Fourierovi redovi i primjene

Bilješke s predavanja i vježbi

Sastavili prof. dr. sc. Hrvoje Šikić i prof. dr. sc. Vjekoslav Kovač

Ažurirano 13. lipnja 2025.

Sadržaj

Uvod

- Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)
- 1807. počeo s proučavanjem jednadžbe provođenja topline:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

- 1811. najavio svoje rezultate.
- 1822. tiskao svoje rezultate u knjizi *Analitička teorija topline.* Tvrdio je da se svaka omeđena funkcija $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ može prikazati pomoću trigonometrijskog reda

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

  Danas znamo da uz takvu tvrdnju treba precizirati i na koji način se promatra konvergencija reda.

- 1829. Dirichlet je dao protuprimjer

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [-\pi, \pi], \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-\pi, \pi] \end{cases}$$

  pa tako nešto ipak ne možemo očekivati za sasvim proizvoljnu funkciju. Dirichlet je i prvi dao dovoljne uvjete na f uz koje gornji prikaz doista ima smisla i vrijedi "po točkama".

- Fourier je pretežno razmišljao fizikalno, ali je i uočio ortogonalnost članova, tj.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \cos lx \, dx = 0 \qquad \text{za } k \neq l,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, \sin lx \, dx = 0 \qquad \text{za } k \neq l,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \sin lx \, dx = 0 \qquad \text{za svake } k, l$$

  te da se množenjem reda s $\cos kx$ ili $\sin kx$ i integriranjem mogu dobiti koeficijenti a_k, odnosno b_k.

Poglavlje 1

Osnovni rezultati

1.1 Kratko o teoriji mjere

Označimo s $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ najmanju familiju podskupova od $\mathbb{R}$ koja sadrži sve otvorene intervale te je zatvorena na komplementiranje i prebrojive unije:

$$\langle a,b\rangle \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \quad a,b\in\mathbb{R},\ a<b,$$

$$A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}) \implies A^c=\mathbb{R}\setminus A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ niz u } \mathscr{B}(\mathbb{R}) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Familiju $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ nazivamo *familijom Borelovih skupova.* Posebno uočimo da se otvoreni i zatvoreni skupovi nalaze u $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Može se pokazati da postoji točno jedna skupovna funkcija $\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ takva da je $\lambda(\langle a,b\rangle) = b-a$, za svake $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ i da za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ međusobno disjunktnih skupova iz $\mathscr{B}(\mathbb{R})$vrijedi

$$\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n).$$

Zovemo je *Lebesgueova mjera.* Uočimo $\lambda(\{a\})=0$ za svaki $a\in\mathbb{R}$ jer je

$$\underbrace{\lambda(\langle a-1,a+1\rangle)}_{=2} = \underbrace{\lambda(\langle a-1,a\rangle)}_{=1} + \lambda(\{a\}) + \underbrace{\lambda(\langle a,a+1\rangle)}_{=1} \implies \lambda(\{a\})=0.$$

Dakle,

$$\lambda([a,b]) = \lambda([a,b\rangle) = \lambda(\langle a,b]) = \lambda(\langle a,b\rangle) = b-a$$

i osim toga je

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [n,n+1\rangle\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda([n,n+1\rangle) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1 = +\infty.$$

Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je *izmjeriva* ako vrijedi $f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R}))\subseteq\mathscr{B}(\mathbb{R})$, tj.

$$B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B)\in\mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Prisjetimo se da je funkcija f *neprekidna* ako vrijedi

$$U \text{ otvoren} \implies f^{-1}(U) \text{ otvoren}.$$

Kako je svaki otvoren skup Borelov, može se pokazati (premda nije sasvim očigledno) da je svaka neprekidna funkcija ujedno i izmjeriva. Ukoliko su funkcije f, g i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ izmjerive, tada su izmjerive i funkcije

$$f \pm g,\ cf,\ \frac{f}{g},\ fg,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n,\ \lim_n f_n$$

kad god su dobro definirane. S druge strane, ako je $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ izmjeriva funkcija, tada je formulom

$$f_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\rangle)} + n\mathbb{1}_{f^{-1}([n,+\infty\rangle)}$$

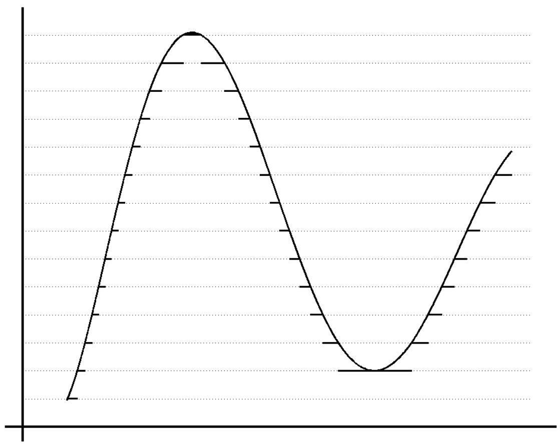
dan niz izmjerivih funkcija $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ koje poprimaju samo konačno mnogo vrijednosti (to su tzv. *jednostavne funkcije*) te vrijedi $f_n \nearrow f$, tj.

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ je rastući niz i } \lim_n f_n(x) = f(x) \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Ovdje smo prešutno koristili:

$$B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \iff \text{njegova karakteristična funkcija } \mathbb{1}_B \text{ je izmjeriva,}$$

što se vrlo lako provjeri. Ukratko, svaka nenegativna izmjeriva funkcija se može prikazati kao rastući limes jednostavnih nenegativnih izmjerivih funkcija, pogledajte sliku 1.1.



Slika 1.1: Aproksimacija funkcije jednostavnim funkcijama.

Realnu funkciju f rastavljamo na pozitivni i negativni dio:

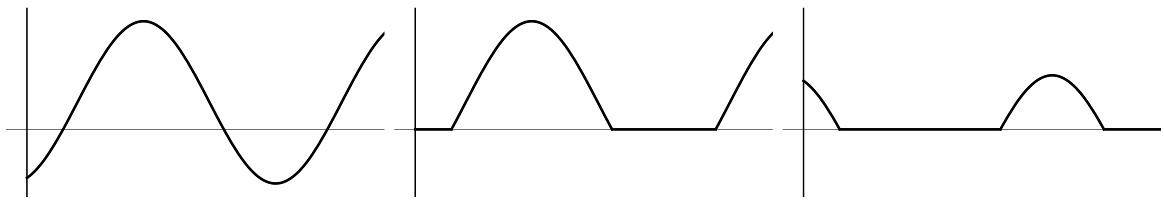
$$f = f^+ - f^-,$$

$$f^+ := \max\{f,\ 0\} \quad f^- := \max\{-f,\ 0\}.$$

Pogledajte sliku 1.2 za ilustraciju.

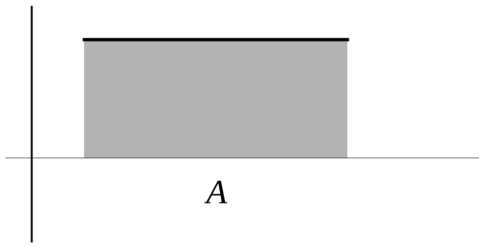
Označimo s $\mathscr{J}$ skup svih jednostavnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje iščezavaju izvan skupa konačne mjere, tj. $\lambda(\underbrace{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}_{\{f\neq 0\}}) < +\infty$. Pokaže se da postoji točno jedan linearni funkcional $I^0 : \mathscr{J} \to \mathbb{R}$ takav da je

$$I^0(\mathbb{1}_A) = \lambda(A) \text{ za svaki } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \text{ konačne mjere.}$$



Slika 1.2: Funkcije f, f^+, f^- redom.

Taj funkcional interpretiramo kao integral jednostavne funkcije i motivirani smo uobičajenom vizualizacijom integrala kao "površine ispod grafa", vidjeti sliku 1.3. Tada svakako za pro-



Slika 1.3: Mjera skupa kao površina ispod grafa karakteristične funkcije.

izvoljne $c_k \in \mathbb{R}$ i skupove A_k konačnih mjera imamo

$$I^0\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda(A_k).$$

Označimo s $\mathscr{I}^+$ skup svih nenegativnih izmjerivih funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$. Može se pokazati da postoji jedinstveno preslikavanje (tj. funkcional, ali nije linearan) $I^+ : \mathscr{I}^+ \to [0, +\infty]$ sa svojstvima:

$$I^+(f) = I^0(f) \quad za\ f \in \mathscr{J} \cap \mathscr{I}^+, \tag{1.1.1}$$

$$I^+(\alpha f + \beta g) = \alpha I^+(f) + \beta I^+(g) \quad \text{za } f, g \in \mathscr{I}^+,\ \alpha, \beta \in [0, +\infty\rangle, \tag{1.1.2}$$

$$0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots \text{ niz u } \mathscr{I}^+ \implies I^+(\lim_n f_n) = \lim_n I^+(f_n). \tag{1.1.3}$$

Posljednje svojstvo se ponekad naziva *(Lebesgueov) teorem o monotonoj konvergenciji* (*LTMK*).

Reći ćemo da je funkcija $f \in \mathscr{I}^+$ *integrabilna* ako je $I^+(f) < +\infty$. Uvodimo novu oznaku

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \quad \text{ili} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{d\lambda(x)}_{dx} \tag{1.2}$$

umjesto $I^+(f)$. Taj broj nazivamo *(Lebesgueovim) integralom* od f. Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ izmjeriva i barem jedan od brojeva $I^+(f^+)$ i $I^+(f^-)$ je konačan, tada *integral* (u proširenom smislu) funkcije f definiramo

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda := I^+(f^+) - I^+(f^-). \tag{1.3}$$

Uočimo da je taj broj iz $[-\infty, +\infty]$. Kažemo da je takva funkcija f *integrabilna* ako je štoviše $I^+(f^+) < +\infty$ i $I^+(f^-) < +\infty$. Kako je $|f| = f^+ + f^-$, lako se vidi:

$$f \text{ je integrabilna} \overset{\text{def}}{\iff} f^+, f^- \text{ su integrabilne} \iff |f| \text{ je integrabilna}.$$

Osim toga, vrijedi *nejednakost trokuta*:

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \Big| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda. \tag{1.4}$$

Jednostavno se pokaže da je integral linearni funkcional na vektorskom prostoru svih realnih integrabilnih funkcija, a slijedi i

$$f \leqslant g \implies \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda, \tag{1.5}$$

tj. integral je *monoton*.

Nešto zahtjevnije je dokazati tzv. *Lebesgueov teorem o dominiranoj konergenciji* (*LTDK*): Ako su $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija i g integrabilna funkcija takve da vrijedi:

$$|f_n| \leqslant g \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}, \tag{1.6.1}$$

$$\text{postoji } f(x) := \lim_n f_n(x) \in \mathbb{R} \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}, \tag{1.6.2}$$

tada su f_n i f također integrabilne i vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda.$$

Napomenimo kako pretpostavke (1.6) čak niti ne moraju biti ispunjene na nekom skupu mjere 0, tj. dozvoljavamo skup izuzetaka mjere 0.

