj konstanti. Budući da je s desne strane operator energije, postavljamo da je ta konstanta jednaka energiji i dolazimo do vremenski neovisne Schrödingerove jednadžbe:

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi \quad . \quad (19.24)$$

19.1.4 Postupak rješavanja

Za pronalaženje valne funkcije koja će opisivati kvantno ponašanje neke čestice, potrebno je učiniti nekoliko koraka:

- Prepoznati pravi potencijal $U(\vec{r}, t)$ koji dobro opisuje proučavani problem i postaviti jednadžbu.
- Pronaći valnu funkciju $\Psi(\vec{r}, t)$ koja je rješenje valne jednadžbe, ali pritom zadovoljava uvjete kontinuiranosti i konačnosti. To je moguće samo za neke vrijednosti energije. Te energije nazivamo svojstvenim energijama E_n – one daju uvjete kvantizacije. Za svaku E_n postoji određena $\Psi_n(\vec{r}, t)$ koju nazivamo svojstvenom valnom funkcijom.
- Normirati valne funkcije, vodeći računa o Bornovoj interpretaciji – kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije predstavlja gustoću vjerojatnosti. To znači da vjerojatnost nalaženja čestice bilo gdje u prostoru mora biti 1, odnosno

$$\int_V \Psi_n^* \cdot \Psi_n \cdot dV = 1 \quad . \quad (19.25)$$

19.1.5 Fizičke observable

Valne funkcije nisu mjerljive veličine pa stoga mogu biti kompleksne. Međutim, mi želimo predvidjeti neke mjerljive veličine kao što su položaj ili količina gibanja. Mjerljive veličine nazivamo *OBSERVABLE* – one ne mogu biti kompleksne. Jedna mjerljiva veličina je energija i nju dobivamo izravno rješavanjem Schrödingerove jednadžbe ako je ona vremenski neovisna. Princip neodređenosti ne dopušta nam da precizno odredimo položaj ili količinu gibanja neke čestice. Međutim, možemo odrediti *očekivanu vrijednost* neke observable. Neka je $F(x)$ neka observable, a $\hat{F}(x)$ operator koji odgovara toj observabli. Očekivanu vrijednost tražene observable $\langle F(x) \rangle$ za neku svojstvenu valnu funkciju dobit ćemo ovakvim integralom:

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(x) \cdot \hat{F}(x) \cdot \Psi_n(x) \cdot dx \quad . \quad (19.26)$$

¹Napomenimo da takav postupak ne bi bio moguć u općenitom slučaju vremenske ovisnosti potencijala.

Na primjeru količine gibanja p_x , sjetimo se da je operator količine gibanja $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ pa je očekivana vrijednost dana s

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \Psi(x) \cdot dx \quad . \quad (19.27)$$

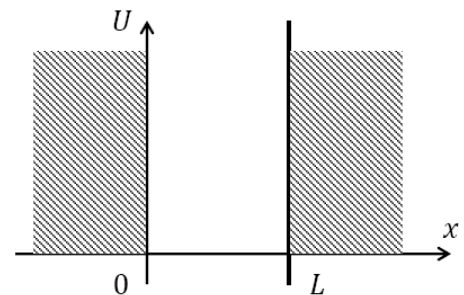
Operator unutar integrala djeluje samo na valnu funkciju koja mu je desno.

19.2 Beskonačno duboka potencijalna jama

Kao prvi primjer rješavanja Schrödingerove jednadžbe, rješit ćemo slučaj tzv. beskonačno duboke potencijalne jame. Taj primjer možemo zamisliti kao potencijal čestice u zatvorenoj (jednodimenzionalnoj) kutiji. Čestica se može slobodno gibati unutar kutije, a da bi iz nje izašla, trebala bi imati beskonačnu energiju.

Matematički, potencijal možemo pisati:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x \leq 0 \\ 0 & , \quad 0 < x < L \\ \infty & , \quad x \geq L \end{cases} \quad . \quad (19.28)$$



Ovaj potencijal treba uvrstiti u vremenski neovisnu Schrödingerovu jednadžbu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi = E\psi \quad . \quad (19.29)$$

Budući da imamo tri područja potencijala, jednadžbu rješavamo za svako područje, a onda postavimo uvjete da valna funkcija mora biti kontinuirana. Izvan jame (za $x < 0$ i za $x > L$) odmah možemo postaviti rješenje $\psi = 0$ jer bi u protivnom energija morala biti beskonačna. Preostaje nam riješiti valnu jednadžbu unutar jame ($0 \leq x \leq L$), gdje ne postoji potencijalni član. Tu jednadžbu sređivanjem možemo napisati u obliku

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \quad (19.30)$$

koji nam je već dobro poznat i znamo ga riješiti.

Rješenje bismo mogli napisati u kompleksnom obliku, ali jednako općenito rješenje je ono izraženo pomoću trigonometrijskih funkcija:

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad . \quad (19.31)$$

Konstante A , B i k moramo odrediti iz rubnih uvjeta. Za $x = 0$, rubni uvjet nam kaže

$$\psi(0) = 0 \quad ,$$

što za posljedicu ima iščezavanje konstante B :

$$B = 0 \quad .$$

Za $x = L$, rubni uvjet nam kaže

$$\psi(L) = 0 \quad ,$$

a to nam daje uvjet na moguće vrijednosti kutnog valnog broja

$$k \cdot L = n \cdot \pi \quad ,$$

pri čemu n mora biti cijeli broj. Dakle, svojstvena valna funkcija mora biti oblika

$$\psi_n(x) = A \sin k_n \cdot x = A \sin \frac{n\pi}{L} x \quad . \quad (19.32)$$

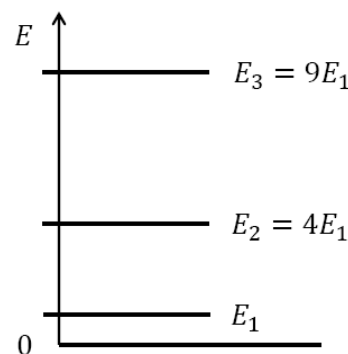
Uvrstimo li tu funkciju u valnu jednadžbu, dobit ćemo uvjet na kvantizaciju energije:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \cdot n^2 \quad . \quad (19.33)$$

Najniža moguća energija čestice – energija osnovnog stanja – iznosi

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L^2} \quad . \quad (19.34)$$

Na slici desno prikazan je energijski dijagram mogućih energija čestice u ovakvoj beskonačno dubokoj potencijalnoj jami.



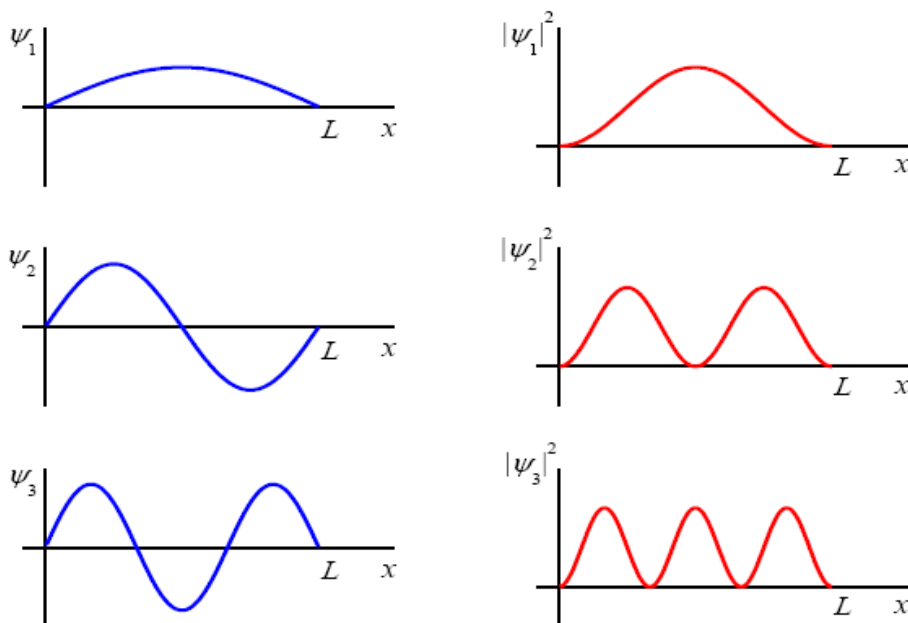
Preostaje nam još odrediti konstantu A u valnoj funkciji. Nju ćemo odrediti iz uvjeta normiranja

$$1 = \int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = A^2 \int_0^L \sin^2 \left(\frac{n\pi}{L} \cdot x \right) dx \quad . \quad (19.35)$$

Rezultat nam daje da mora vrijediti $A = \sqrt{2/L}$ pa potpuni izraz za svojstvene valne funkcije glasi:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad . \quad (19.36)$$

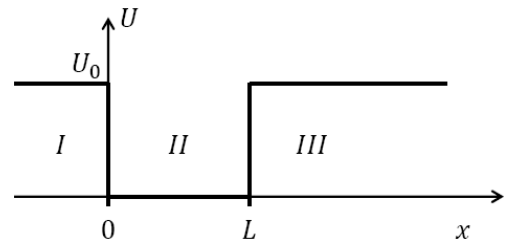
Na slici su prikazane prve tri svojstvene valne funkcije, kao i iz njih izračunate gustoće vjerojatnosti nalaženja čestice u prostoru jame.



19.3 Konačno duboka potencijalna jama

Sad ćemo razmotriti slučaj kada potencijal izvan zamišljene kutije nije beskonačan, nego iznosi U_0 . Potencijal ćemo pisati

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & , \quad x \leq 0 \\ 0 & , \quad 0 < x < L \\ U_0 & , \quad x \geq L \end{cases} . \quad (19.37)$$



Posebno će nas zanimati slučaj kad je energija čestice manja od visine potencijalne barijere ($E < U_0$). To je slučaj vezane čestice. Kada bismo problem promatrali klasično, čestica nikako ne bi mogla biti izvan područja $[0, L]^2$

Problem rješavamo kao i u prošlom slučaju po područjima. U području II (za $0 \leq x \leq L$) potencijal je nula i rješenja su oblika

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) + B \cos\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) . \quad (19.38)$$

Konstante A i B određujemo iz graničnih uvjeta, tj. iz zahtjeva da valna funkcija i njezina derivacija na rubu moraju biti kontinuirane. Stoga moramo riješiti valnu jednadžbu i u područjima I i III. U tim područjima valna jednadžba glasi

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)\psi = 0 . \quad (19.39)$$

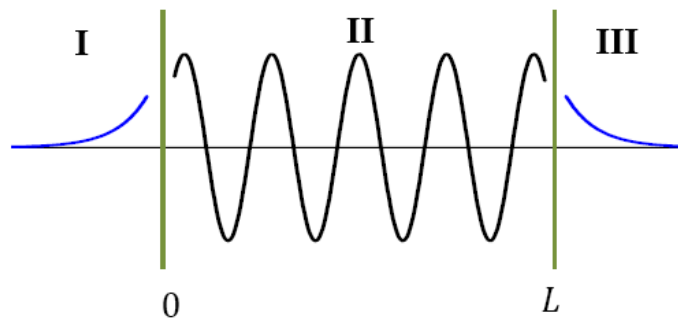
Za razliku od jednadžbe slobodnog harmonijskog oscilatora, ovdje je drugi član negativan pa opće rješenje nije linearna kombinacija oscilirajućih (sinus i kosinus) funkcija, nego linearna kombinacija eksponencijalnih funkcija:

$$\psi(x) = C \cdot e^{\kappa x} + D \cdot e^{-\kappa x} , \quad (19.40)$$

pri čemu je

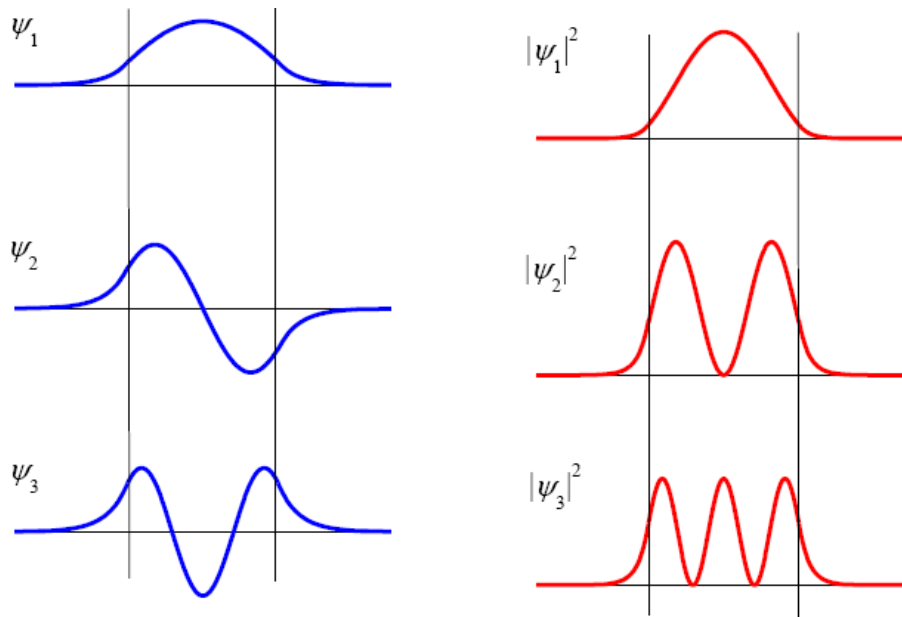
$$\kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} . \quad (19.41)$$

Konstante C i D odredit ćemo iz rubnih uvjeta. Za područje I iznos valne funkcije mora iščezavati kada $x \rightarrow -\infty$. To znači da u tom području mora biti $D = 0$. Slično, u području III iznos valne funkcije mora iščezavati kada $x \rightarrow +\infty$ pa u tom području mora biti $C = 0$. Na slici je prikazana skica valnih funkcija u tri područja. Da bi rješenja bila valjana, valne funkcije i njihove derivacije moraju biti kontinuirane na granicama područja. To će nam dati uvjete kvantizacije.



²Klasični analogon ovog primjera bio bi voda u bazenu. Ako je razina vode ispod ruba bazena, voda nikako neće moći izaći iz bazena. Međutim, u kvantnoj fizici postoji određena vjerojatnost da čestica bude i u području u kojem je potencijal viši od energije.

Prilagodbu funkcija nećemo izvoditi, nego ćemo samo prikazati oblik valnih funkcija za prva tri svojstvena stanja te funkcije gustoća vjerojatnosti za ta tri stanja.

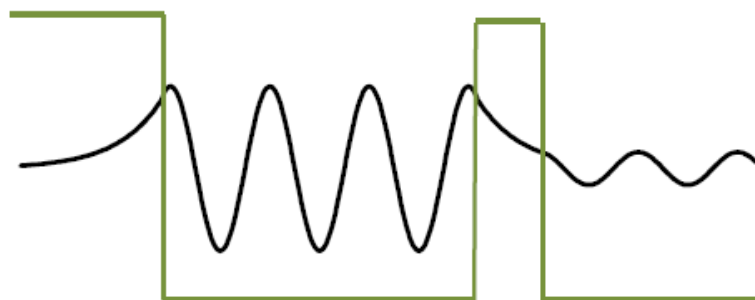


Uočimo da valna funkcija prelazi rubove jame, odnosno, postoji konačna vjerojatnost da se čestica nađe izvan jame – u prostoru koji bi joj klasično bio zabranjen.

19.4 Tuneliranje

Ako je potencijalna jama konačne visine (kao iz prošlog primjera), onda postoji vjerojatnost da se čestica nađe unutar zida. Zamislimo sada da se taj zid ne prostire unedogled, nego da ima konačnu širinu. Nazvat ćemo ga "barijera". Budući da je barijera viša od energije čestice, klasično ne bismo očekivali da ju čestica može "preskočiti", tj. očekujemo da čestica zauvijek ostane u jami bez obzira na širinu barijere. Međutim, u kvantnoj teoriji postoji vjerojatnost da se čestica nađe i na vanjskom rubu barijere, ako je dovoljno uska. U tom slučaju će se valna funkcija prostirati i u prostoru izvan barijere, odnosno moći će slobodno izaći iz jame. Ova pojava zove se *TUNELIRANJE* i našla je svoju primjenu u nizu praktičnih uređaja.

Uočimo da će valna duljina čestice u jami i izvan jame biti jednaka, što znači da čestica ima istu količinu gibanja s obje strane barijere (ima istu kinetičku energiju). Međutim, amplituda valne funkcije je manja izvan jame, što znači da je vjerojatnost nalaženja čestice izvan jame manja.



19.5 Harmonijski oscilator

U klasičnoj mehanici smo vidjeli da je jednostavni harmonijski oscilator jedan od najkorisnijih koncepata u rješavanju velikog broja problema. Slično vrijedi i kada se ti problemi rješavaju kvantno.

Harmonijski potencijal dan je izrazom

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 \quad (19.42)$$

i prikazan je na slici desno. Iako u stvarnim sustavima potencijalna funkcija općenito nije tog oblika, za male otklone od ravnoteže je harmonijska aproksimacija gotovo uvijek vrlo dobra. Budući da je $\omega = \sqrt{K/m}$, harmonijski potencijal pišemo u obliku

$$U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (19.43)$$

koji onda možemo uvrstiti u Schrödingerovu jednadžbu:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right] \cdot \psi = 0 \quad (19.44)$$

Naše poznavanje rješavanja diferencijalnih jednadžbi u ovom trenutku ne dozvoljava da ovu jednadžbu riješimo, ali važno je znati da postoje egzaktna matematička rješenja koja se nazivaju Hermiteove funkcije i njihov matematički oblik je

$$\psi_n(x) = [\text{Hermiteov polinom } n\text{-tog stupnja}] \cdot e^{-ax^2} \quad (19.45)$$

pri čemu je

$$a = \frac{m\omega}{2\hbar} \quad (19.46)$$

Navedimo ovdje prvih nekoliko svojstvenih valnih funkcija i njima pripadajućih energija:

$$\text{Osnovno stanje :} \quad \psi_0(x) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot e^{-ax^2} \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (19.47)$$

$$\text{Prvo pobuđeno stanje :} \quad \psi_1(x) = \sqrt{\frac{4a}{\pi}} [2(\sqrt{a}x)] \cdot e^{-ax^2} \quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad (19.48)$$

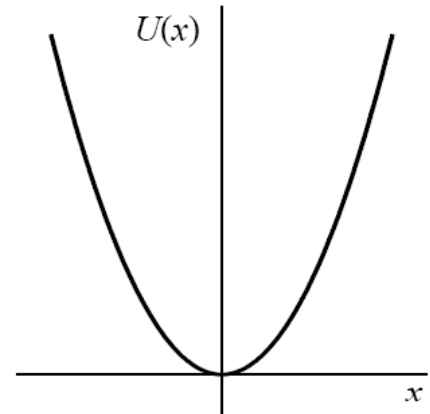
$$\text{Drugo pobuđeno stanje :} \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{4a}{\pi}} [4(\sqrt{a}x)^2 - 2] \cdot e^{-ax^2} \quad E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad (19.49)$$

Općenito, energija n -tog pobuđenog stanja iznosi

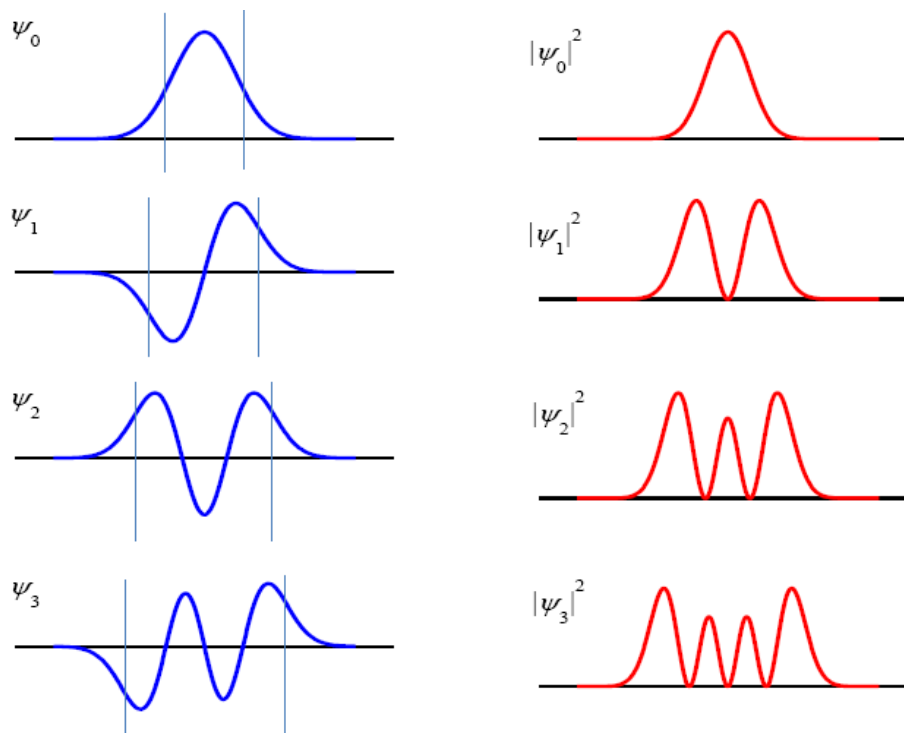
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (19.50)$$

Ovo je izuzetno važan rezultat koji se mora zapamtiti. Uočite da su energijski nivoi ekvidistantni, a energija se može mijenjati samo u kvantnim skokovima uvijek jednakog iznosa $\hbar\omega$.

Energija osnovnog stanja iznosi $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, što je različito od nule. To je u skladu s Heisenbergovim relacijama neodređenosti, jer kada bi energija bila nula, to bi značilo da čestica miruje u ravnotežnom položaju i ima količinu gibanja nula. Time bismo precizno odredili dvije konjugirane varijable što bi bilo u suprotnosti s relacijama neodređenosti.



Na slici su prikazane svojstvene valne funkcije i pripadne gustoće vjerojatnosti za četiri najniža energetska nivoa u harmonijskom oscilatoru.