Ako je $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ i postoji integral funkcije $\mathbb{1}_A f$, onda pišemo

$$\int_A f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A f \, d\lambda. \tag{1.7}$$

Pritom ne moramo zahtijevati čak ni da je f definirana izvan skupa A, a ako i jest, stavljamo njene vrijednosti izvan A na 0. Sljedeća činjenica pokazuje kako Lebesgueov integral poopćuje Riemannov integral na segmentu. Ako je f Riemann-integrabilna na $[a, b]$, tada je f i Lebesgue-integrabilna na $[a, b]$ te vrijedi

$$\underbrace{\int_a^b f(x) \, dx}_{\text{R-int.}} = \underbrace{\int_{[a,b]} f \, d\lambda}_{\text{L-int.}}. \tag{1.8}$$

Pritom ovdje Lebesgue-integrabilnost treba shvatiti kao da se f može promijeniti na skupu mjere 0 tako da postane izmjeriva i integrabilna. (Naime, ne mora svaka Riemann-integrabilna funkcija biti baš Borel-izmjeriva, nego samo Lebesgue-izmjeriva.)

Neka su $1 \leqslant p < +\infty$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ i f izmjeriva funkcija. Definiramo

$$\|f\|_{p,A} := \Big(\int_A |f|^p \, d\lambda \Big)^{1/p} \in [0, +\infty]. \tag{1.9}$$

Uočimo:

$$\|f\|_{p,A} = 0 \iff \lambda(\{\mathbb{1}_A f \neq 0\}) = 0, \tag{1.10}$$

tj. $f = 0$ g.s. na A. Općenito, kažemo da neko svojstvo vrijedi *gotovo svuda* na A (*g.s. na* A) ako ono vrijedi na $A \setminus N$ za neki skup N koji ima mjeru 0. Tako npr. pišemo:

$$\begin{aligned} f = g \ \text{ g.s. na } A \quad &\iff \quad \lambda(\{f \neq g\} \cap A) = 0, \\ f \leqslant g \ \text{ g.s. na } A \quad &\iff \quad \lambda(\{f > g\} \cap A) = 0. \end{aligned}$$

Korisno je znati:

$$f \geqslant 0 \text{ izmjeriva}, \int_A f\, d\lambda = 0 \implies f = 0 \text{ g.s. na } A.$$

Ako je $1 < p < +\infty$ i $q = \frac{p}{p-1}$, tada vrijedi *Hölderova nejednakost*, tj. za izmjerive f, g je

$$\|fg\|_{1,A} \leqslant \|f\|_{p,A}\|g\|_{q,A}. \tag{1.11}$$

(Ovo će biti pokazano kao rješenje zadatka 1.1.8.) Definiramo

$$\mathscr{L}^p(A) := \{f\colon A \to \mathbb{R} \text{ izmjeriva } : \|f\|_{p,A} < +\infty\}. \tag{1.12}$$

Ako su $f, g \in \mathscr{L}^p(A)$ onda je

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p \leqslant (2\max\{|f|,|g|\})^p = 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\} \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

$$\implies \int_A |f+g|^p\, d\lambda \leqslant 2^p\Big(\int_A |f|^p\, d\lambda + \int_A |g|^p\, d\lambda\Big) < +\infty \implies f+g \in \mathscr{L}^p(A).$$

Osim toga, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{L}^p(A)$ implicira

$$\int_A |\alpha f|^p\, d\lambda = |\alpha|^p \int_A |f|^p\, d\lambda < +\infty \implies \alpha f \in \mathscr{L}^p(A).$$

To znači da je $\mathscr{L}^p(A)$ realni vektorski prostor.

Ako je $p > 1$ i $\|f+g\|_{p,A} > 0$, uzmimo $q = \frac{p}{p-1}$ i računajmo:

$$\begin{aligned}
&\int_A |f+g|^p\, d\lambda \leqslant \int_A |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)\, d\lambda \\
&= \int_A |f||f+g|^{p-1}\, d\lambda + \int_A |g||f+g|^{p-1}\, d\lambda \\
&\quad \text{Hölderova nejednakost} \\
&\leqslant \|f\|_{p,A}\big\||f+g|^{p-1}\big\|_{q,A} + \|g\|_{p,A}\big\||f+g|^{p-1}\big\|_{q,A} \\
&\quad \text{koristeći } (p-1)q = p \\
&= \|f\|_{p,A}\|f+g\|_{p,A}^{p/q} + \|g\|_{p,A}\|f+g\|_{p,A}^{p/q} \qquad / : \|f+g\|_{p,A}^{p/q} > 0 \\
&\implies \underbrace{\|f+g\|_{p,A}^{p-\frac{p}{q}}}_{\|f+g\|_{p,A}} \leqslant \|f\|_{p,A} + \|g\|_{p,A}.
\end{aligned}$$

Preostaje iskoristiti $p - \frac{p}{q} = 1$. Slučajevi $p = 1$ i $\|f+g\|_{p,A} = 0$ su jednostavni. Prethodnim računom dobili smo *nejednakost Minkovskog*:

$$f, g \in \mathscr{L}^p(A),\quad 1 \leqslant p < +\infty \implies \|f+g\|_{p,A} \leqslant \|f\|_{p,A} + \|g\|_{p,A}. \tag{1.13}$$

Prema tome, $\|\cdot\|_{p,A}$ ima sljedeća svojsta:

$$\|f\|_{p,A} \in [0, +\infty\rangle \text{ za } f \in \mathscr{L}^p(A), \tag{1.14.1}$$

$$\|\alpha f\|_{p,A} = |\alpha|\|f\|_{p,A} \text{ za } f \in \mathscr{L}^p(A),\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.14.2}$$

$$\|f+g\|_{p,A} \leqslant \|f\|_{p,A} + \|g\|_{p,A} \text{ za } f, g \in \mathscr{L}^p(A), \tag{1.14.3}$$

$$\|f\|_{p,A} = 0 \iff f = 0 \quad \text{g.s. na } A. \tag{1.14.4}$$

Svojstvo (1.14.4) nije dovoljno jako da bismo bismo imali normu. Iz (1.10) se vidi da je formulom

$$f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} \|f-g\|_{p,A} = 0 \iff f = g \quad \text{g.s. na } A$$

dana relacija ekvivalencije na $\mathscr{L}^p(A)$. Kvocijentni skup $\mathscr{L}^p(A)/_\sim$ označavamo s $\mathrm{L}^p(A)$ te klasu od f umjesto sa $[f]$ obično označavamo opet sa f. Uočimo da je sada $\mathrm{L}^p(A)$ vektorski prostor i da je formulom

$$\|[f]\|_{p,A} := \|f\|_{p,A}$$

dana norma (koju opet označavamo $\|\cdot\|_{p,A}$) na kvocijentnom vektorskom prostoru $\mathrm{L}^p(A)$. Ubuduće ne naglašavamo razliku između funkcije $f \in \mathscr{L}^p(A)$ i pripadne klase $[f] \in \mathrm{L}^p(A)$, kojoj je f predstavnik.

U slučaju $p = 2$ imamo čak i skalarni produkt

$$\langle f, g\rangle_A := \int_A f\overline{g}\, d\lambda \tag{1.15}$$

i njime inducirana norma je baš $\|\cdot\|_{2,A}$, tj.

$$\|f\|_{2,A}^2 = \langle f, f\rangle_A. \tag{1.16}$$

Kompleksne funkcije rastavljamo na realni i imaginarni dio. Kompleksna funkcija je *izmjeriva* ako i samo ako su joj realni i imaginarni dio izmjerive funkcije. Nadalje, kompleksna funkcija je *integrabilna* ako i samo ako su joj realni i imaginarni dio integrabilne funkcije. Za integrabilnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integral se definira

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda := \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{Re} f)\, d\lambda + i \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{Im} f)\, d\lambda$$

i sve prethodno rečeno ostaje vrijediti. Možda malo maštovitiji dokaz iziskuje jedino nejednakost trokuta, koja se provjeri ovako: Neka je $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = re^{it} \in \mathbb{C}$ za neke $r \geqslant 0$ i $t \in [0, 2\pi\rangle$. Tada imamo

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda\Big| = r = e^{-it}\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \mathrm{Re}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} (e^{-it} f)\, d\lambda}_{\in\mathbb{R}}\Big) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}(e^{-it} f)\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda.$$

I za kompleksne funkcije imaju smisla prostori $\mathscr{L}^p(A)$ i $\mathrm{L}^p(A)$. Štoviše, te oznake će nam obično označavati upravo kompleksne vektorske prostore. Ako u nekom kontekstu želimo naglasiti da radimo samo s realnim funkcijama, tada ćemo to označiti u indeksu te pisati $\mathscr{L}^p_{\mathbb{R}}(A)$ i $\mathrm{L}^p_{\mathbb{R}}(A)$.

U kasnijim će nam poglavljima ponekad trebati tzv. *Tonelli-Fubinijev teorem* o zamjeni integrala. Strogo govoreći, on se tiče dvodimenzionalnih funkcija koje su izmjerive obzirom na dvodimenzionalnu Borelovu σ-algebru $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, a promatra se integral obzirom na dvodimenzionalnu Lebesgueovu mjeru λ_2. Sve prethodno rečeno vrijedi i u više dimenzija, a nismo to željeli posebno isticati jer se u kolegiju pretežno bavimo jednodimenzionalnim funkcijama. Uzmimo proizvoljne $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Ako je $f \colon \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty]$ izmjeriva funkcija ili je $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ integrabilna na $A \times B$ obzirom na λ_2, tada vrijedi

$$\int_{A\times B} f(x,y) d\lambda_2(x,y) = \int_A \Big(\int_B f(x,y) d\lambda(y)\Big) d\lambda(x) = \int_B \Big(\int_A f(x,y) d\lambda(x)\Big) d\lambda(y),$$

pri čemu svi gornji integrali imaju smisla (za g.s. x odnosno za g.s. y). Posebno vidimo da dva jednostruka integrala mogu zamijeniti mjesta. Obično se ovaj teorem najprije koristi za $|f|$, kako bi se uopće pokazala integrabilnost kompleksne funkcije f, a potom on omogućava računanje dvostrukog integrala od f.

* * *

Zadatak 1.1.1. (a) Navedite primjer neograničenog skupa konačne mjere.

(b) Navedite primjer neograničene funkcije s konačnim integralom.

Rješenje. (a) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n, n + \frac{1}{2^n}\right\rangle$

$$\lambda(A) = \lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n, n + \frac{1}{2^n}\right\rangle\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\Big(\left[n, n + \frac{1}{2^n}\right\rangle\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

(b) $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mathbb{1}_{[n, n+\frac{1}{4^n}\rangle}$

Definiramo $f_N = \sum_{n=1}^{N} 2^n \mathbb{1}_{[n, n+\frac{1}{4^n}\rangle}$ pa vidimo $f_N \nearrow f$. Stoga vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \overset{\text{LTMK}}{=} \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_N \, d\lambda = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} 2^n \lambda\Big(\left[n, n + \frac{1}{4^n}\right\rangle\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Zadatak 1.1.2. (a) Za $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ stavimo

$$A \sim B \overset{\text{def}}{\iff} \lambda(A \triangle B) = 0.$$

Dokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(b) Za $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ konačne mjere stavimo $d(A, B) := \lambda(A \triangle B)$. Dokažite da je d metrika na Borelovim skupovima konačne mjere "kvocijentiranima" po $\sim$.