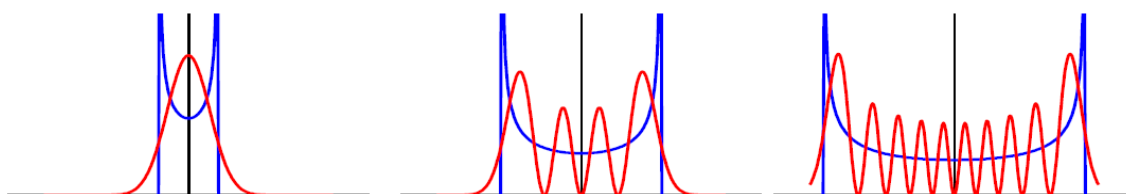
Princip korespondencije

Korisno je usporediti vjerojatnost nalaženja čestice na nekom položaju u klasičnom i u kvantnom harmonijskom oscilatoru.

U klasičnom harmonijskom oscilatoru čestica najviše vremena provodi u položajima maksimalnog otklona A kad joj je brzina nula. Najveću brzinu ima u ravnotežnom položaju pa na tom mjestu provodi najmanje vremena. Stoga će i vjerojatnost da u slučajno odabranom trenutku česticu nađemo na nekom položaju biti najveća u maksimalnim otklonima, a najmanja u ravnotežnom položaju. Vjerojatnost da čestica bude na položaju $|x| > A$ jest nula u klasičnom slučaju.

U kvantnom slučaju, gustoća vjerojatnosti dana je kvadratom valne funkcije. U osnovnom stanju harmonijskog oscilatora vjerojatnost nalaženja čestice najveća je u ravnotežnom položaju, što je potpuno suprotno od klasičnog predviđanja. Na donjoj slici lijevo prikazana je usporedba gustoće vjerojatnosti nalaženja čestice u klasičnom slučaju (plavo) i u kvantnom slučaju (crveno) za harmonijski oscilator u osnovnom stanju.

Na srednjoj slici dana je slična usporedba za harmonijski oscilator u trećem pobuđenom stanju, a na desnoj slici za oscilator u devetom pobuđenom stanju. Uočavamo da se u kvantnom harmonijskom oscilatoru vjerojatnost nalaženja čestice pomiče prema rubovima kako redni broj stanja n raste. Kada je n dovoljno velik, gustoća vjerojatnosti nalaženja čestice izračunata iz Schrödingerove jednadžbe sve više sliči gustoći vjerojatnosti izračunatoj iz klasične jednadžbe harmonijskog oscilatora. To je u skladu s *PRINCIPOM KORESPONDENCIJE* koji smo upoznali u prošlom poglavlju.



19.6 Trodimenzionalne potencijalne zamke

Rješavajući jednodimenzionalnu Schrödingerovu jednadžbu naučili smo da u slučaju kad potencijal ne ovisi o vremenu možemo valnu funkciju separirati na prostorni i vremenski dio i tako dobiti vremenski neovisnu Schrödingerovu jednadžbu. Također smo naučili da kada rješavamo jednodimenzionalnu vremenski neovisnu jednadžbu rubni uvjeti određuju moguća rješenja i time definiraju kvantizaciju energije i svojstvenih stanja. Svojstvena stanja razlikuju se prema kvantnom broju n .

Prilikom rješavanja trodimenzionalnih problema prirodno je da ćemo morati uvesti tri kvantna broja – za svaku neovisnu koordinatu po jedan.

Pravokutna zamka

Kao najjednostavniji primjer uzmimo beskonačnu pravokutnu jamu u tri dimenzije – to je kvadar unutar kojeg je potencijal jednak nuli, a izvan je beskonačan.³ Ovaj potencijal možemo pisati:

$$U(\vec{r}) = U(x, y, z) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < x < L_x \wedge 0 < y < L_y \wedge 0 < z < L_z \\ \infty & , \quad \text{inače} \end{cases} . \quad (19.51)$$

Uočimo da se $U(\vec{r})$ može pisati

$$U(\vec{r}) = U_x(x) + U_y(y) + U_z(z) , \quad (19.52)$$

pri čemu za svaku koordinatu $i = x, y, z$ vrijedi

$$U(i) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < i < L_i \\ \infty & , \quad \text{inače} \end{cases} . \quad (19.53)$$

Vremenski neovisna Schrödingerova jednadžba u tri dimenzije glasi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) , \quad (19.54)$$

odnosno

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(x, y, z) \right] \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z) . \quad (19.55)$$

Budući da se $U(\vec{r})$ može napisati kao zbroj nezavisnih funkcija jedne koordinate, ovdje možemo provesti separaciju varijabli u obliku

$$\psi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) . \quad (19.56)$$

Dobit ćemo tri nezavisne jednodimenzionalne Schrödingerove jednadžbe, a svaka od tih jednadžbi definirat će jednu kvantizaciju s kvantnim brojem n_x , n_y , odnosno n_z .

Sferna zamka

Prethodni primjer je zbog simetrije problema bilo pogodno rješavati u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Međutim, ako potencijalna jama nije pravokutna, nego nekog drugog oblika visoke simetrije, često je mnogo bolje problem rješavati u nekom drugom koordinatnom sustavu.

Na primjer, ako je posuda u kojoj je zatočena naša čestica sfernog oblika, onda je najbolje upotrijebiti sferni koordinatni sustav. U tom sustavu neki vektor položaja određen je trima koordinatama: r , ϑ i φ . Koordinata r predstavlja udaljenost neke točke od ishodišta koordinatnog sustava, tj. iznos vektora položaja \vec{r} , a koordinate ϑ i φ predstavljaju kutove koji određuju smjer vektora položaja.

³Najbolji primjer takvog potencijala je pravokutna posuda s plinom.

Sferna posuda u kojoj je zatočena čestica predstavlja sfernu beskonačnu potencijalnu jamu u kojoj je potencijal nula, a izvan posude je beskonačan. Ako postavimo ishodište koordinatnog sustava u središte sferne posude, onda potencijal $U(\vec{r}) = U(r, \vartheta, \varphi)$ ovisi samo o udaljenosti od ishodišta, a ne i o kutovima:

$$U(r) = \begin{cases} 0 & , r < R \\ \infty & , r \geq R \end{cases} \quad , \quad (19.57)$$

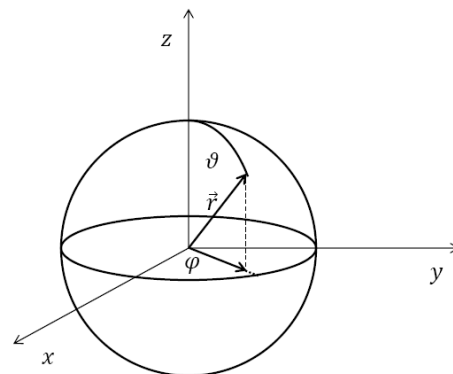
gdje je R radijus posude.

Transformacija koordinata iz Kartezijevog koordinatnog sustava u sferni provodi se ovim pravilima:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad (19.58)$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad (19.59)$$

$$z = r \cos \vartheta \cos \varphi \quad (19.60)$$



Da bismo mogli računati s jednadžbom (19.54), moramo izraziti laplasijan u sfernim koordinatama:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad . \quad (19.61)$$

Uvrštavanjem (19.61) u (19.54) dobivamo vrlo kompliciranu jednadžbu koja se, međutim, ipak može egzaktno riješiti zahvaljujući činjenici da potencijal ovisi samo o r . Mi taj postupak nećemo provoditi, ali napomenimo da ćemo rješenja tražiti u obliku

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi) \quad , \quad (19.62)$$

tj. provest ćemo separaciju varijabli.

Svaka od funkcija $R(r)$, $\Theta(\vartheta)$ i $\Phi(\varphi)$ dat će nam uvjet na jedan kvantni broj. Kvantni broj za R označit ćemo n , kvantni broj za Θ označit ćemo l , a kvantni broj za Φ označit ćemo m .

Poglavlje 20

Struktura atoma

20.1 Vodikov atom

Atom vodika sastoji se od protona i elektrona. Budući da je masa protona mnogo veća od mase elektrona, zamislimo da pozitivno nabijeni proton miruje u ishodištu koordinatnog sustava. Rješavat ćemo Schrödingerovu jednadžbu za elektron u Coulombovom potencijalu koji stvara proton. Važno je primijetiti da Coulombov potencijal

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (20.1)$$

ne ovisi o kutovima ϑ i φ , nego samo o udaljenosti od ishodišta r . To će nam omogućiti da rješenja jednadžbe

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi \quad (20.2)$$

tražimo metodom separacije varijabli

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi) \quad . \quad (20.3)$$

Rješenja će morati zadovoljavati neke rubne uvjete, što će nam dati uvjete kvantizacije:

1. $R(r)$ mora težiti u nulu za $r \rightarrow \infty$.¹
2. Kutne funkcije $\Theta(\vartheta)$ i $\Phi(\varphi)$ moraju biti periodične.
3. Funkcije $\Theta(\vartheta)$ i $\Phi(\varphi)$ moraju biti konačne (ograničene).

Laplasijan u sfernim koordinatama dan je jednadžbom (19.61), a možemo ga skraćeno pisati kao

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \hat{\mathcal{L}} \quad , \quad (20.4)$$

pri čemu je

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad . \quad (20.5)$$

Rješavanjem jednadžbe (20.2) separacijom varijabli dobivamo sustav od tri diferencijalne jednadžbe

¹U protivnom integral po cijelom prostoru ne bi bio konačan.

koje su međusobno povezane konstantnim parametrima:

$$1) \text{ azimutalna jednađzba : } \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m_l^2 \quad (20.6)$$

$$2) \text{ orbitalna jednađzba : } \frac{\sin\vartheta}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + l(l+1) \sin^2\vartheta = m_l^2 \quad (20.7)$$

$$3) \text{ radijalna jednađzba : } \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(Er^2 + \frac{e^2 r}{4\pi\epsilon_0} \right) = l(l+1) \quad (20.8)$$

Konstantu koja povezuje azimutalnu i orbitalnu jednađzbu nazvali smo m_l^2 , a konstantu koja povezuje radijalnu i orbitalnu jednađzbu nazvali smo $l(l+1)$.

Azimutalna jednađzba matematički je ekvivalentna jednađzbi klasičnog harmonijskog oscilatora i njezino rješenje je oblika

$$\Phi_{m_l}(\varphi) = Ae^{im_l\varphi} + Be^{-im_l\varphi} \quad , \quad (20.9)$$

a zbog uvjeta periodičnosti, jasno je da m_l mora biti cijeli broj.

Ovdje nećemo rješavati orbitalnu i radijalnu jednađzbu, ali ćemo napisati oblik njihovih rješenja. Rješenje orbitalne jednađzbe ovisit će o dva parametra: l i m_l , a imat će oblik

$$\Theta_{l,m_l}(\vartheta) = C \cdot P_l^{m_l}(\cos\vartheta) \cdot \sin^{m_l}\vartheta \quad , \quad (20.10)$$

pri čemu je $P_l^{m_l}(x)$ polinom stupnja $l - m_l$.² Rubni uvjeti na periodičnost $\Theta(\vartheta)$ daju uvjet kvantizacije da l mora biti cijeli broj veći ili jednak nuli. Azimutalno i orbitalno rješenje možemo zajedno napisati u obliku

$$Y_{l,m_l}(\vartheta, \varphi) = \Theta_{l,m_l}(\vartheta) \cdot \Phi_{m_l}(\varphi) \quad . \quad (20.11)$$

Funkcije $Y_{l,m_l}(\vartheta, \varphi)$ nazivamo *kugline funkcije*, a ponekad se upotrebljava i prijevod njihovog engleskog naziva *sferni harmonici*.³ Uočimo da u rješavanju kutnog dijela jednađzbe nigdje nismo upotrijebili oblik radijalnog (Coulombovog) potencijala, što znači da će kugline funkcije biti rješenje svake sfernosimetrične Schrödingerove jednađzbe.