Rješenje. (a) Refleksivnost: $A \triangle A = \emptyset \iff A \sim A$.
Simetričnost: $A \sim B \iff \lambda(A \triangle B) = 0 \iff \lambda(B \triangle A) = 0 \iff B \sim A$.
Tranzitivnost:

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \tag{1.17}$$

$$A \sim B \text{ i } B \sim C \implies \lambda(A \triangle C) \leqslant \underbrace{\lambda(A \triangle B)}_{=0} + \underbrace{\lambda(B \triangle C)}_{=0}$$

$$\implies \lambda(A \triangle C) = 0 \implies A \sim C.$$

(b) $d(A, B) \in [0, +\infty\rangle$,
$d(A, B) = 0 \iff A \sim B$ (određuju istu klasu) ,
$d(A, B) = d(B, A)$,
$d(A, C) \overset{(1.17)}{\leqslant} d(A, B) + d(B, C)$.

Zadatak 1.1.3. Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna, a $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, pokažite da je funkcija $f' : I \to \mathbb{R}$ izmjeriva.

Rješenje. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n} \underbrace{\frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}}_{f_n}.$

$f' = \lim_n f_n$ je limes niza izmjerivih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zadatak 1.1.4. (a) Pokažite da je Dirichletova funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ izmjeriva.

(b) Pokažite da je Dirichletova funkcija iz (a) dijela dvostruki limes po točkama neprekidnih funkcija, tj. $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{j\to\infty} f_{j,k}(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, pri čemu su $f_{j,k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije za $j, k \in \mathbb{N}$.

Rješenje. (a) Svaki prebrojivi skup je očigledno Borelov pa je $\mathbb{Q} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, odakle slijedi i $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Za svaki Borelov skup B je $f^{-1}(B)$ jednako $\emptyset$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ili $\mathbb{R}$ pa izmjerivost slijedi.

(b) Možemo uzeti

$$f_{j,k}(x) := \big(\cos(k!\pi x)\big)^{2j}.$$

Naime, ako je x racionalan, tada je za dovoljno velike $k \in \mathbb{N}$ broj $k!x$ cijeli pa je $\cos(k!\pi x) = -1$ ili 1, odakle slijedi

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} f_{j,k}(x) = \lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} 1 = 1.$$

S druge strane, ako je x iracionalan tada ni za koji $k \in \mathbb{N}$ broj $k!x$ nije cijeli pa je $-1 < \cos(k!\pi x) < 1$, odakle je

$$\lim_{j\to\infty} \big(\cos(k!\pi x)\big)^{2j} = 0,$$

tj.

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{j\to\infty} f_{j,k}(x) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

Zadatak 1.1.5. Izračunajte limes $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}\,dx.$

Rješenje. Ako stavimo $f_n(x) = \dfrac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}$, lako vidimo da vrijedi (jer eksponencijalna funkcija po n raste brže od polinoma u n):

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

odnosno $f = 0$ g.s. Nadalje,

$$|f_n| = \frac{1+nx^2}{1+nx^2+\binom{n}{2}x^4+\dots} \leqslant 1 =: g(x)$$

i g je integrabilna na $[0,1]$ zbog $\int_0^1 1\,dx = 1 < +\infty$ pa vrijedi:

$$\lim_n \int_{[0,1]} f_n\,d\lambda \overset{\text{LTDK}}{=} \int_0^1 f\,d\lambda = 0.$$

Zadatak 1.1.6. (a) $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $t_0 \in I$.
Neka je $f : A \times I \to \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi

- $A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ je izmjeriva za svaki $t \in I$,
- $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ ima limes u t_0 za svaki $x \in A$.

Ako postoji $g \in \mathscr{L}^1(A)$ takva da je $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ za $x \in A,\ t \in I$, dokažite:

$$\lim_{t\to t_0} \int_A f(x,t)\, d\lambda(x) = \int_A \Big(\lim_{t\to t_0} f(x,t)\Big)\, d\lambda(x).$$

(b) $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval.
Neka je $f : A \times I \to \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi

- $A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ je u $\mathscr{L}^1(A)$ za svaki $t \in I$,
- $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ je derivabilna na I za svaki $x \in A$.

Ako postoji $g \in \mathscr{L}^1(A)$ takva da je $|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leqslant g(x)$ za $x \in A,\ t \in I$, dokažite:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A f(x,t)\, d\lambda(x) = \int_A \Big(\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\Big)\, d\lambda.$$

Rješenje. (a) Uzmimo proizvoljni niz $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u I koji konvergira prema t_0.

$$h(x) := \lim_{t\to t_0} f(x,t), \quad h_n(x) := f(x,t_n).$$

Trebamo dokazati da je $\lim_n \int_A h_n\, d\lambda = \int_A h\, d\lambda$, ali to je upravo primjena LTDK, kojeg smijemo iskoristiti zbog $|h_n(x)| \leqslant g(x)$.

(b) Uzmimo proizvoljni niz $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $I \setminus \{t_0\}$ koji konvergira prema t_0.

$$h(x) := \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} f(x,t), \quad h_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

Dakle, imamo $h(x) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(x,t)-f(x,t_0)}{t-t_0} = \lim_n h_n(x)$ i trebamo pokazati $\lim_n \int h_n\ d\lambda = \int h\ d\lambda$. Po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti je $|h_n(x)| = \frac{|f(x,t_n)-f(x,t_0)|}{|t_n-t_0|} \leqslant \sup_{t\in I} |\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leqslant g(x)$ pa opet možemo iskoristiti LTDK.

Zadatak 1.1.7. Za koje parametre $\alpha > 0$ se funkcije:

- $f(x) := \frac{1}{x^\alpha} \mathbb{1}_{[1,+\infty\rangle}(x)$,
- $g(x) := \frac{1}{x^\alpha} \mathbb{1}_{\langle 0,1]}(x)$

nalaze u prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

Rješenje. Za $\alpha \neq \frac{1}{2}$ možemo računati

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^{2\alpha}} \mathbb{1}_{[1,+\infty\rangle}(x)\, d\lambda(x) \\
&\overset{\text{LTMK}}{=} \lim_n \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^{2\alpha}} \mathbb{1}_{[1,n]}(x)\, d\lambda(x) = \lim_n \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x^{2\alpha}}\, dx}_{\text{Riemannov int.}} \\
&= \lim_n \frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\Big|_1^n = \underbrace{\lim_n \frac{1}{\underbrace{1-2\alpha}_{\neq 0}}(n^{1-2\alpha} - 1)}_{<+\infty \iff 1-2\alpha<0 \iff \alpha>\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Osim toga, za $\alpha = \frac{1}{2}$ imamo

$$\|f\|_2^2 = \lim_n \int_1^n \frac{dx}{x} = \lim_n (\ln n - \ln 1) = +\infty.$$

Dakle, $f \in \mathrm{L}^2 \iff \alpha > \frac{1}{2}$.

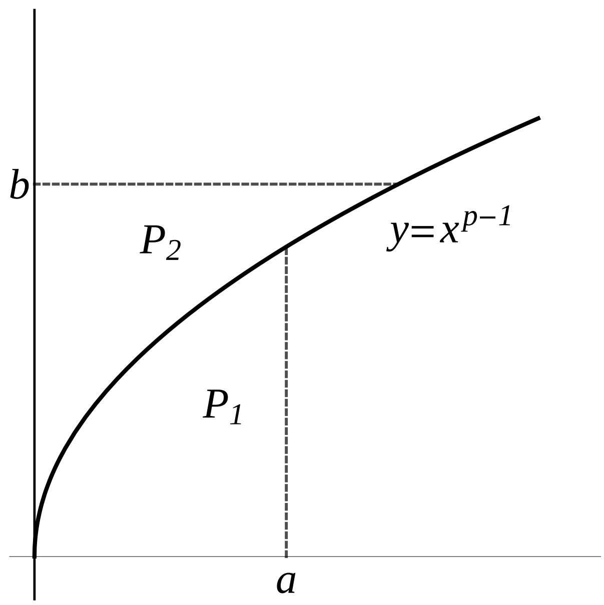
Sasvim analogno se pokazuje $g \in \mathrm{L}^2 \iff \alpha < \frac{1}{2}$, pri čemu u računu ovog puta g aproksimiramo funkcijama oblika $g\mathbb{1}_{[\frac{1}{n},1]}$.

Zadatak 1.1.8. Dokažite Hölderovu nejednakost i diskutirajte kada se postiže jednakost.

Rješenje. $1 < p, q < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Želimo pokazati $\|fg\|_{1,A} \leqslant \|f\|_{p,A}\|g\|_{q,A}$, tj.

$$\int_A |fg|\, d\lambda \leqslant \left(\int_A |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g|^q\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Najprije pokažimo da za $a, b \in [0, +\infty\rangle$ vrijedi $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.



Slika 1.4: Skica nejednakosti $P \leqslant P_1 + P_2$.

Krivulja na slici 1.4 je dana jednadžbom

$$y = x^{p-1} \iff x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1} \quad \text{jer je} \quad (p-1)(q-1) = 1 \iff pq - p - q = 0.$$

Označene površine iznose

$$P_1 = \int_0^a x^{p-1}\, dx = \frac{x^p}{p}\Big|_0^a = \frac{a^p}{p}, \quad P_2 = \int_0^b y^{q-1}\, dy = \frac{b^q}{q},$$

dok je površina pravokutnika $[0, a] \times [0, b]$ jednaka $P = ab$. Sada tražena nejednakost slijedi iz $P \leqslant P_1 + P_2$, pogledajte sliku 1.4. Jednakost se postiže ako i samo ako se točka (a, b) nalazi na krivulji, tj. $b = a^{p-1} \iff b^q = a^{(p-1)q} = a^p$.

Vratimo se na dokaz Hölderove nejednakosti. Možemo prepostaviti da je $\|f\|_p \neq 0$, $\|g\|_q \neq 0$, jer bi u suprotnom obje strane bile jednake 0. Za fiksni $x \in A$ uzmemo $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$, $b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ i iskoristimo netom dokazanu nejednakost:

$$\int_A \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\, dx \leqslant \underbrace{\int_A \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p}\, dx}_{\frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p} = \frac{1}{p}} + \underbrace{\int_A \frac{|f(x)|^q}{q\|g\|_q^q}\, dx}_{\frac{1}{q}} = 1.$$

Množenjem s $\|f\|_p \|g\|_q$ dobivamo

$$\int_A |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_q,$$

što smo i trebali. Ako gore stoji jednakost, tada mora vrijediti $\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$ za g.s. $x \in A$, što upravo znači da su $|f|^p$ i $|g|^q$ proporcionalne g.s., tj.

$$(\exists c > 0)\big(|g|^q = c|f|^p \text{ g.s.}\big).$$

Uz ovu treba dozvoliti i mogućnost da je neka od funkcija f i g g.s. jednaka 0.