Rješenje radijalne jednađzbe je oblika

$$R_{n,l}(r) = [\text{polinom } (n-1) \text{ stupnja}] \cdot e^{-\frac{r}{n \cdot a_0}} \quad , \quad (20.12)$$

pri čemu je a_0 Bohrov radijus. Rubni uvjeti nalažu kvantizaciju da n mora biti prirodni broj.

Ukupna valna funkcija glasi

$$\psi_{n,r,l}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \cdot Y_{l,m_l}(\vartheta, \varphi) \quad . \quad (20.13)$$

Energija elektrona ovisi samo o kvantnom broju n pa njega zovemo glavni kvantni broj. Svojestvena energija za n -ti kvantni broj iznosi

$$E_n = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad . \quad (20.14)$$

Svi kvantni brojevi su cjelobrojni, a međusobno su povezani uvjetima:

$$\begin{aligned} \text{glavni kvantni broj :} & \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \text{orbitalni kvantni broj :} & \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \text{magnetski kvantni broj :} & \quad m_l = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l \end{aligned} \quad (20.15)$$

Ukupna valna funkcija elektrona u atomu vodika ima oblik

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \cdot Y_{l,m_l} \quad . \quad (20.16)$$

²To je polinom koji se dobije m_l -tom derivacijom tzv. *Legendreovog polinoma* l -tog stupnja.

³spherical harmonics

Tako, na primjer, valna funkcija za osnovno stanje ($n = 1$; $l = 0$; $m_l = 0$) glasi

$$\psi_{1,0,0}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-r/a_0} \quad . \quad (20.17)$$

Primijetimo da valna funkcija u osnovnom stanju nema kutnu ovisnost. Za jedno više stanje ($n = 3$; $l = 2$; $m_l = 1$) valna funkcija glasi

$$\psi_{3,2,1}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \frac{r^2}{a_0^2} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi} e^{-r/3a_0} \quad . \quad (20.18)$$

Primjećujemo da se kutna ovisnost javlja ako je $l \neq 0$.

Činjenica da energija ne ovisi o orbitalnom i magnetskom kvantnom broju ima za posljedicu da više svojstvenih valnih funkcija odgovara istoj energiji. Tada kažemo da su stanja iste energije *degenerirana*, odnosno da je spomenuti energijski nivo degeneriran. Degenerirani energijski nivoi su uvijek posljedica visoke simetrije promatranog sustava. Ako se nekim vanjskim utjecajem naruši simetrija koja je uzrokovala degeneraciju, energije pripadnih svojstvenih funkcija počat će se razlikovati, a mi ćemo reći da je degeneracija razbijena.

20.1.1 Vjerojatnost nalaženja elektrona

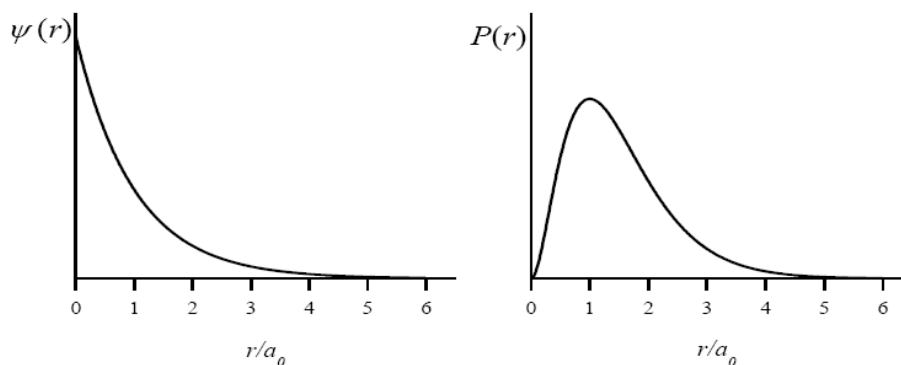
Gustoća vjerojatnosti P da se neka čestica nađe u djeliću volumena dV dana je kvadratom apsolutne vrijednosti valne funkcije $|\psi|^2$. U sfernim koordinatama diferencijal volumena je $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$. Prema tome, vjerojatnost nalaženja elektrona na mjestu određenom koordinatama r , ϑ i φ iznosi

$$P(r, \vartheta, \varphi) dV = |\psi(r, \vartheta, \varphi)|^2 r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \quad . \quad (20.19)$$

Ovaj izraz se pojednostavnjuje ako valna funkcija nema kutnu ovisnost. Tada integriranje po kutnim varijablama daje 4π pa je $dV = 4\pi r^2 dr$. Gustoća vjerojatnosti ovisi samo o r :

$$P(r) dr = |\psi|^2 r^2 dr \quad . \quad (20.20)$$

Na slici je prikazan oblik valne funkcije za osnovno stanje elektrona u vodikovom atomu (lijevo) i radijalna vjerojatnost nalaženja elektrona na udaljenosti r od jezgre. Vidimo da je najvjerojatnija udaljenost elektrona jednaka upravo Bohrovom radijusu. Vrijednost orbitalnog kvantnog broja l

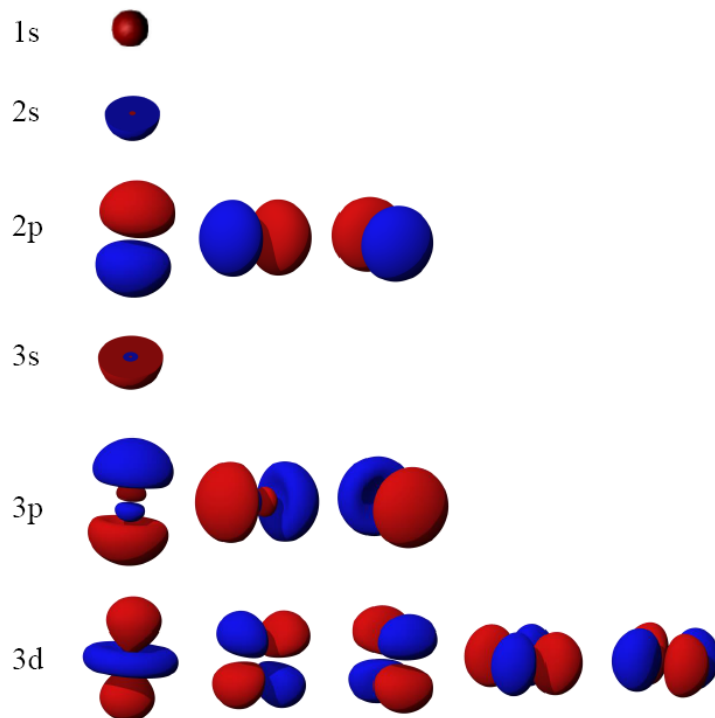


često se izražava i slovima: stanje koje ima $l = 0$ naziva se *s*-stanje. Stanje s $l = 1$ naziva se *p*-stanje; $l = 2$ je *d*-stanje, $l = 3$ je *f*-stanje itd.

Napišimo eksplicitne izraze za valne funkcije u prve tri ljuske vodikova atoma. Prostorni oblik tih funkcija prikazujemo na slici⁴. Crvena boja pokazuje mjesta gdje je valna funkcija pozitivna, a plava boja mjesta na kojima je valna funkcija negativna.

⁴izvor - Wikipedia

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,0,0}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-r/a_0} \\
 \psi_{2,0,0}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \left[2 - \frac{r}{a_0} \right] e^{-r/2a_0} \\
 \psi_{2,1,0}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \vartheta \\
 \psi_{2,1,\pm 1}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} \\
 \psi_{3,0,0}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{81\sqrt{3\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \left[27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2} \right] e^{-r/3a_0} \\
 \psi_{3,1,0}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{3\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \left[6 - \frac{r}{a_0} \right] \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0} \cos \vartheta \\
 \psi_{3,1,\pm 1}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{3\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \left[6 - \frac{r}{a_0} \right] \frac{r}{a_0} e^{-r/3a_0} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi} \\
 \psi_{3,2,0}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \\
 \psi_{3,2,\pm 1}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{81\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{\pm i\varphi} \\
 \psi_{3,2,\pm 2}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{162\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi}
 \end{aligned}$$



20.1.2 Kvantizacija kutne količine gibanja

Kutna količina gibanja jedna je od fizikalnih veličina koje imaju važno značenje u kvantnoj fizici. I ta veličina je kvantizirana. Da bismo proveli kvantizaciju, klasičnu fizikalnu veličinu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ zamijenit ćemo operatorom \hat{L}

$$\hat{L} = -i\hbar (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \quad . \quad (20.21)$$

Fizikalnu veličinu L^2 zamjenjujemo operatorom $\hat{L}^2 = -\hbar^2 (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla})$. To je skalarni operator koji u sfernim koordinatama glasi

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad . \quad (20.22)$$

To je upravo kutni dio laplasijana (19.61) pomnožen s $-\hbar^2$. Rješavanje Schrödingerove jednadžbe separacijom varijabli na radijalni i kutni dio te poštivanjem rubnih uvjeta dolazimo do uvjeta kvantizacije za observablu L^2 :

$$L^2 = \hbar^2 \cdot l \cdot (l + 1) \quad , \quad (20.23)$$

odnosno

$$|L| = \sqrt{l \cdot (l + 1)} \hbar \quad . \quad (20.24)$$

Možemo uočiti da je u svim slučajevima kad postoji kutna količina gibanja, njezin iznos necjelobrojni umnožak od \hbar . Međutim, kada bismo željeli odrediti vektor \vec{L} , morali bismo odrediti njegove komponente u x , y i z smjeru. Heisenbergove relacije neodređenosti ne dopuštaju nam da istodobno odredimo dvije komponente tog vektora jer bismo u tom slučaju, znajući ukupni iznos vektora, mogli odrediti i treću komponentu. Stoga je moguće odrediti projekciju vektora samo na jednu os i dogovorno uzimamo da je to os z (tako postavimo koordinatni sustav). Operator z -komponente kutne količine gibanja u sfernom laplasijanu glasi

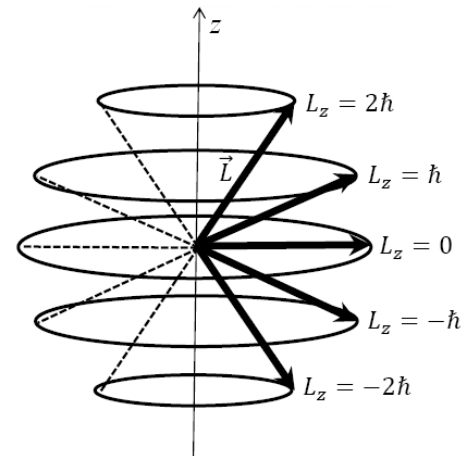
$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad , \quad (20.25)$$

a kvantizacija daje rezultat

$$L_z = m_l \cdot \hbar \quad , \quad (20.26)$$

gdje je m_l cijeli broj čija apsolutna rijednost nije veća od l . Projekcija L_z je uvijek manja od $|\vec{L}|$. Na primjer, za $l = 2$ iznos $|\vec{L}|$ je $\sqrt{6} = 2.54$, a projekcija L_z može poprimiti vrijednosti -2, -1, 0, 1, ili 2.

Os z možemo proizvoljno odabrati tako dugo dok ne postoji neki preferirani smjer, npr., zbog postojanja magnetskog polja. Ako postoji magnetsko polje, onda odabiremo da je os z u smjeru polja \vec{B} .



20.1.3 Magnetski dipolni moment

U klasičnoj fizici pokazali smo da kada nabijena čestica kruži oko neke točke postoji veza između njezine kutne količine gibanja \vec{L} i stvorenog magnetskog dipolnog momenta $\vec{\mu}$:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L} \quad . \quad (20.27)$$

Iako u kvantnoj fizici ne možemo definirati putanju čestice, ova veza između $\vec{\mu}$ i \vec{L} i dalje ostaje valjana.

20.1.4 Zeemanov efekt

Ako se atom nalazi u magnetskom polju, više neće biti svejedno kako smo odabrali osi koordinatnog sustava. Energija će ovisiti o relativnoj orijentaciji magnetskog dipolnog momenta $\vec{\mu}$ i polja \vec{B} . Iz klasične fizike znamo da je potencijalna energija dana s

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad , \quad (20.28)$$

a uz odabir da je $\vec{B} = \hat{k}B_z$, energija je

$$U = -\mu_z \cdot B_z \quad . \quad (20.29)$$

Budući da je projekcija zamaha na z -os kvantizirana ($L_z = m_l \hbar$), isto vrijedi i za magnetski dipolni moment:

$$\mu_z = -\frac{e\hbar}{2m}m_l = \mu_B \cdot m_l \quad , \quad (20.30)$$

gdje smo definirali veličinu (prirodnu konstantu) *BOHROV MAGNETON* $\mu_B = e\hbar/2m$. Prema tome, i magnetska energija je kvantizirana:

$$U = -m_l \cdot \mu_B \cdot B_z \quad . \quad (20.31)$$

Ovaj potencijal dodaje se u Schrödingerovu jednadžbu već postojećem kulonskom potencijalu. Zbog tog člana u potencijalu, energije stanja koja su imala iste energije počinju se razlikovati. Točnije, za isti orbitalni kvantni broj l , energije ovise o magnetskom kvantnom broju m_l . Energija određenog stanja pomaknuta je za $m_l \cdot \mu_B \cdot B_z$. Atomijski energijski nivoi se cijepaju, a time se razdvajaju i spektralne linije. Razdvajanje spektralnih linija nazvano je po svom otkrivaču "Zeemanov efekt".⁵

Prije uključivanja magnetskog polja, degeneracija stanja orbitalnog kvantnog broja l bila je $(2l + 1)$ -struka. Kad se polje uključi, ta degeneracija se razbija i spomenuti nivo rascijepi se na $2l + 1$ različitih nivoa. Razmak energija je vrlo malen, reda veličine 10^{-5} eV, što je mnogo manje od razmaka energija između ljuski.

20.1.5 Izborna pravila

Spektralna linija koja nastaje prijelazom iz jednog energijskog nivoa u drugi također će se rascijepiti uključivanjem magnetskog polja, ali ne na $2l + 1$ različitih linija, nego samo na tri linije razmaknute u energiji za $\mu_B B_z$. Razlog tome su izborna pravila. Naime, prijelazi između nivoa događaju se emitiranjem ili apsorpiranjem fotona. Foton je čestica svjetlosti koja ima svoju količinu gibanja, ali ima i točno određenu kutnu količinu gibanja $L = \hbar$. Projekcija \vec{L} fotona na os z može biti samo $L_z = -\hbar, 0$ ili $+\hbar$. To znači da prijelaz može nastupiti samo između stanja kojima se m_l razlikuje za 0 ili 1. Tako su, na primjer, dozvoljeni prijelazi iz stanja $4s$ u stanje $3p$, ali nije dozvoljen prijelaz iz $3d$ u $2s$. Za takve prijelaze kažemo da su *zabranjeni prijelazi*.

20.1.6 Spin elektrona

Cijepanje spektralnih linija u magnetskom polju malen je efekt i potrebno je dobro razlučivanje optičkog interferometra da bi se uočilo razdvajanje jedne glavne linije na nekoliko bliskih linija. U modelu atoma vodika zbog izbornih pravila svaka glavna linija se može se cijepati na tri bliske linije. U kompleksnijem modelu višeelektronskog atoma, hiperfino cijepanje energetskih nivoa može biti različito za različite glavne brojeve, ali i u tom slučaju će broj spektralnih linija uvijek biti neparan.

Eksperimentalno opažanje spektralnih linija atoma u magnetskom polju pokazalo je, naprotiv, da se vrlo često spektralne linije cijepaju na paran broj (4 ili 6) bliskih linija. Ta pojava nazvana je "anomalni Zeemanov efekt" i nije se mogla objasniti u sklopu dosad iskazane kvantne teorije.

⁵Nizozemski fizičar Pieter Zeeman za ovo otkriće dobio je Nobelovu nagradu 1902. godine.

Napretku u razumijevanju anomalnog Zeemanovog efekta pridonjelo je otkriće Sterna i Gerlacha (1922. godine) koji su eksperimentalno pokazali da se snop atoma srebra prolaskom kroz nehomogeno magnetsko polje razdvaja na dva snopa. Svaki atom koji posjeduje kutnu količinu gibanja otklonit će se prolaskom kroz nehomogeno magnetsko polje. Smjer i iznos otklona ovisit će o projekciji L_z tog zamaha na os z . Budući da je projekcija kvantizirana s cjelobrojnim kvantnim brojem m_l , očekujemo da se snop razdvoji na neparan broj snopova. Opaženo razdvajanje na paran broj snopova bilo je veliko iznenađenje. Budući da atomi čija kutna količina gibanja je određena kvantnim brojem j mogu imati jednu od $2j + 1$ projekcija kutne količine gibanja na os z , ako imamo paran broj projekcija zaključujemo da j može poprimiti polucijele vrijednosti $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, itd.

Zagonetku anomalnog Zeemanovog efekta i rezultata Stern-Gerlachovog eksperimenta odgonetnuli su mladi nizozemski fizičari Uhlenbeck i Goudsmith 1925. Njihova hipoteza bila je da elektron ima intrinzičnu kutnu količinu gibanja koju su nazvali spin \vec{S} . Iznos tog spina je

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad (20.32)$$

pri čemu je $s = 1/2$. Uz tu pretpostavku mogu se objasniti dosad neobjašnjeni atomski spektri. Projekcija spina na os z može poprimiti dvije vrijednosti

$$S_z = m_s \hbar \quad ; \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \quad . \quad (20.33)$$

Iz ove činjenice izravno slijedi objašnjenje Stern-Gerlachovog eksperimenta.

Postojanje orbitalne i spinske kutne količine gibanja može se usporediti s kutnom količinom gibanja Zemlje. Ako Zemlju zamislimo kao točkastu masu koja kruži oko Sunca, onda je zamah tog sustava jednak $MR^2\Omega$, gdje je M masa Zemlje, R udaljenost Zemlje od Sunca, a Ω kutna brzina Zemljine revolucije. Ovaj zamah odgovarao bi orbitalnom zamahu elektrona u atomu (uz ogradu da pojam putanje nije primjeren razmatranju kvantnog sustava). Međutim, Zemlja nije točkasta masa, već kugla koja rotira oko vlastite osi. Zamah kugle koja rotira iznosi $2Mr^2/5\omega$, gdje je r polumjer Zemlje, a ω kutna brzina Zemljine rotacije. Ovaj zamah odgovarao bi spinskom zamahu elektrona. Ova analogija pomaže nam da si predočimo razliku između orbitalnog i spinskog zamaha, međutim ta slika daleko je od istinite. Magnetski dipolni moment povezan sa spinskim zamahom nikako se ne može dobiti klasičnim razmatranjem. Pokazuje se da bi se za takav račun elektron morao vrtiti brzinom većom od brzine svjetlosti. Zato ćemo spin elektrona smatrati njegovim intrinzičnim svojstvom.⁶

Magnetski dipolni moment povezan sa spinom (spinski magnetski moment) povezan je sa spinskim zamahom relacijom

$$\mu_z = -(2.00232)\frac{e}{2m} \cdot S_z \quad . \quad (20.34)$$

Ovaj faktor, koji je približno 2, točno je eksperimentalno određen na mnogo decimala, a isti taj faktor dobije se računom u relativističkoj kvantnoj fizici.

Općenito, čestice mogu imati spin (spinski kvantni broj s) koji je višekratnik od $\frac{1}{2}$. Čestice čiji spin je neparan višekratnik od $\frac{1}{2}$ ("polucijeli" spin) nazivamo *FERMIONI*. Fermioni su npr. elektroni, protoni, neutroni, mioni, jezgra ^3He , itd. Čestice čiji spin je cjelobrojan nazivamo *BOZONI*. Bozoni su npr. fotoni, pioni, sparni supravodljivi elektroni (Cooperov par), jezgra ^4He , itd.

⁶Spin elektrona moguće je izračunati u relativističkoj kvantnoj teoriji koju je razvio P. A. M. Dirac. Međutim ta teorija nadilazi opseg gradiva ovog kolegija.

20.1.7 Ukupna kutna količina gibanja

Orbitalni i spinski zamah mogu se kombinirati na razne načine. Definiramo ukupni zamah \vec{J} :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad . \quad (20.35)$$

Mogući iznosi $J = |\vec{J}|$ su kvantizirani kvantnim brojem j :

$$J = \sqrt{j \cdot (j + 1)} \hbar \quad , \quad (20.36)$$

pri čemu je $j = l \pm \frac{1}{2}$. Stanja $l + \frac{1}{2}$ odgovaraju slučaju kad vektori \vec{L} i \vec{S} imaju paralelne z -komponente, a $l - \frac{1}{2}$ odgovaraju slučaju kad vektori \vec{L} i \vec{S} imaju antiparalelne z -komponente.

Spinsko orbitalna sprega

Spinski magnetski dipolni moment daje cijepanje linija čak i kada nema vanjskog magnetskog polja. Uzrok je međudjelovanje spinskog i orbitalnog magnetskog momenta. Energija interakcije uvodi se u Schrödingerovu jednadžbu kao skalarni produkt $\vec{L} \cdot \vec{S}$ uz dodatne konstante.⁷ Ovaj član odgovoran je za male razlike u energijama bliskih stanja. Npr. u poznatoj žutoj spektralnoj liniji natrija sadržan je dublet – dvije bliske linije valnih duljina 589.0 nm i 589.6 nm.

Različita cijepanja linija koja dolaze od magnetskih interakcijazajednički se zovu *fina struktura*. Postoje još manja cijepanja koja potječu od međudjelovanja orbitalnog i spinskog magnetskog momenta s magnetskim momentom atomske jezgre. Ti efekti nazivaju se *hiperfina struktura*.