1.2 Prostori $\mathrm{L}^2([a,b])$

Prisjetimo se da je:

$$\mathrm{L}^2([a,b]) := \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \ : \ \int_{[a,b]} |f|^2 \, d\lambda < +\infty \Big\}$$

vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ klasa izmjerivih funkcija obzirom na relaciju jednakosti g.s. i normu $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{2,[a,b]}$. Hölderova nejednakost u slučaju $p = 2$ postaje *Schwarzova nejednakost*:

$$f, g \in \mathrm{L}^2([a,b]) \implies |\langle f, g\rangle_{[a,b]}| \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2. \tag{1.18}$$

Možemo govoriti o *kutu* između vektora $f \neq \mathbf{0}$ i $g \neq \mathbf{0}$ iz $\mathrm{L}^2([a,b])$ kao broju $\theta \in [0, \pi]$ određenom sa

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re}\langle f, g\rangle_{[a,b]}}{\|f\|_2 \|g\|_2}. \tag{1.19}$$

Također ćemo reći da su f i g iz $\mathrm{L}^2([a,b])$ *ortogonalne* (ili *okomite*) ako je $\langle f, g\rangle_{[a,b]} = 0$, što pišemo $f \perp g$. U tom slučaju vrijedi *Pitagorin poučak*:

$$\|f+g\|_2^2 = \langle f+g, f+g\rangle_{[a,b]} = \langle f, f\rangle_{[a,b]} + \underbrace{\langle f, g\rangle_{[a,b]}}_{=0} + \underbrace{\overline{\langle f, g\rangle}_{[a,b]}}_{=0} + \langle g, g\rangle_{[a,b]} = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2.$$

Reći ćemo da je skup $E \subseteq \mathrm{L}^2([a,b])$ *ortogonalan* ako vrijedi

$$(\forall f, g \in E,\ f \neq g)(f \perp g).$$

Za ortogonalan skup različitih funkcija $f_1, \dots, f_n$ indukcijom poopćujemo Pitagorin poučak:

$$\|f_1 + f_2 + \cdots + f_n\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \cdots + \|f_n\|_2^2. \tag{1.20}$$

Skupovi $E, F \subseteq \mathrm{L}^2([a,b])$ su *međusobno ortogonalni* (pišemo $E \perp F$) ako vrijedi:

$$(\forall e \in E)(\forall f \in F)(e \perp f).$$

Reći ćemo da je $E \subseteq \mathrm{L}^2([a,b])$ *normiran* ako vrijedi

$$(\forall e \in E)(\|e\|_2 = 1).$$

Skup $E \subseteq \mathrm{L}^2([a,b])$ koji je ortogonalan i normiran nazivamo *ortonormiran skup*.

Posebnu ulogu će igrati skup

$$\mathbb{B} = \{e_n \, : \, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathrm{L}^2([a,b]),$$

kojeg čine funkcije

$$e_n : [a,b] \to \mathbb{C},$$

$$e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{2\pi i n(x-a)/(b-a)}, \tag{1.21}$$

tj. koristeći $e^{it} = \cos t + i \sin t$,

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \Big(\cos \frac{2\pi n(x-a)}{b-a} + i \sin \frac{2\pi n(x-a)}{b-a} \Big).$$

Primijetimo da je e_n prirodno promatrati i kao $(b-a)$-periodičnu funkciju na $\mathbb{R}$, jer je

$$e_n\big(x + (b-a)\big) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2\pi i n}{b-a}(x-a) + 2\pi i n} = e^{2\pi i n} e_n(x) = e_n(x).$$

Iz (1.21) direktno slijedi

$$|e_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \text{ za } x \in [a,b] \tag{1.22}$$

te potom $\|e_n\|_2^2 = \int_{[a,b]} |e_n(x)|^2 \, d\lambda = \int_{[a,b]} \frac{1}{b-a} \, d\lambda = \frac{1}{b-a} \lambda([a,b]) = 1$, odakle je $\|e_n\|_2 = 1$.

Lema 1.2.1. *Skup $\mathbb{B}$ je ortonormiran.*

Dokaz. Normiranost smo već vidjeli. Ako su $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n$ onda je

$$e_n(x)\overline{e_m(x)} = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e_{n-m}(x) \tag{1.23}$$

pa je dovoljno dokazati $\int_{[a,b]} e_n(x) d\lambda(x) = 0$ za $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Funkcija e_n je neprekidna pa integral možemo shvatiti kao Riemannov:

$$\int_a^b e_n(x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \int_a^b \cos \frac{2\pi n(x-a)}{b-a} \, dx + \frac{i}{\sqrt{b-a}} \int_a^b \sin \frac{2\pi n(x-a)}{b-a} \, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b-a}} \frac{b-a}{2\pi n} \sin \frac{2\pi(x-a)}{b-a} \Big|_a^b + \frac{-i}{\sqrt{b-a}} \frac{b-a}{2\pi n} \cos \frac{2\pi(x-a)}{b-a} \Big|_a^b = 0.$$

Dakle, $\mathbb{B}$ je ortonormiran. Q.E.D.

Napomena 1.2.2. U daljnjem ćemo kratko pisati $\langle \cdot, \cdot \rangle$ za $\langle \cdot, \cdot \rangle_{[a,b]}$, potom $\| \cdot \|$ za $\| \cdot \|_{2,[a,b]}$ te L^2 za $\mathrm{L}^2([a,b])$, jer interval $[a,b]$ ili neće biti važan ili će se podrazumijevati. Slučaj općenitog segmenta se lako svodi npr. na $[0,1]$ ili $[-\pi, \pi]$.

Nadalje, funkcije $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ možemo shvaćati na tri načina:

- $e_n : [0,1] \to \mathbb{C}$,
- $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koja je 1-periodična,
- $e_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, pri čemu je $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ moguće poistovjetiti s $[0,1\rangle$ preko $[0,1\rangle \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$.

Na prostoru L^2 se uvode topologija i konvergencija na prirodan način. Ako je $f \in \mathrm{L}^2$ i $r > 0$, onda skup

$$K(f,r) := \{g \in \mathrm{L}^2 : \|g - f\| < r\}$$

nazivamo *otvorena kugla* oko f radijusa r. Skup $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{L}^2$ je *otvoren* ako vrijedi

$$\big(\forall f \in \mathcal{U}\big)\big(\exists r > 0\big)\big(K(f,r) \subseteq \mathcal{U}\big).$$

Pokazuje se da je neki skup otvoren ako i samo ako je unija otvorenih kugala. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira* prema f u L^2 ako

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists n_0\in\mathbb{N}\big)\big(\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant n_0\big)\big(\|f_n-f\|<\varepsilon\big).$$

Slično se definira i Cauchyjev niz u L^2:

$$\big(\forall\varepsilon>0\big)\big(\exists n_0\in\mathbb{N}\big)\big(\forall m,n\in\mathbb{N}, m,n\geqslant n_0\big)\big(\|f_m-f_n\|<\varepsilon\big).$$

Prostor L^2 je *potpun*, tj. svaki Cauchyjev niz u L^2 je i konvergentan s nekim limesom $f\in\mathrm{L}^2$. Potpun unitaran prostor naziva se *Hilbertov prostor*. Dakle, L^2 je Hilbertov prostor.

Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u L^2, onda kažemo da red $\sum_n f_n$ *konvergira* u L^2 ako postoji $f\in\mathrm{L}^2$ takva da je $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N f_n=f$ u L^2. Niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u L^2 je *baza* od L^2 ako za svaki $f\in\mathrm{L}^2$ postoje jedinstveni skalari $\alpha_n=\alpha_n(f)$, $n\in\mathbb{N}$ takvi da je $f=\sum_{n=1}^\infty\alpha_n e_n$ u L^2. (Ova definicija ima smisla i u općenitom normiranom prostoru, no obično zahtijevamo i potpunost.) Ako je baza ortonormiran skup, zovemo je *ortonormirana baza* (*ONB*). Ako je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB od L^2 i $f\in\mathrm{L}^2$, tada je

$$\alpha_n(f)=\langle f,e_n\rangle \text{ za svaki } n\in\mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Doista, skalarni produkt je neprekidna funkcija sa L^2 u $\mathbb{C}$ po prvoj varijabli pa imamo

$$\langle f,e_n\rangle=\Big\langle\sum_{k=1}^\infty\alpha_k e_k,e_n\Big\rangle=\Big\langle\lim_m\sum_{k=1}^m\alpha_k e_k,e_n\Big\rangle=\lim_m\underbrace{\Big\langle\sum_{k=1}^m\alpha_k e_k,e_n\Big\rangle}_{=\alpha_n,\text{ za } m\geqslant n}=\alpha_n.$$

Lema 1.2.3. *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran niz u L^2. Tada je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB ako i samo ako vrijedi $\|f\|^2=\sum_{n=1}^\infty|\langle f,f_n\rangle|^2$ za svaki $f\in\mathrm{L}^2$.*

Dokaz. Stavimo $g_n:=\sum_{k=1}^n\langle f,f_k\rangle f_k$ i računajmo:

$$\|f-g_n\|^2=\langle f-g_n,f-g_n\rangle=\|f\|^2-\langle f,g_n\rangle-\langle g_n,f\rangle+\|g_n\|^2$$
$$\overset{(1.20)}{=}\|f\|^2-2\textstyle\sum_{k=1}^n\underbrace{\langle f,f_k\rangle\overline{\langle f,f_k\rangle}}_{|\langle f,f_k\rangle|^2}+\sum_{k=1}^n|\langle f,f_k\rangle|^2\underbrace{\|f_k\|^2}_{=1}=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n|\langle f,f_k\rangle|^2.$$

Dakle, dokazali smo da vrijedi

$$\|f-g_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n|\langle f,f_k\rangle|^2. \tag{1.25}$$

Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB, onda po definiciji i (1.24) slijedi

$$\lim_n\|f-g_n\|=0,$$

što preko (1.25) daje

$$\|f\|^2=\lim_n\sum_{k=1}^n|\langle f,f_k\rangle|^2=\sum_{k=1}^\infty|\langle f,f_k\rangle|^2.$$

Obratno, ako znamo

$$\|f\|^2=\sum_{k=1}^\infty|\langle f,f_k\rangle|^2=\lim_n\sum_{k=1}^n|\langle f,f_k\rangle|^2,$$

tada preko (1.25) imamo $\lim_n\|f-g_n\|=0$, tj.

$$\lim_n g_n=f \text{ u } \mathrm{L}^2,$$

što upravo znači $\sum_{k=1}^\infty\langle f,f_k\rangle f_k=$ u L^2 za svaku funkciju $f\in\mathrm{L}^2$ pa je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB. Q.E.D.

Navedimo još neke posljedice jednakosti (1.25).

Korolar 1.2.4 (Besselova nejednakost). *Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran skup u L^2, tada za $f \in \mathrm{L}^2$ vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Dokaz. Slijedi iz $\|f - g_n\|^2 \geqslant 0$ i puštanjem limesa po n u (1.25). Q.E.D.

Korolar 1.2.5 (Parsevalov identitet). *Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ONB u L^2, tada za $f, g \in \mathrm{L}^2$ vrijedi*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n\rangle\overline{\langle g, f_n\rangle}.$$

Dokaz. Za $f = g$ tvrdnja slijedi iz leme 1.2.3. Općenito, koristimo "trik polarizacije", tj. prikaz skalarnog produkta pomoću norme:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\|f+g\|^2 - \frac{1}{4}\|f-g\|^2 + \frac{i}{4}\|f+ig\|^2 - \frac{i}{4}\|f-ig\|^2$$

te jednakost

$$\langle f, f_n\rangle\overline{\langle g, f_n\rangle} = \frac{1}{4}|\langle f+g, f_n\rangle|^2 - \frac{1}{4}|\langle f-g, f_n\rangle|^2 + \frac{i}{4}|\langle f+ig, f_n\rangle|^2 - \frac{i}{4}|\langle f-ig, f_n\rangle|^2.$$

Primijetimo usput da red

$$\sum_n \langle f, f_n\rangle\overline{\langle g, f_n\rangle}$$

apsolutno konvergira po Cauchyjevoj nejednakosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n\beta_n| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2\Big)^{1/2} \quad \text{za } \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$$

i prethodnom korolaru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n\rangle\overline{\langle g, f_n\rangle}| \leqslant \Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f, f_n\rangle|^2}_{<+\infty}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|\langle g, f_n\rangle|^2}_{<+\infty}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Q.E.D.

Korolar 1.2.6. *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran skup u L^2. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *je ONB u* L^2,

(b) $(\forall f \in \mathrm{L}^2)\Big(f = \sum_{n=1}^{\infty}\langle f, f_n\rangle f_n\Big)$,

(c) $(\forall f \in \mathrm{L}^2)\Big(\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle f, f_n\rangle|^2\Big)$,

(d) $(\forall f \in \mathrm{L}^2)\Big(f \perp \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \implies f = \mathbf{0}\Big)$ *(tzv. maksimalnost ili totalnost).*

Dokaz. Već smo pokazali (a) $\iff$ (b) i (a) $\iff$ (c).

(b) $\implies$ (d): Ako je $f \in \mathrm{L}^2$ ortogonalna na sve članove od $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tada za nju vrijedi $f = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\langle f, f_n\rangle}_{=0} f_n = \mathbf{0}$.

(d) $\Longrightarrow$ (b): Uzmimo neku $f \in \mathrm{L}^2$ te promatrajmo opet $g_m := \sum_{n=1}^{m} \langle f, f_n \rangle f_n$. Za $m, k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\|g_{m+k} - g_m\|^2 = \Big\| \sum_{n=m+1}^{m+k} \langle f, f_n \rangle f_n \Big\|^2 = \sum_{n=m+1}^{m+k} |\langle f, f_n \rangle|^2$$

pa je zbog Besselove nejednakosti $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u L^2, a zbog potpunosti postoji $\lim_m g_m = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n$. Sada gledamo vektor

$$\tilde{f} := f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n.$$

Primijetimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\langle \tilde{f}, f_n \rangle = \langle f, f_n \rangle - \underbrace{\lim_m \sum_{k=1}^{m} \langle f, f_k \rangle \langle f_k, f_n \rangle}_{\langle f, f_n \rangle \cdot 1 \text{ za } m \geqslant n} = \langle f, f_n \rangle - \langle f, f_n \rangle = 0$$

pa po pretpostavci (d) mora biti $\tilde{f} = \mathbf{0}$, što je upravo (b). Q.E.D.

Napomena 1.2.7. Općenito je poredak članova baze značajan. Korolar 1.2.6 (a) $\Longleftrightarrow$ (d) pokazuje da kod ONB poredak ipak ne igra ulogu.

Definicija 1.2.8. *Neka je općenito* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ortonormirani niz u* L^2. *Skalare* $\langle f, f_n \rangle$ *nazivamo* (apstraktnim) Fourierovim koeficijentima *funkcije* f, *a red* $\sum_n \langle f, f_n \rangle f_n$ *nazivamo* Fourierov red *funkcije* f.

Napomena 1.2.9. (a) Za svaki $f \in \mathrm{L}^2$ Fourierovi koeficijenti čine niz iz

$$\ell^2 := \Big\{ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\Big|\; \alpha_n \in \mathbb{C},\ \sum_n |\alpha_n|^2 < +\infty \Big\}.$$

To slijedi iz Besselove nejednakosti.

(b) Iz korolara 1.2.6 slijedi da Fourierov red konvergira u L^2 prema početnoj funkciji (iz koje je nastao) za svaku $f \in \mathrm{L}^2$ ako i samo ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ baš ONB.

Po napomeni 1.2.7 Fourierove koeficijente možemo indeksirati i npr. po $\mathbb{Z}$ (ili po nekom drugom prebrojivom skupu). Ako je ONB indeksirana po $\mathbb{Z}$, tj. ako je dana sa $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, tada je npr. možemo urediti:

$$f_0, f_1, f_{-1}, f_2, f_{-2}, \ldots.$$

Vratimo se na sistem funkcija $\mathbb{B}$. Za $f \in \mathrm{L}^2$ i $n \in \mathbb{N}$ pišemo

$$\hat{f}(n) := \langle f, e_n \rangle.$$

Osim $\mathbb{B}$ možemo promatrati i sistem realnih funkcija dan sa

$$Trig := \Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \Big\}.$$

To je svakako ortonormirani niz u $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, što je znao provjeriti još i Fourier.

Napomenimo kako još nismo pokazali da $\mathbb{B}$ i $Trig$ doista jesu ortonormirane baze; to će biti sadržaj idućeg odjeljka. Oni su zasad samo ortonormirani sistemi funkcija.

$$* \quad * \quad *$$

Napomena 1.2.10. Za linearni operator $A\colon X \to Y$, gdje su X i Y normirani prostori, kažemo da je *ograničen* ako postoji konstanta $C \in [0, +\infty\rangle$ takva da je

$$(\forall x \in X)\big(\|Ax\|_Y \leqslant C\|x\|_X\big),$$

što je ekvivalentno s neprekidnošću od A u odgovarajućim normama:

$$(\forall x_0 \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\Big(\|x - x_0\|_X < \delta \implies \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon\Big)$$

i s uniformnom neprekidnošću:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in X)\Big(\|x_1 - x_2\|_X < \delta \implies \|Ax_1 - Ax_2\|_Y < \varepsilon\Big).$$

Zadatak 1.2.1. Neka je $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ baza u Banachovom prostoru (tj. potpunom normiranom prostoru) X, odnosno vrijedi

$$(\forall f \in X)\big(\exists!(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\Big(f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\Big).$$

Dokažite da su koeficijentni funkcionali

$$X \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \alpha_n = \alpha_n(f)$$

ograničeni, tj. neprekidni.

Rješenje. Definiramo novu normu $|||\cdot|||$ na X

$$|||f||| := \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n(f)e_n\Big\|.$$

Pokaže se da to doista jest norma te očigledno imamo $|||f||| \geqslant \|f\|$ zbog

$$\|f\| = \lim_{N\to\infty} \Big\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n(f)e_n\Big\| \leqslant \sup_{N} \Big\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n(f)e_n\Big\| = |||f|||.$$

Želimo vidjeti da je i norma $|||\cdot|||$ potpuna. Naime, neka je $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ Cauchyjev niz u prostoru $(X, |||\cdot|||)$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i uzmimo $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svake $i, j \geqslant j_0$ i svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n(f_i)e_n - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(f_j)e_n\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n(f_i - f_j)e_n\Big\| \leqslant |||f_i - f_j||| \leqslant \varepsilon. \tag{1.26}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ iz

$$|\alpha_n(f_i) - \alpha_n(f_j)| \underbrace{\|e_n\|}_{>0} = \|\alpha_n(f_i - f_j)e_n\| = \Big\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f_i - f_j)e_k - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(f_i - f_j)e_k\Big\|$$

$$\leqslant \Big\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f_i - f_j)e_n\Big\| + \Big\|\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(f_i - f_j)e_k\Big\| \leqslant 2|||f_i - f_j|||$$

i (1.26) vidimo da je $(\alpha_n(f_j))_{j=1}^{\infty}$ Cauchyjev niz skalara pa on konvergira prema nekom broju β_n. Puštajući $j \to \infty$ u (1.26) za svaki $N \in \mathbb{N}$ i svaki $i \geqslant j_0$ dobivamo

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(f_i)e_n - \sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n \Big\| \leqslant \varepsilon \tag{1.27}$$

te, posljedično, za svake prirodne brojeve $M < N$,

$$\Big\| \sum_{n=M+1}^{N} \alpha_n(f_i)e_n - \sum_{n=M+1}^{N} \beta_n e_n \Big\| \leqslant 2\varepsilon. \tag{1.28}$$

Nadalje, radi konvergencije od $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(f_{j_0})e_n$ postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za prirodne brojeve $N > M \geqslant N_0$ vrijedi

$$\Big\| \sum_{n=M+1}^{N} \alpha_n(f_{j_0})e_n \Big\| \leqslant \varepsilon. \tag{1.29}$$

Iz (1.28) i (1.29) za $N > M \geqslant N_0$ dobivamo

$$\Big\| \sum_{n=M+1}^{N} \beta_n e_n \Big\| \leqslant 3\varepsilon$$

pa vidimo da su parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$ Cauchyjeve, tj. taj red konvergira u $(X, \|\cdot\|)$ prema nekom vektoru $f \in X$. Zbog jedinstvenosti prikaza vektora f pomoću baze zapravo možemo pisati $\alpha_n(f) = \beta_n$. Konačno uzimanjem $\sup_{N\in\mathbb{N}}$ u (1.27) dobivamo da za $i \geqslant j_0$ vrijedi

$$|||f_i - f||| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(f_i - f)e_n \Big\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(f_i)e_n - \sum_{n=1}^{N} \beta_n e_n \Big\| \leqslant \varepsilon,$$

tj. niz $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ konvergira po normi $|||\cdot|||$ prema f.

U daljnjem koristimo *teorem o inverznom operatoru*: Ako je $A : X \to Y$ ograničeni bijektivni linearni operator, a X i Y su Banachovi prostori, tada je njegov inverz $A^{-1} \colon Y \to X$ također ograničen. Promatramo identitetu $I \colon (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$. Ona je ograničena, čak s konstantom 1, jer smo već bili zaključili $\|f\| \leqslant |||f|||$. Obzirom da je njezin inverz također ograničen, postoji konstanta $C \in [0, +\infty\rangle$ takva da je $|||f||| \leqslant C\|f\|$ za svaki $f \in X$. Sada imamo

$$\begin{aligned} |\alpha_n(f)| \underbrace{\|e_n\|}_{>0} &= \|\alpha_n(f)e_n\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f)e_k - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(f)e_k \Big\| \\ &\leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f)e_n \Big\| + \Big\| \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(f)e_k \Big\| \leqslant 2|||f||| \leqslant 2C\|f\|. \end{aligned}$$

Naime, primijetimo $e_n \neq \mathbf{0}$, jer inače prikaz ne bi bio jedinstven. Tako smo dobili:

$$|\alpha_n(f)| \leqslant \frac{2C}{\|e_n\|}\|f\|$$

pa je $\alpha_n \colon X \to \mathbb{C}$ ograničen s konstantom $2C/\|e_n\|$.

Radi ovog svojstva se baza u Banachovom prostoru još naziva i *Schauderova baza*.

Zadatak 1.2.2. (a) Dokažite da su jednostavne funkcije guste u $\mathrm{L}^p([a,b])$, $p \in [1, \infty\rangle$.

(b) Dokažite da su step-funkcije guste u $\mathrm{L}^p([a,b])$, $p \in [1, \infty\rangle$.

(c) Dokažite da su $(b-a)$-periodične C^∞ funkcije guste u $\mathrm{L}^p([a,b])$, $p \in [1, \infty\rangle$.