20.1.8 Paulijev princip

Dosad smo uveli 4 kvantna broja za elektron u vodikovom atomu: n , l , m_l i m_s . Svojevrsna valna funkcija za neku kombinaciju tih kvantnih brojeva je umnožak prostorne i spinske valne funkcije:

$$\Psi_{n,l,m_l,m_s} = \psi_{n,l,m_l}(r, \vartheta, \varphi) \cdot \chi_{m_s} \quad , \quad (20.37)$$

pri čemu je χ_{m_s} spinska valna funkcija.

Vodikov atom s jednim elektronom najjednostavniji je primjer atoma koji smo riješili pomoću Schrödingerove jednadžbe. Međutim, ta jednadžba sama po sebi ne može objasniti strukturu višeelektronskih atoma i dobro poznatu strukturu periodnog sustava elemenata. Rješenje problema ponudio je austrijski fizičar Wolfgang Pauli koji je predložio *PRINCIP ISKLJUČENJA*:

Ni u jednom kvantnom sustavu dva elektrona ne mogu zauzeti isto kvantno stanje.

U stvari, Paulijev princip isključenja vrijedi ne samo za elektrone, nego za sve fermione (čestice necjelobrojnog spina). Drugim riječima, dva elektrona u atomu ne mogu imati sva četiri kvantna broja jednaka.

Paulijev princip posljedica je činjenice da čestice na kvantnoj razini ne možemo razlikovati. Zbog toga moraju biti zadovoljena pravila simetričnosti ili antisimetričnosti valnih funkcija. Za fermione u nekom sustavu sve valne funkcije moraju biti antisimetrične na zamjenu mjesta bilo koja dva fermiona.

⁷kada bismo razmišljali da postoje putanje elektrona, ovaj član mogli bismo zamisliti na sljedeći način: U sustavu elektrona izgleda kao da proton kruži oko njega. Takvo gibanje pozitivnog naboja stvara magnetsko polje na mjestu elektrona pa će spinski magnetski moment elektrona u tom polju imati različite energije ovisno o tome je li orijentiran paralelno ili antiparalelno.

20.2 Višeelektronski atomi

Nakon što smo dobro opisali svojstvena stanja i energije vodikova atoma, slijedi nam mnogo složeniji problem atoma s većim brojem elektrona. Atomski broj Z određuje naboj atomske jezgre i broj elektrona u atomu. Cijeli atom je neutralan. Egzaktno rješavanje strukture takvog atoma zahtijeva razmatranje sustava od $Z + 1$ čestice i uključivanje svih njihovih međudjelovanja u Schrödingero-rovu jednadžbu. Taj problem nemoguće je egzaktno matematički riješiti. Stoga moramo pribjeći aproksimacijama.

Jedna moguća aproksimacija bila bi usporedba s planetarim sustavom. Svaki planet osjeća jaku silu od Sunca, a sile među planetima su zanemarive. Ako promatramo jedan elektron u Coulombovom potencijalu jezgre naboja Ze , zanemarujući utjecaj ostalih elektrona, problem se može jednostavno riješiti, ali daje potpuno krive rezultate. Razlog je taj što su električne sile kojima elektroni djeluju jedni na druge mnogo veće od gravitacijskih sila kojima međudjeluju planeti.

Mnogo bolju aproksimaciju učinit ćemo tako da u razmatranju jednog elektrona uzmemo u obzir jezgru i sve ostale elektrone. Zamislimo da svi preostali elektroni čine oblak naboja oko jezgre koji je približno sferno simetričan. Naboj takvog oblaka s jezgrom je $+e$. Potencijal $U(r)$ takvog oblaka ne može se opisati Coulombovim potencijalom ($\propto 1/r$), ali se i dalje može smatrati sferno simetričnim. To znači da će kutni dio valne funkcije i dalje biti dan kuglinim funkcijama $Y_{l,m_l}(\vartheta, \varphi)$, a spinski dio valnom funkcijom χ_{m_s} .

Radijalne valne funkcije razlikovat će se od onih koje bi se dobile rješavanjem Schrödingerove jednadžbe za Coulombov potencijal. Međutim, i u ovom slučaju su energije određene glavnim kvantnim brojem n koji zadržava svoje značenje, ali određuje druge energije E_n . I dalje vrijede ograničenja na kvantne brojeve (20.15).

Važan princip za razumijevanje višeelektronskih atoma je Paulijev princip isključenja koji brine da ne mogu svi elektroni biti u najnižem stanju ($n = 1, l = 0$).

U prvoj ljusci (za glavni kvantni broj $n = 1$) postoje dva stanja u koja se mogu "smjestiti" dva elektrona:

$$n = 1 \quad l = 0 \quad m_l = 0 \quad \begin{array}{l} m_s = -\frac{1}{2} \\ m_s = \frac{1}{2} \end{array} \quad 1s^2$$

U drugoj ljusci postoji osam stanja u koja se može "smjestiti" osam elektrona:

$$\begin{array}{llll} n = 2 & l = 0 & m_l = 0 & \begin{array}{l} m_s = -\frac{1}{2} \\ m_s = \frac{1}{2} \end{array} \\ & & & 2s^2 \\ & l = 1 & m_l = -1 & \begin{array}{l} m_s = -\frac{1}{2} \\ m_s = \frac{1}{2} \end{array} \\ & & m_l = 0 & \begin{array}{l} m_s = -\frac{1}{2} \\ m_s = \frac{1}{2} \end{array} \\ & & m_l = 1 & \begin{array}{l} m_s = -\frac{1}{2} \\ m_s = \frac{1}{2} \end{array} \\ & & & 2p^6 \end{array}$$

U trećoj ljusci postoji 18 stanja u koja se može "smjestiti" 18 elektrona ($3s^2, 3p^6, 3d^{10}$), itd.

Poglavlje 21

Molekule

Atomi u prirodi se općenito zbližuju i tvore molekule, plinovi se kondenziraju u tekućine, krutine. To znači da je među atomima ukupna sila privlačna ako im je udaljenost veća od neke ravnotežne udaljenosti. Osnovni mehanizam te privlačne interakcije je uglavnom, ali ne uvijek, elektrostatske prirode. Puni kvantnomehanički izračun energija veze jest izuzetno složen zadatak. Već za molekulu H_2 moramo u obzir uzeti četiri čestice – dva protona i dva elektrona. To znači da Schrödingerova jednačba za jedan elektron u molekuli vodika ima 3 člana u potencijalu:

$$U_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}} + \frac{1}{r_{12}} \right) \quad , \quad (21.1)$$

pri čemu s r_{1A} i r_{1B} označavamo udaljenosti od protona, a s r_{12} udaljenost od drugog elektrona. Sličan potencijal može se napisati za drugi elektron, kao i za svaki od protona. Potencijali nisu sferno simetrični pa ne možemo provesti separaciju varijabli. To sve čini ovaj problem vrlo zahtjevnim, a riječ je o najjednostavnijoj molekuli. Dodatno moramo voditi računa o činjenici da elektrone ne možemo razlikovati pa rješenja moraju biti simetrična ili antisimetrična na zamjenu elektrona. Računi postaju još kompliciraniji kad se počinju promatrati veće molekule. Tek pojavom moćnih računala omogućeno je približno rješavanje takvih molekula.

Srećom, dobra fizikalna slika može se steći (i zaobići velik dio računalnog posla) stvaranjem pojednostavljenih modela koji naglašavaju dominantna svojstva sila vezanja.

21.1 Vrste kemijskih veza

21.1.1 Ionska veza

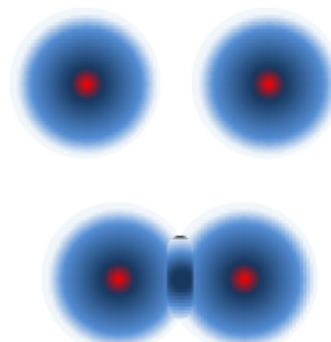
Prototip ionske molekule je NaCl (kuhinjska sol). Natrij je alkalni metal kojemu je potrebno dodati relativno malu energiju kako bi mu se oduzeo elektron i stvorio pozitivni ion Na^+ (5.14 eV). Klor je halogeni element koji ima 7 elektrona u vanjskoj ljusci i nedostaje mu jedan elektron da bi postigao stabilnu konfiguraciju zatvorene ljuske. Energija tako stvorenog iona Cl^- niža je od energije neutralnog atoma klora. Za odvođenje jednog elektrona iz Cl^- potrebno je uložiti energiju 3.62 eV. Kažemo da klor ima afinitet za elektrone 3.62 eV.

Dakle da bismo jedan elektron izdvojili iz neutralnog atoma natrija i dodali ga u udaljeni neutralni atom klora potrebno je uložiti samo 1.52 eV. Ako ta dva suprotno nabijena iona približimo na ravnotežnu udaljenost 0.24 nm, njihova elektrostatska energija bit će smanjena za dodatnih 5.7 eV. To znači da će spajanje atoma natrija i klora u molekulu čija energija je 4.2 eV niža od neutralnih atoma. Kažemo da energija disocijacije molekule NaCl iznosi 4.2 eV. Atomi ne mogu doći bliže od 0.24 nm jer bi došlo do narušavanja Paulijevog principa.

Ionske veze su kulonske interakcije između gotovo sfernih raspodjela naboja. One nisu usmjerene i mogu uključivati više od jednog elektrona po atomu (npr. Mg^{2+}).

21.1.2 Kovalentna veza

Za razliku od ionskih veza, sile koje povezuju molekule kao što su O_2 ili CH_4 imaju potpuno kvantnomehaničko podrijetlo i nemaju svoj analogon u klasičnoj fizici. Atomi su povezani u molekulu kovalentnom vezom. U kovalentnoj vezi dva atoma sudjeluju mnogo ravnopravnije nego u ionskoj. Najjednostavniji primjer kovalentne veze je molekula vodika H_2 . Kada se dva protona približe na neku udaljenost, valna funkcija dva elektrona u njihovom potencijalu mora zadovoljavati uvjet antisimetričnosti na zamjenu elektrona (elektroni su fermioni koje ne razlikujemo). To znači da ako elektroni imaju jednake spinove, prostorna valna funkcija mora biti antisimetrična, a ako elektroni imaju suprotne spinove, prostorna valna funkcija je simetrična. Dok za antisimetričnu prostornu funkciju vjerojatnost nalaženja elektrona u sredini između protona iščezava, za simetričnu valnu funkciju ta vjerojatnost je prilično velika. Elektronski oblak postaje gušći u području između protona i nastaje neto privlačna interakcija protona. Ukupni spin sustava je u tom slučaju $S = 0$ i govorimo o singletnom stanju molekule vodika. Kada su elektronski spinovi paralelni, ukupni spin je $S = 1$ i govorimo o tripletnom stanju. Tripletno stanje nema ravnotežnog položaja u kojem bi se protoni nalazili bez odbijanja. Za singletno stanje kažemo da je *bonding* stanje, a za tripletno stanje da je *antibonding* stanje.



U kovalentnoj vezi svaki atom mora dati jedan elektron, a oni se moraju spariti u singletno stanje. Kovalentna veza vrlo je usmjerena. U svakoj vezi sudjeluje najviše po jedan elektron svakog atoma.

Atomi koji imaju više elektrona u vanjskoj ljusci mogu stvarati istodobno više kovalentnih veza. Kao primjer navedimo molekulu CH_4 . Atom ugljika ima u vanjskoj ljusci četiri elektrona u stanjima $2s^2 2p^2$. Međutim, za stvaranje kovalentne veze stvaraju se nove valne funkcije koje su superpozicija atomskih valnih funkcija, i to jedne s i tri p orbitale. Te funkcije mogu se superponirati na 4 načina, a svaka nova funkcija izuzetno je usmjerena tako da svaka od njih pokazuje prema jednom vrhu tetraedra. Svaka od tih valnih funkcija povezuje se s jednim elektronom iz jednog atoma vodika.

Kovalentna veza je, kao i ionska, jaka veza. Energija veze je u rasponu između 1 i 5 eV.

Ionska i kovalentna veza predstavljaju dva krajnja slučaja. Često se događa djelomičan prijenos naboja s jednog atoma na drugi. Stoga mnoge molekule koje imaju različite atome posjeduju električni dipolni moment, tj. na jednom kraju preteže pozitivan naboj, a na drugome negativan. Takve molekule nazivamo polarnim molekulama, a primjer takve molekule je voda.

21.1.3 Van der Waalsova veza

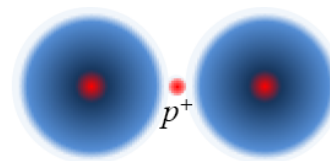
Za razliku od jakih veza, postoje i slabije veze. Jedna od njih je van der Waalsova veza – interakcija između dipolnih momenata atoma ili molekula.

Atomi kao ni mnoge molekule ne posjeduju permanentni dipolni moment. Međutim, fluktuirajuće raspodjele naboja mogu stvoriti fluktuirajuće dipolne momente. Ti dipolni momenti mogu inducirati dipolne momente u susjednim atomima. Ukupna dipol-dipol interakcija je privlačna i daje slabo vezanje atoma ili molekula. Potencijalna energija ove interakcije opada vrlo brzo s udaljenošću r , obično s $1/r^6$.

Van der Waalsova interakcija odgovorna je za ukapljvanje plemenitih plinova i dvoatomnih elementarnih plinova. Budući da je interakcija slaba, ukapljvanje je moguće samo na vrlo niskim temperaturama.

21.1.4 Vodikova veza

Druga vrsta slabe veze je vodikova veza. Ova veza specifična je za vodik. Naime, ionizirani H^+ je proton bez elektronskog oblaka. Tako ionizirani proton postavi se između dva atoma i u njima inducira polarizaciju. Inducirani dipoli privlače se s protonom i tako efektivno dolazi do privlačne sile među atomima. Energija veze je u pravilu manja od 0.5 eV. Iako relativno slaba, vodikova veza ima vrlo važnu ulogu u živom svijetu – ona povezuje dvije uzvojnice DNK. Također, vodikova veza zaslužna je za stvaranje strukture leda.



21.2 Molekulski spektri

Molekule posjeduju energijske nivoe povezane s rotacijom molekule kao cjeline i nivoe povezane s vibracijskim gibanjem atoma u molekuli međusobno. Prijelazi između tih energijskih nivoe rezultiraju molekularnim spektrima.

21.2.1 Rotacijski nivoi

Radi jednostavnosti, ograničimo se na proučavanje dvoatomne molekule. Zamislimo da se molekula sastoji od dvije točkaste mase udaljene $r_0 = r_1 + r_2$ povezane krutim štapom bez mase. Molekula može rotirati oko centra mase oko osi okomite na njihovu poveznicu. Ako molekula rotira oko centra mase kutnom brzinom ω , njezin zamah je $L = I \cdot \omega$, pri čemu je I moment tromosti molekule. Ako sustav promatramo klasično, u njemu nema potencijalne energije, a klasična rotacijska kinetička energija iznosi

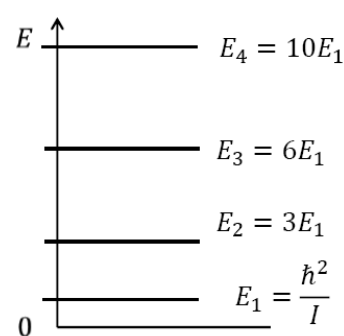
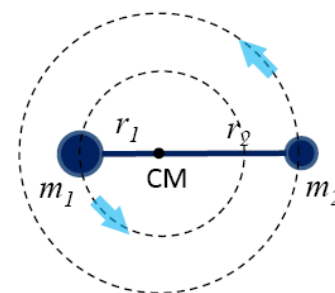
$$E = \frac{L^2}{2I} \quad (21.2)$$

Promatramo li problem kvantno, moramo uočiti da nema potencijala pa je problem sferno simetričan i rješenja su identična kutnom dijelu valne funkcije vodikova atoma. To znači da je zamah kvantiziran na isti način:

$$L^2 = l \cdot (l + 1) \hbar^2 \quad ; \quad l = 0, 1, 1, \dots \quad (21.3)$$

Pa su rotacijski energijski nivoi kvantizirani na sljedeći način:

$$E_l = l \cdot (l + 1) \frac{\hbar^2}{2I} \quad (21.4)$$



Osnovno stanje nema zamaha i energija mu je nula (nema rotacije). Razmak pobuđenih nivoe raste s porastom l .

Moment tromosti možemo izraziti pomoću *reducirane mase*

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (21.5)$$

Prema definiciji središta mase, možemo pisati

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0 \quad , \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_0 \quad (21.6)$$

pa je moment tromosti molekule

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu \cdot r_0^2 \quad . \quad (21.7)$$

Tako smo uvođenjem reducirane mase dvočestični problem matematički sveli na jednočestični.

21.2.2 Vibracijski nivoi

Molekule nisu potpuno krute. Udaljenost atoma u dvoatomnoj molekuli može odstupati od ravnotežne i tako dobivena potencijalna energija može se za mala odstupanja opisati harmonijskim potencijalom. I u ovom slučaju možemo problem gibanja dvaju tijela oko središta mase zamijeniti jednim tijelom reducirane mase μ .



Konstanta povratne sile ("opruge") K karakteristična je za određenu kemijsku vezu između dva atoma. Karakteristična frekvencija kemijske veze dana je s

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}} \quad , \quad (21.8)$$

A svojstvene energije dane su s

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad . \quad (21.9)$$

Energijski nivoi su ekvidistanti pa su svi prijelazi između nivoa iste frekvencije $\Delta E = \hbar \omega$. Energije vibracijskih prijelaza u molekulama obično padaju u infracrveno područje i to u rasponu 0.1 - 0.3 eV.

Treba napomenuti da će molekulski spektri imati vrpčastu strukturu. Ako povežemo rješenja za rotacijske i vibracijske energijske nivoe, vidimo da će svaki vibracijski nivo imati niz rotacijskih stanja pa će biti mogući razni prijelazi. Svaki prijelaz između stanja $\Delta n = \pm 1$ dat će jednu vrpцу u spektru. Unutar vrpce spektralne linije se razlikuju po kvantnom broju l .

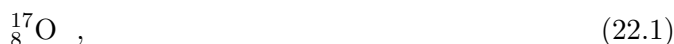
Poglavlje 22

Atomska jezgra

Terminologija

Atomska jezgra sastoji se od pozitivno nabijenih *protona* i neutralnih *neutrona*. Protoni i neutroni zajedničkim imenom se zovu *nukleoni*. To su čestice spina $\frac{1}{2}$. Razne atomske jezgre bez elektronskih oblaka zovu se *nuklidi*. Broj protona u jezgri zove se *atomski broj* i označava sa Z . Broj neutrona označava se s N . Ukupan broj nukleona u jezgri zove se *maseni broj* i označava $A = Z + N$.

Izotopi su nuklidi koji imaju isti atomski broj Z , a različite masene brojeve A . Kada se želi specificirati neki određeni izotop nekog kemijskog elementa, to se označava:



pri čemu je riječ o izotopu kisika koji ima atomski broj 8 i maseni broj 17 (dakle, ima 9 neutrona). Izotopi mogu biti stabilni ili radioaktivni. Radioaktivni izotopi su oni koji se raspadaju pri čemu emitiraju česticu i transformiraju se u drugi nuklid. Izotopi nekog elementa imaju identična kemijska svojstva, ali im se nuklearna svojstva bitno razlikuju.

22.1 Svojstva atomske jezgre

Premda smo do sada atomsku jezgru promatrali kao točkasti objekt koji miruje, jezgra je u stvari "živi" sistem u kojem se nukleoni ponekad gibaju brzinama reda veličine desetine brzine svjetlosti ($c/10$). Volumen jezgre proporcionalan je broju nukleona. Radijus neke jezgre može se približno opisati formulom

$$R = 1.2\sqrt[3]{A} \text{ fm.} \quad (22.2)$$

Jedan femtometar (fm) je 10^{-15}m . Lako je izračunati da je gustoća jezgre $\rho \approx 10^{15}\text{kg/m}^3$, što je dvanaest redova veličine više od tvari koje nas okružuju. U Svemiru postoje objekti takve gustoće – to su neutronske zvijezde.

Jezgru na okupu drži jaka nuklearna sila čiji doseg je $\approx 10^{-15}\text{m}$. Ta sila nije centralna sila i djeluje samo među prvim susjedima. Bez obzira što ne možemo dobro opisati djelovanje jake nuklearne sile, možemo postaviti potencijal i Schrödingerovu jednadžbu. Rješavanjem jednadžbe dobivamo energijske ljuske slično kao za elektrone u atomima. Ljuske se tada popunjavaju prema Paulijevom principu. Budući da su protoni i neutroni različite čestice, prva ljuska može primiti dva protona i dva neutrona (suprotnih spinova). To objašnjava činjenicu da je jedna od najstabilnijih jezgara upravo jezgra ${}^4\text{He}$, koja se naziva i α -čestica.

Jezgra može biti u pobuđenom stanju. Prijelaz iz pobuđenog u osnovno stanje događa se uz emisiju fotona čija energija je reda veličine MeV (megaelektronvolti). Takvi fotoni zovu se γ -zrake.

22.1.1 Energija vezanja

Masa jezgre M manja je od zbroja masa svih njezinih protona i neutrona. Razlika masa

$$\Delta M = Zm_p + Nm_n - M \quad (22.3)$$

naziva se *DEFEKT MASE*. Uz poznatu Einsteinovu relaciju o ekvivalentnosti mase i energije

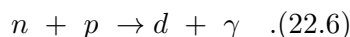
$$E = Mc^2 \quad (22.4)$$

možemo reći da je energija jezgre manja od energija njezinih konstituenata kad su odvojeni. Razlika tih energija

$$\Delta E = (mc^2) - Mc^2 = \Delta Mc^2 \quad (22.5)$$

jest *ENERGIJA VEZANJA* jezgre.

Možemo kao primjer izračunati energiju vezanja deuterona. U nuklearnoj reakciji spajanja protona i neutrona nastaje deutron (jezgra deuterija) i foton:



Ako s u označimo atomsku jedinicu mase, odgovarajuća energija je $uc^2 = 931.49\text{MeV}$. Masa neutrona je $m_n = 1.007277u$, a masa protona je $m_p = 1.008665u$. Masa deuterona je $m_d = 2.0136u$. Vidimo da je energija vezanja deuterona 2.22 MeV , a tolika je i energija fotona koji nastaje u reakciji.