Napomena 1.2.11. Kažemo da je skup S *gust* u normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ ako za svaki $x \in X$ i svaki $\varepsilon > 0$, postoji $y \in S$ takav da je $\|x - y\| < \varepsilon$. Ekvivalentno, za svaki $x \in X$ postoji niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u S koji konvergira prema x. Step-funkcija na $[a,b]$ je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ za koju postoji razdioba segmenta $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ takva da je f konstantna na svakom intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Rješenje. (a) Kako kompleksne funkcije možemo rastaviti na realni i imaginarni dio, dovoljno je za svaku realnu funkciju $f \in \mathrm{L}^p([a,b])$ naći niz jednostavnih izmjerivih funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (iz $\mathrm{L}^p([a,b])$) koji konvergira prema f u normi $\|\cdot\|_{p,[a,b]}$. Sjetimo se rastava $f = f^+ - f^-$. Na predavanju smo komentirali da se svaka nenegativna izmjeriva funkcija može prikazati kao rastući limes po točkama nenegativnih jednostavnih izmjerivih funkcija. Zato postoje nizovi $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvih funkcija za koje vrijedi

$$\uparrow \lim_n g_n(x) = f^+(x) \text{ i } \uparrow \lim_n h_n(x) = f^-(x) \text{ za svaki } x \in [a,b].$$

Stavimo $f_n := g_n - h_n$. Imamo $|f_n| \leqslant g_n + h_n \leqslant f^+ + f^- = |f|$, pa je niz $(|f_n - f|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ dominiran integrabilnom funkcijom $2^p|f|^p$:

$$\int_{[a,\,b]} |f|^p \, d\lambda = \|f\|_{p,\,[a,b]}^p < +\infty.$$

Koristeći LTDK računamo:

$$\lim_n \|f_n - f\|_{p,\,[a,b]}^p = \lim_n \int_{[a,b]} |f_n - f|^p \, d\lambda = \int_{[a,b]} \underbrace{(\lim_n |f_n - f|^p)}_{=0} \, d\lambda = 0.$$

(b) Dovoljno je za svaku jednostavnu funkciju $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{B_j}$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $B_j \in \mathscr{B}([a,b])$ i za svaki $\varepsilon > 0$ naći step-funkciju g takvu da je $\|f - g\|_{p,\,[a,b]} < \varepsilon$. Štoviše, možemo pretpostaviti da je f baš jednaka $\mathbb{1}_B$ za neki proizvoljni $B \in \mathscr{B}([a,b])$. Zbog regularnosti Lebesgueove mjere λ postoji otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}$ takav da je:

$$U \supseteq B \text{ i } \lambda(U) - \lambda(B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Svaki otvoreni skup $U \subseteq \mathbb{R}$ je najviše prebrojiva unija disjunktnih otvorenih intervala, tj. $U = \bigcup_n \langle a_n, b_n\rangle$. Zbog disjunktnosti je

$$\lambda(U) = \sum_n (b_n - a_n).$$

Neka je $N \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da je

$$\sum_{n>N} (b_n - a_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

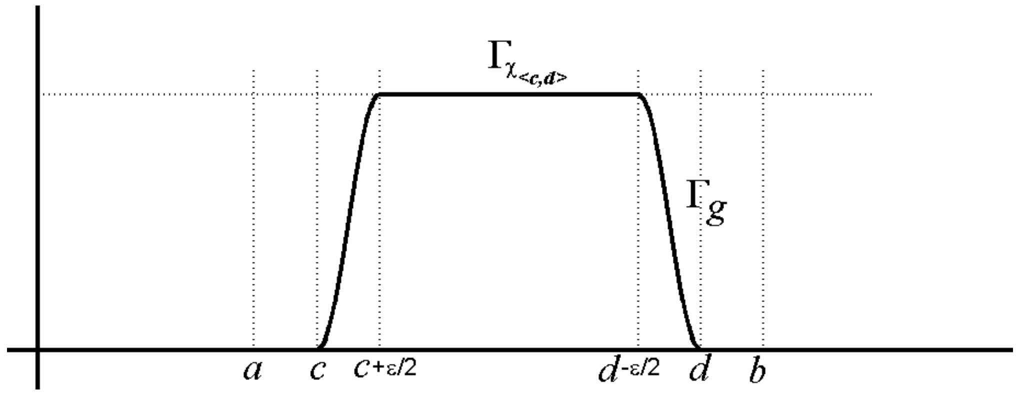
Uzmimo

$$g := \mathbb{1}_{\bigcup_{n\leqslant N} \langle a_n, b_n\rangle} = \sum_{n\leqslant N} \mathbb{1}_{\langle a_n, b_n\rangle}.$$

To je step-funkcija. Ocijenimo:

$$
\begin{aligned}
\|f-g\|_{p,\,[a,b]}^p &= \int_{[a,b]} |\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{\cup_{n\leqslant N}\langle a_n,b_n\rangle}|^p \, d\lambda \\
&\leqslant \lambda\Big(B \triangle \bigcup_{n\leqslant N} \langle a_n,b_n\rangle\Big) \\
&\leqslant \underbrace{\lambda(U\setminus B)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\lambda\Big(\bigcup_{n>N}\langle a_n,b_n\rangle\Big)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

(c) Kako je step-funkcija linearna kombinacija karakterističnih funkcija intervala, dovoljno je za svaki interval $\langle c,d\rangle \subseteq [a,b]$ i $\varepsilon > 0$ naći funkciju $g \in \mathrm{C}^\infty$ takvu da vrijedi $\|g - \mathbb{1}_{\langle c,d\rangle}\|_{p,\,[a,b]} < \varepsilon$; pogledajte sliku 1.5.



Slika 1.5: Funkcija g sa svojstvom iz (c) dijela prethodnog zadatka.

Napomena 1.2.12. Jedna posljedica prethodnog zadatka je činjenica da je $\mathrm{L}^p([a,b])$ upotpunjenje prostora $\mathrm{C}([a,b])$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_{p,\,[a,b]}$, $1 \leqslant p < \infty$, tj. $\mathrm{C}([a,b])$ se može "uložiti" u $\mathrm{L}^p([a,b])$ kao njegov gusti potprostor.

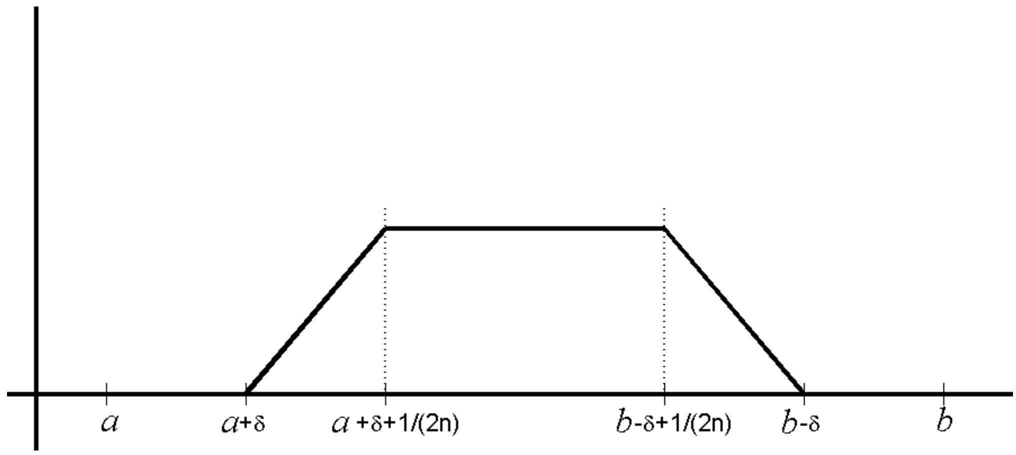
Činjenica da $\mathrm{C}([a,b])$ nije potpun vidi se iz sljedećeg primjera. Uzmimo $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$ i f_n definirajmo grafom kao na slici 1.6. Tvrdimo

$$\|f_n - \mathbb{1}_{[a+\delta,b-\delta]}\|_{p,\,[a,b]} \to 0,$$

tj. niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema $\mathbb{1}_{[a+\delta,b-\delta]}$. To slijedi iz $\|f_n - \mathbb{1}_{[a+\delta,b-\delta]}\|_{p,\,[a,b]}^p \leqslant \frac{1}{n}$. Kako su $f_n \in \mathrm{C}([a,b])$, vidimo da je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u $(\mathrm{C}([a,b]), \|\cdot\|_{p,\,[a,b]})$, ali on ne konvergira prema nekoj $f \in \mathrm{C}([a,b])$ jer bismo tada imali $f = \mathbb{1}_{[a+\delta,b-\delta]}$ g.s., što nije moguće. Naime, skup $\{x \in [a,b] \mid 0 < f(x) < 1\}$ bi bio otvoren i neprazan pa bi imao pozitivnu mjeru.

Napomena 1.2.13. Iz (b) dijela prethodnog zadatka slijedi da je prostor $\mathrm{L}^p([a,b])$ separabilan za svaki $p \in [1,\infty\rangle$, tj. ima prebrojivi gusti podskup. (Npr. $\mathbb{C}^n$ je separabilan jer je $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^n$ njegov gusti podskup.) Naime, jedan prebrojivi gusti podskup od $\mathrm{L}^p([a,b])$ je

$$\bigg\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{\langle a_j,b_j\rangle} \ : \ n\in\mathbb{N},\ \alpha_j \in \mathbb{Q}+i\mathbb{Q},\ a_j,b_j \in \mathbb{Q}\cap[a,b] \bigg\}.$$



Slika 1.6: Funkcija f_n.

Zadatak 1.2.3 (Rieszov teorem reprezentacije)**.** Neka je H separabilni Hilbertov prostor. Dokažite da za svaki ograničeni linearni funkcional $\varphi : H \to \mathbb{C}$ postoji jedinstveni $h \in H$ takav da je $\varphi(x) = \langle x, h \rangle$ za svaki $x \in H$.

Rješenje. Zapravo nam ne treba separabilnost, no praktično ju je pretpostaviti. Svaki separabilan Hilbertov prostor ima prebrojivu ortonormiranu bazu $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je $\alpha_n := \overline{\varphi(e_n)}$. Primijetimo da zbog ograničenosti od φ postoji $M \in [0, +\infty\rangle$ takav da je $|\varphi(x)| \leqslant M\|x\|$ za svaki $x \in H$. Uzimajući $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ dobivamo:

$$\Big|\varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\Big)\Big| \leqslant M\Big\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\Big\| \implies \Big|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_j}\Big| \leqslant M\Big(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\implies \Big(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant M \implies \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant M,$$

tj. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Sada možemo definirati $h := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$. (Pokaže se da parcijalne sume čine Cauchyjev niz u H pa taj red konvergira.) Uzmimo proizvoljan $x \in H$ i zapišimo ga kao $x = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j$ za $\beta_j \in \mathbb{C}$. Imamo:

$$\langle x, h \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \Big\rangle = \lim_n \underbrace{\Big\langle \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \Big\rangle}_{\sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{\alpha_j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \overline{\alpha_j}.$$

S druge strane,

$$\varphi(x) = \varphi\Big(\lim_n \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\Big) = (\text{nepr.}) = \lim_n \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\Big)$$

$$= \lim_n \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(e_j) = \lim_n \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{\alpha_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \overline{\alpha_j}.$$

Dakle, $\varphi(x) = \langle x, h \rangle$.

Napomena 1.2.14. Prisjetimo se mogućih načina konvergencije niza (reda) funkcija.

- Kažemo da $(f)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira g.s.* (gotovo svuda) na E prema f ako postoji $N \subseteq E$, $\lambda(N) = 0$ takav da za svaki $x \in E \setminus N$ vrijedi

$$\lim_n f_n(x) = f(x).$$

- Kažemo da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira uniformno* na E prema f ako vrijedi

$$\lim_n \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

- Kažemo da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira u* L^p na E prema f ako vrijedi

$$\lim_n \|f_n - f\|_{p,E} = 0.$$

  (Ovdje promatramo fiksirani $p \in [1, \infty\rangle$.)

Može se pokazati da ako niz konvergira na dva različita načina prema g i h, tada nužno mora vrijediti $g = h$ g.s.