Kao mjera jakosti vezanja jezgre može se definirati *ENERGIJA VEZANJA PO NUKLEONU*:

$$\Delta E_n = \frac{\Delta E}{A} \quad (22.7)$$

Najstabilnije jezgre imaju najveću ΔE_n . U nuklearnom periodnom sustavu elemenata najstabilnije su srednje teške jezgre oko željeza (Fe). Izuzetak od tog pravila je jezgra helija (${}^4\text{He}$) koja ima izuzetno stabilnu nuklearnu konfiguraciju.

22.2 Radioaktivnost

Velik broj nuklida je radioaktivan. Radioaktivni nuklidi spontano emitiraju čestice i time se transformiraju u neki drugi nuklid. Ovisno o tome koja vrsta čestice se emitira, govorimo o α -, β - ili γ -radioaktivnosti. Radioaktivni procesi potpuno su statistički. Ne možemo predvidjeti koja jezgra će se raspasti u sljedećoj sekundi. Možemo govoriti samo o vjerojatnosti da se to dogodi.

22.2.1 Zakon radioaktivnog raspada

Radioaktivni raspad bio je prvi dokaz da su zakoni koji opisuju subatomske procese statističke prirode. Zamislimo da imamo 1 mg metala prirodnog urana. U tom uzorku naći će se $2.5 \cdot 10^{18}$ atoma ${}^{238}\text{U}$. Svake sekunde prosječno 12 nuklida doživi α -raspad i transformira se u ${}^{234}\text{Th}$. Ne postoji nikakav način da predvidimo kojih 12 nuklida će se raspasti iduće sekunde.

Iako ne možemo predvidjeti koji nuklidi će se raspasti, možemo reći da ako uzorak sadrži N radioaktivnih jezgri, onda će brzina kojom se nuklidi raspadaju ($-dN/dt$) biti proporcionalna broju radioaktivnih nuklida:

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad , \quad (22.8)$$

pri čemu veličinu λ zovemo *konstanta raspada*. Broj raspada u sekundi zovemo *aktivnost* uzorka A .

Da bismo odredili N kao funkciju vremena, trebamo preurediti jednadžbu (??).

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad , \quad (22.9)$$

a zatim integrirati obje strane. Kao rezultat dobit ćemo

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad , \quad (22.10)$$

pri čemu je N_0 broj radioaktivnih nuklida u početnom trenutku. Jednako tako možemo pokazati da za aktivnost vrijedi:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \quad . \quad (22.11)$$

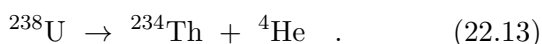
Vrijeme poluživota

Vrijeme nakon kojeg se u uzorku nalazi polovina početnih radioaktivnih nuklida nazivamo *vrijeme poluživota* i označavamo $T_{1/2}$. Lako je pokazati da vrijedi:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad . \quad (22.12)$$

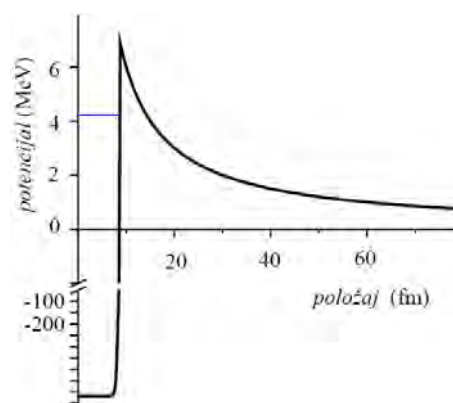
22.2.2 α -radioaktivnost

Jezgra ${}^4\text{He}$ naziva se α -čestica. Kada se neki teški nuklid transformira u drugi emitirajući α -česticu, govorimo o α -raspadu. Primjer jedne takve nuklearne reakcije je raspad ${}^{238}\text{U}$:



Ova reakcija događa se spontano jer produkti imaju manju masu od početnog ${}^{238}\text{U}$ ($\Delta m = 4.25 \text{ MeV}$). Nije potrebno dodavati energiju iz vanjskog izvora. Vrijeme poluraspada ${}^{238}\text{U}$ u ovoj reakciji je $4.5 \cdot 10^9$ godina. Zašto je tako mala vjerojnost raspada?

Opišimo jednostavan model α -raspada: U jezgri ${}^{238}\text{U}$, koju možemo zamisliti kao žitku masu, već je formirana α -čestica koja je na ostatak jezgre vezana jakim nuklearnom silom. Potencijal koji osjeća α -čestica vrlo je dubok, ali nuklearna sila je kratkodosežna. Na nešto većim udaljenostima prevladava odbojna Coulombova sila. Ukupni potencijal skiciran je na slici desno. Budući da je energija formirane α -čestice veća od nule, ona kao kvantni objekt može proći kroz potencijalnu barijeru – pojavu kvantnog tuneliranja već smo opisali u 19. poglavlju. S obzirom da je potencijalna barijera relativno visoka i široka, vjerojatnost "bijega" je vrlo mala pa to objašnjava dugo vrijeme života ${}^{238}\text{U}$.



22.2.3 β -radioaktivnost

Kada se neki nuklid transformira u drugi emitirajući elektron ili pozitron, govorimo o β -raspadu. I ovo je spontani proces u kojem se oslobađa energija. Proces je statistički s određenim vremenom poluživota. Navedimo jedan primjer β^- raspada



čije vrijeme poluživota je 14.3 dana, te primjer β^+ raspada



čije vrijeme poluživota je 13 sati. Oznaka ν predstavlja *neutrino* – neutralnu česticu s vrlo malo masom ili bez mase,¹ koja se emitira iz jezgre istodobno s elektronom ili pozitronom. U β -raspadu sačuvan je i naboj i broj nukleona.

Valja napomenuti da β -čestice i neutrini ne postoje u jezgri prije raspada. Oni se stvaraju tijekom raspada baš kao što se tijekom elektronskih prijelaza u atomu stvara foton. Za reakciju pretvaranja neutrona u proton, odnosno protona u neutron, odgovorna je slaba nuklearna sila.

22.2.4 γ -radioaktivnost

Postoje nuklearni procesi u kojima se ne mijenja ni atomski broj Z ni maseni broj M nekog nuklida. Atomska jezgra može biti u pobuđenom stanju, baš kao što elektron u atomu može biti u pobuđenom stanju. Prijelaskom u niže energijsko stanje (najčešće u osnovno stanje) emitira se foton. Fotoni koji se emitiraju u nuklearnim procesima imaju jako visoke energije pa za njih koristimo naziv γ -zrake.

¹Još nije eksperimentalno utvrđeno ima li neutrino masu. Eksperimenti mogu samo reći koja je gornja granica iznosa mase neutrina.

22.2.5 Radioaktivnost u prirodi

Najčešći izvor zračenja u prirodi su kozmičke zrake. Srećom, veći dio njih se zaustavlja u atmosferi prije no što dođu do površine Zemlje. Drugi važan izvor zračenja su radioaktivni izotopi koji su nastali istovremeno s nastankom Zemlje, ali imaju jako dugo vrijeme poluraspada pa se nisu dosad svi raspali. To su izotopi urana (U), torija (Th), ^{40}K , itd. Oni se nalaze u mineralima koje koristimo kao građevni materijal (beton, cement). Stoga su naše kuće radioaktivne, ali najčešće je riječ o α -zračenju koje nije jako prodorno i od kojeg nas štiti koža ili odjeća. Međutim, kao produkt raspada često nastaje plemeniti plin radon (Rn) koji je također radioaktivan. On može biti štetan ako ga udišemo pa se onda raspada u plućima. Radon je teži od zraka pa se najčešće skuplja pri podu (npr. u podrumima). Stoga je korisno često prozračivanje prostorija.

22.2.6 Mjerenje radijacije

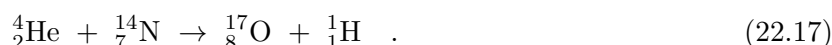
Jedinica za *apsorbiranu dozu* zračenja je grej (Gy). Definiran je kao

$$1\text{Gy} = 1 \frac{\text{J}}{\text{kg}} . \quad (22.16)$$

Nema svaka vrsta zračenja jednak utjecaj na žive organizme. Zato se definira *ekvivalentna doza* zračenja čija jedinica je sivert (Sv). Preporuka je da osoba koja nije profesionalno vezana uz rad s radijacijom ne bi trebala godišnje primiti dozu veću od 5 mSv. Korisno je znati da čovjek godišnje udahne radona ekvivalentne doze 1.2 mSv, a jedno rendgensko slikanje pluća je ekvivalentno 1 mSv. Tijekom jednog prekooceanskog leta, čovjek od kozmičkog zračenja dobije ekvivalentnu dozu od 0.1 mSv.

22.3 Nuklearne reakcije

Raspadi koje smo proučavali u prošlom odjeljku događali su se spontano. Ništa nije trebalo učiniti da bi se oni dogodili. Ovdje ćemo proučavati nuklearne reakcije koje su rezultat bombardiranja nuklida česticama, tj. reakcije koje se ne događaju spontano u prirodi. Prvi takav pokus učinio je Rutherford 1919. godine. On je α -česticama bombardirao dušik ^{14}N i tako dobio ^{17}O i proton:



α -čestice su u ovom pokusu potjecale iz prirodnog izvora. Razlika masa ulaznih i izlaznih čestica daje energiju reakcije ($\Delta M \cdot c^2$).

Jedan drugi primjer nuklearne reakcije je bombardiranje kobalta neutronima:



Ova reakcija često se koristi u medicini u tzv. kobaltnim izvorima.

Nuklearne reakcije izvor su velikih količina energije. Postoje dvije osnovne vrste reakcija koje se koriste za dobivanje energije: nuklearna fuzija i nuklearna fisija.

Nuklearna fuzija

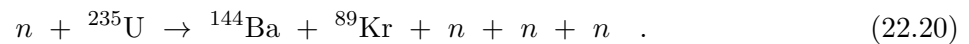
Najstabilnija jezgra je željezo. U reakcijama u kojima sudjeluju lakše jezgre, njihovim spajanjem u teže jezgre oslobađa se energija. Ovaj proces zove se nuklearna fuzija. Primjer takve reakcije je



Ovakve reakcije događaju se na Suncu i one predstavljaju izvor energije koju Sunce zrači. Postoje pokušaju da se ovakve reakcije koriste kao izvor energije na Zemlji. Premda su reakcije uspješno izvedene na Zemlji (npr. projekt ITER), još uvijek se nije uspjelo postići da takav izvor energije bude komercijalno isplativ.

Nuklearna fisija

Jezgre teže od željeza mogu dati energiju svojim raspadom. Ako želimo ubrzati proces, teške jezgre gađamo lakšim česticama, npr. neutronima. Takav proces zove se nuklearna fisija. Jedan primjer ovakve reakcije je sudar sporog neutrona s jezgrom ^{235}U :



U ovoj reakciji oslobađa se energija, a dobiveni neutroni se usporavaju prolaskom kroz tešku vodu (D_2O) kako bi mogli sudjelovati u sljedećoj reakciji. Ovakav proces naziva se lančana reakcija. U svakom sljedećem trenutku broj reakcija raste. Ako se taj porast ne kontrolira, dolazi do eksplozije. U nuklearnim elektranama moguće je kontrolirati broj neutrona koji sudjeluju u reakciji. Govorimo o kontroliranoj fisiji, a oslobođena energija pretvara se u toplinu pa zatim u električnu energiju.