Zadatak 1.2.4. Ispitajte za koje vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan sa $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n = \mathbb{1}_{[n^\alpha,\, 2n^\alpha]}$ konvergira

(a) gotovo svuda, (b) uniformno, (c) u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Rješenje. (a)

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \underbrace{\mathbb{1}_{[n^\alpha,\, 2n^\alpha]}(x)}_{1 \text{ za } n^\alpha \leqslant x \leqslant 2n^\alpha,\ 0 \text{ inače}} = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in \mathbb{R},\ \alpha > 0, \\ \mathbb{1}_{[1,\,2]}(x) & \text{za } x \in \mathbb{R},\ \alpha = 0, \\ 0 & \text{za } x \in \mathbb{R},\ \alpha < 0. \end{cases}$$

Dakle, niz funkcija uvijek konvergira i to čak u svakoj točki pa je odgovor $\alpha \in \mathbb{R}$. Limes niza je $\mathbb{1}_{[1,\,2]}$ za $\alpha = 0$ te $\mathbf{0}$ za $\alpha \neq 0$. Odgovor: uvijek.

(b)

$$\text{Za } \alpha = 0: \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - \mathbb{1}_{[1,\,2]}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$$\text{Za } \alpha \neq 0: \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n^\alpha,\, 2n^\alpha]}(x) = 1 \overset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$

Odgovor: za $\alpha = 0$.

(c)

$$\text{Za } \alpha = 0: \quad \|f_n - \mathbb{1}_{[1,\,2]}\|_{1,\mathbb{R}} = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$$\text{Za } \alpha \neq 0: \quad \|f_n - 0\|_{1,\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n^\alpha,\, 2n^\alpha]}(x)\, dx = \lambda([n^\alpha,\, 2n^\alpha]) = n^\alpha \xrightarrow[\text{za } \alpha<0]{n\to\infty} 0.$$

Odgovor: za $\alpha \leqslant 0$.

Zadatak 1.2.5. Ispitajte za koje vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ red funkcija $\sum_n f_n$ zadanih sa $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n := \mathbb{1}_{[n^\alpha, 2n^\alpha]}$ konvergira:

(a) gotovo svuda, (b) uniformno, (c) u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Rješenje. Zapravo ispitujemo konvergenciju niza parcijalnih suma: $g_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$.

(a)

$$\lim_{N\to\infty} g_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[n^\alpha,\, 2n^\alpha]}(x).$$

$\alpha \neq 0 \implies$ za svaki x je samo konačno mnogo pribrojnika u redu različito od 0.

$$\alpha = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[1,\,2]}(x) = +\infty \text{ za sve } x \in [1,\, 2].$$

Odgovor: za $\alpha \neq 0$.

(b) U slučaju uniformne konvergencije morali bismo imati:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_N - g_M| \xrightarrow{M,N\to\infty} 0.$$

Naime, ako je limes g, tada prema nejednakosti trokuta vrijedi

$$|g_N(x) - g_M(x)| \leqslant |g_N(x) - g(x)| + |g_M(x) - g(x)|.$$

Posebno dobivamo nužni uvjet uniformne konvergencije:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\underbrace{g_N(x) - g_{N-1}(x)}_{\mathbb{1}_{[n^\alpha,\, 2n^\alpha]}(x)}| \to 0,$$

ali on očigledno nije ispunjen. Odgovor: nikada.

(c) Označimo limes sa g, tj. $g := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (po točkama).

$$\|g - g_n\|_{1,\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{f_n}_{\geqslant 0} \Big)\, d\lambda = \left(\begin{array}{c} \text{rastući niz} \\ \Big(\sum_{n=N+1}^{M} f_n\Big)_{M=N+1}^{\infty} \end{array} \right) \overset{\text{LTMK}}{=}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda([n^\alpha,\, 2n^\alpha]) = \sum_{n=N+1}^{\infty} n^\alpha \xrightarrow[?]{N\to\infty} 0 \iff \sum_n n^\alpha \text{ konvergira.}$$

Odgovor: $\alpha < -1$.

Zadatak 1.2.6. Ispitajte konvergira li niz funkcija $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan sa

$$f_n\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (\sin x)^n$$

(a) g.s. na $[-\pi, \pi]$, (b) uniformno na $[0, \pi]$, (c) u $\mathrm{L}^2([-\pi, \pi])$.

Rješenje. (a) DA. Primijetimo da je

$$\lim_{n\to\infty} (\sin x)^n = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\pi/2, \pi/2\}, \\ 1 & \text{za } x = \pi/2, \\ \text{ne postoji} & \text{za } x = -\pi/2. \end{cases}$$

Vidimo da niz konvergira u g.s. točki prema funkciji $f(x) \equiv 0$.

(b) NE. Kako su funkcije f_n neprekidne i limes po točkama im je funkcija koja ima prekid u $x = \pi/2$, vidimo da konvergencija ne može biti uniformna.

(c) DA. Iz (a) zadatka znamo da je kandidat nul-funkcija. Kako je $|f_n|^2 \leqslant 1$ i $\int_{[-\pi,\pi]} 1dx < +\infty$, korištenjem LTDK dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \mathbf{0}\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]} |f_n(x)|^2 dx \overset{\text{LTDK}}{=} \int_{[-\pi,\pi]} 0\, dx = 0.$$

Alternativno, možemo koristiti formulu

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k}$$

ako je znamo izvesti: Parcijalnom integracijom dobijemo rekurzivnu relaciju

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}$$

za izraz

$$I_m := \int_0^{\pi/2} \sin^m t\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^m t\, dt,$$

čije iteriranje daje gornju formulu. Sada koristeći $1 + t \leqslant e^t$ za $t \in \mathbb{R}$ dobivamo $\frac{2j-1}{2j} = 1 - \frac{1}{2j} \leqslant e^{-\frac{1}{2j}}$ pa možemo ocijeniti

$$\|f_n\|_2^2 = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx \leqslant 2\pi e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}},$$

odakle, zbog divergencije harmonijskog reda, korištenjem teorema o sendviču opet slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_2^2 = 0$.

1.3 Baze $\mathbb{B}$ i $Trig$

Najprije promatramo ortonormirani skup $Trig$ u prostoru $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Po njegovoj definiciji iz prethodnog poglavlja znamo da je za funkciju $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ pripadni (trigonometrijski) Fourierov red dan sa:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1.30}$$

pri čemu su:

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \tag{1.31.1}$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.31.2}$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.31.3}$$

(Integrale shvaćamo kao Lebesgueove.) Nadalje, red (1.30) s koeficijentima (1.31) možemo promatrati i za kompleksne funkcije f, ali rastavljanjem f na realni i imaginarni dio i korištenjem

$$a_n(f) = \underbrace{a_n(\mathrm{Re} f)}_{\in\mathbb{R}} + i\, \underbrace{a_n(\mathrm{Im} f)}_{\in\mathbb{R}}, \quad b_n(f) = \underbrace{b_n(\mathrm{Re} f)}_{\in\mathbb{R}} + i\, \underbrace{b_n(\mathrm{Im} f)}_{\in\mathbb{R}}$$

može ga se svesti na proučavanje dvaju realnih redova. Zato ćemo, u vezi sa sistemom $Trig$, obično raditi samo s realnim funkcijama f.

Uočimo da (1.30) kao formalni red (bez razmatranja konvergencije) ima smisla čim imaju smisla koeficijenti (1.31), što je slučaj kad god je $f \in L^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. To vidimo iz

$$\int_{[-\pi,\pi]} |f(x)\cos nx|\, d\lambda(x) \leqslant \int_{[-\pi,\pi]} |f(x)|\, d\lambda(x) < +\infty$$

za $f \in L^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ pa postoji a_n te slično postoji i b_n. To još ne znači da u (1.30) imamo ikakvu konvergenciju pa ponekad pišemo

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

pri čemu (iz spomenutog razloga) namjerno izbjegavamo pisati znak jednakosti.

Primijetimo da vrijedi $\mathrm{L}^2([a,b]) \subseteq \mathrm{L}^1([a,b])$ kao posljedica Hölderove nejednakosti:

$$f \in \mathrm{L}^2([a,b]) \implies \int_{[a,b]} |f|^2\, d\lambda < +\infty$$

$$\implies \int_{[a,b]} |f|\, d\lambda = \int_{[a,b]} |f| \cdot 1\, d\lambda \leqslant \Big(\int_{[a,b]} |f|^2\, d\lambda\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{[a,b]} 1^2\, d\lambda\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$
$$\implies f \in \mathrm{L}^1([a,b]).$$

Konačnu sumu oblika

$$T(x) := A_0 + \sum_{n=1}^{N}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \tag{1.32}$$

zovemo *trigonometrijski polinom*.

Lema 1.3.1. *Za svaki $\delta > 0$ i svaki $\eta > 0$ postoji trigonometrijski polinom $T = T_{\delta,\eta}$ takav da vrijedi:*

(a) $T(x) \geqslant 0$,

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, dx = 1$,

(c) $T(x) \leqslant \eta$ za $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$.

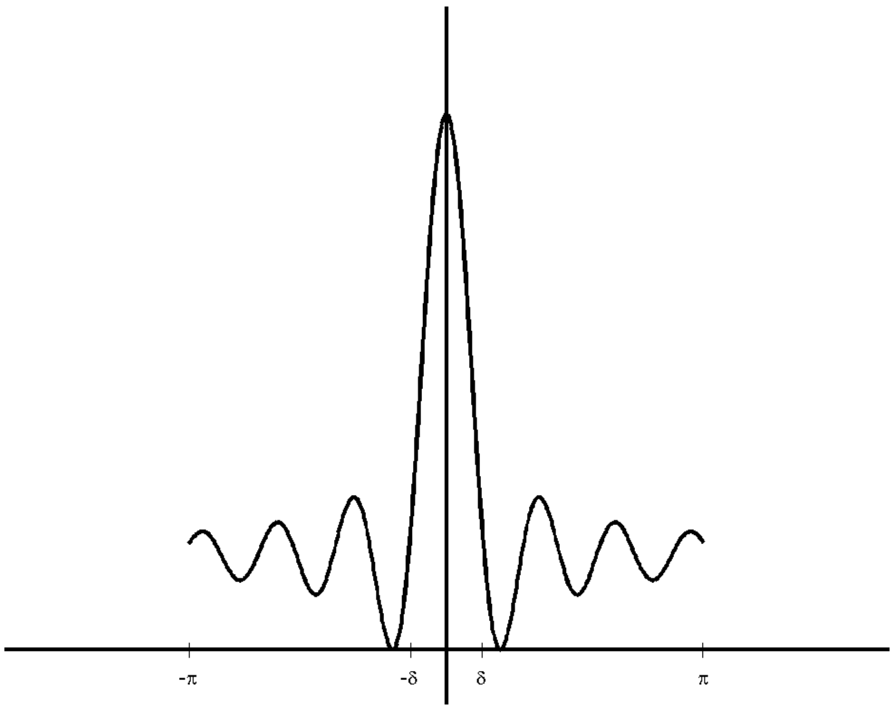
Dokaz. Uzmimo

$$T_n(x) := \frac{(1+\cos x)^n}{\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)^n\, dx} = \frac{(\cos\frac{x}{2})^{2n}}{\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\frac{x}{2})^{2n}\, dx}.$$

Uočimo da su svojstva (a) i (b) ispunjena. Za dokaz svojstva (c) primijetimo da je T_n parna funkcija i da za $\delta \leqslant x \leqslant \pi$ imamo

$$T_n(x) \leqslant \frac{(\cos\frac{\delta}{2})^{2n}}{\int_0^{\delta/2}(\cos\frac{x}{2})^{2n}\, dx} \leqslant \frac{(\cos\frac{\delta}{2})^{2n}}{\frac{\delta}{2}(\cos\frac{\delta}{4})^{2n}} = \frac{2}{\delta}\Bigg(\underbrace{\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\delta}{4}}}_{<1}\Bigg)^{2n},$$

a posljednji izraz teži u 0 kada $n \to \infty$. Za dovoljno veliki n on je manji od η. Konačno, primijetimo da je T_n doista trigonometrijski polinom, jer su to i sve potencije $\cos^k x$ koje se



Slika 1.7: Skica polinoma s traženim svojstvom.

dobiju iz raspisa $(1+\cos x)^n$ po binomnom teoremu. Posljednja činjenica se vidi iz formula za pretvaranje produkta trigonometrijskih funkcija u zbroj. Naprimjer,

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 3x\Big)$$

i dalje induktivno koristeći

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta). \qquad \text{Q.E.D.}$$

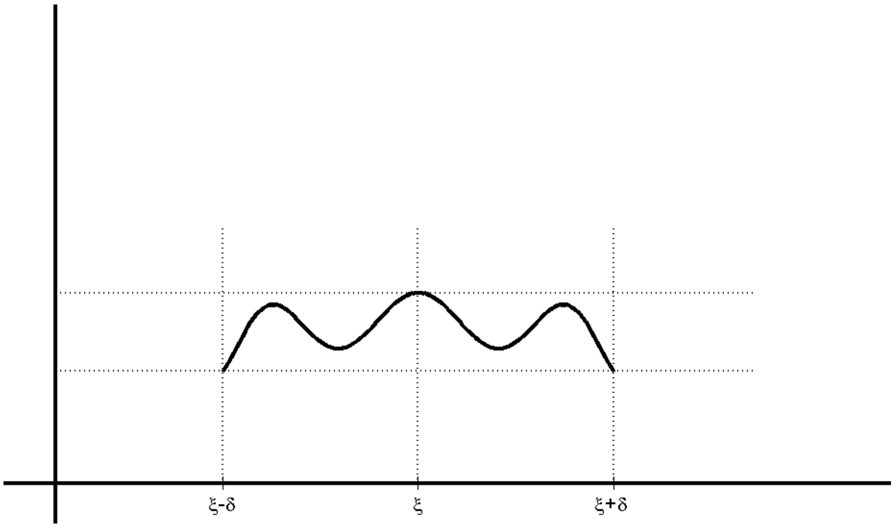
Propozicija 1.3.2. *Neka je* $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija čiji su svi Fourierovi koeficijenti dani u* (1.31) *jednaki* 0*. Tada je* $f \equiv 0$*, tj.* $f(x) = 0$ *za svaki* $x \in [-\pi,\pi]$*.*

Dokaz. Periodično proširimo f sa $[-\pi,\pi\rangle$ na cijeli $\mathbb{R}$. (To nam je korisno radi fleksibilnijeg pisanja, ali je neprekidnost zadržana samo na $\langle-\pi,\pi\rangle$.) Uočimo da je svaki trigonometrijski polinom također 2π-periodična funkcija. Zato za svaki trigonometrijski polinom T možemo pisati

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)T(x)\,dx = \int_{y-\pi}^{y+\pi} f(x)T(x-y)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{T(x-y)}_{\text{trig. polinom}}\,dx = (\text{po pretp.}) = 0.$$

Pretpostavimo da f nije identički jednaka 0, tj. postoji $\xi \in \langle-\pi,\pi\rangle$ takav da je $f(\xi) = c \neq 0$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $c > 0$. (Slučaj $c < 0$ je analogan.) Zbog neprekidnosti postoji $\delta > 0$ takav da je $\langle\xi-\delta,\xi+\delta\rangle \subseteq \langle-\pi,\pi\rangle$ i da za svaki $x \in \langle\xi-\delta,\xi+\delta\rangle$ vrijedi $f(x) > \frac{c}{2}$.

Iz neprekidnosti slijedi i da je f ograničena na $[-\pi,\pi]$, tj. postoji $M > 0$ takav da je $|f| \leqslant M$. Za proizvoljan $\eta > 0$ uzmimo $T = T_{\delta,\eta}$ iz leme 1.3.1 te stavimo $y = \xi$ u prethodnom



Slika 1.8: $f(x) > \frac{c}{2}$ za $x \in \langle \xi - \delta, \xi + \delta \rangle$.

računu:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi)T(x)\,dx &= \int_{\langle -\delta,\delta\rangle} f(x+\xi)T(x)\,dx + \int_{[-\pi,\pi]\setminus\langle -\delta,\delta\rangle} f(x+\xi)T(x)\,dx \\
&\geqslant \frac{c}{2}\int_{\langle -\delta,\delta\rangle} T(x)\,dx - M\int_{[-\pi,\pi]\setminus\langle -\delta,\delta\rangle} T(x)\,dx = \frac{c}{2} - \Big(\frac{c}{2}+M\Big)\int_{\{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi\}} T(x)\,dx \\
&\geqslant \frac{c}{2} - (\frac{c}{2}+M)\cdot\eta\cdot 2\pi.
\end{aligned}
$$

Posljednji broj je pozitivan ako odaberemo $\eta < \frac{c/2}{2\pi(c/2+M)}$, što nas dovodi do kontradikcije.
Q.E.D.

Napomena 1.3.3. Prisjetimo se da je (kompleksni eksponencijalni) Fourierov red funkcije $g\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ dan sa:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n)e^{2\pi i n t},$$

pri čemu su

$$\hat{g}(n) := \int_0^1 g(t)e^{-2\pi i n t}dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oni također imaju smisla za svaku $g \in \mathrm{L}^1([0,1])$.

Uočimo da se može uspostaviti veza između prostora $\mathrm{L}^1([-\pi,\pi])$ i $\mathrm{L}^1([0,1])$ te između sistema $Trig$ i $\mathbb{B}$. Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1([-\pi,\pi])$, onda je formulom

$$g(t) = f(2\pi t),$$

tj. supstitucijom $x = 2\pi t$ u formuli $f(x)$, definirana 1-periodična funkcija $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takva da je $g|_{[0,1]} \in \mathrm{L}^1([0,1])$. Na taj način smo opisali pridruživanje $f \mapsto g$. Invertiranje tog postupka je pridruživanje $g \mapsto f$ dano sa

$$f(x) = g\Big(\frac{x}{2\pi}\Big)$$

i ono se provodi supstitucijom $t = \frac{x}{2\pi}$ u formuli $g(t)$. Zanima nas veza Fourierovih koeficijenata a_n, b_n funkcije f i Fourierovih koeficijenata $\hat{g}(n)$ funkcije g. Za $n > 0$ imamo:

$$\hat{g}(n) = \int_{[0,1]} g(t)e^{-2\pi i n t}\,dt = \begin{bmatrix} t = & x/2\pi \\ dt = & dx/2\pi \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} f(x)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\cos nx\,dx - \frac{i}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x)\sin nx\,dx\Big) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

te slično

$$\hat{g}(-n) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Osim toga je $\hat{g}(0) = \frac{a_0}{2}$. Obratno,

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2}a_n - \frac{i}{2}b_n, \quad \hat{g}(-n) = \frac{1}{2}a_n + \frac{i}{2}b_n$$

$$\Longrightarrow \; a_n = \hat{g}(n) + \hat{g}(-n) \text{ za } n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = i\hat{g}(n) - i\hat{g}(-n) \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

Posljedica ovih formula je ekvivalentnost od:

- za $f \in \mathrm{L}^1([-\pi,\pi])$ je $a_n = 0$, $b_n = 0$ za sve n,
- za $g \in \mathrm{L}^1([0,1])$ je $\hat{g}(n) = 0$ za sve n.

Iz propozicije 1.3.2, napomene 1.3.3 i rastavljanja kompleksne funkcije f na realni i imaginarni dio slijedi:

Korolar 1.3.4. *Ako je $g\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ neprekidna i ako je $\hat{g}(n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, tada mora biti $g \equiv 0$.*

Želimo ovaj rezultat proširiti na sve funkcije iz $\mathrm{L}^1([-\pi,\pi])$, tj. $\mathrm{L}^1([0,1])$.

Teorem 1.3.5 (Teorem jedinstvenosti)**.** *Ako je $f \in L^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ i svi Fourierovi koeficijenti a_n, b_n od f su jednaki 0, tada je $f = 0$ g.s.*

Dokaz. Definiramo funkciju $F : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ formulom

$$F(x) := \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

Tada je

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$$

te

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant \int_{\substack{[x,x+h] \\ \text{ili } [x+h,x]}} |f|\,d\lambda = \int_{[-\pi,\pi]} |f|\,\mathbb{1}_{\substack{[x,x+h] \\ \text{ili } [x+h,x]}}\,d\lambda.$$

Kako je limes kada $h \to 0$ podintegralne funkcije g.s. jednak 0 i $|f|$ je integrabilna, po LTDK imamo

$$\lim_{h\to 0} \int_{\substack{[x,x+h] \\ \text{ili } [x+h,x]}} |f|\,d\lambda = 0 \implies \lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x),$$

tj. F je neprekidna na $[-\pi,\pi]$.

Označimo Fourierove koeficijente od F slovima A_n, B_n. Za $n \in \mathbb{N}$ računamo:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{-\pi}^{x} f(t)\cos nx\,dt\Big)\,dx$$

$$= (\text{ Tonelli-Fubinijev teorem }) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{t}^{\pi} f(t)\cos nx\,dx\Big)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{\sin nx}{n}\Big)\Big|_{x=t}^{x=\pi} dt = -\frac{1}{n\pi} \underbrace{\int_{[-\pi,\pi]} f(t)\sin nt\, dt}_{=b_n} = 0.$$

Slično zaključujemo i da je $B_n = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Primijetimo još:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(F(x) - \frac{A_0}{2}\Big)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx - A_0 = 0$$

pa smo oduzimanjem konstante $A_0/2$ od F postigli da je i nulti Fourierov koeficijent od $F - \frac{A_0}{2}$ jednak 0. Dakle, funkcija $F - \frac{A_0}{2}$ je neprekidna i ima sve Fourierove koeficijente jednake 0, tj. ona zadovoljava uvjete propozicije 1.3.2 pa mora biti identički jednaka 0, tj. $F \equiv \frac{A_0}{2}$.

Ovime smo pokazali

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = 0$$

za svake $-\pi \leqslant a < b \leqslant \pi$. Sada nam treba malo znanja kolegija *Mjera i integral* kako bismo odavde zaključili da je $f = 0$ g.s. Gledamo kolekciju svih $C \in \mathscr{B}(\langle -\pi, \pi])$ za koje vrijedi $\int_C f\, d\lambda = 0$. Ona sadrži intervale $\langle a, b] \subseteq \langle -\pi, \pi]$ i čini tzv. Dynkinovu klasu pa (po tzv. Dynkinovom teoremu) mora sadržavati sve Borelove podskupove od $\langle -\pi, \pi]$. Uzimanjem $C = \{x : f(x) > 0\}$ dobivamo

$$0 = \int_{[-\pi,\pi]} \underbrace{f\mathbb{1}_C}_{\geqslant 0}\, d\lambda \geqslant 0$$

pa mora biti $\lambda(C) = 0$, tj. $f \leqslant 0$ g.s. Primjenom istog rasuđivanja na $-f$ konačno zaključujemo da je doista $f = 0$ g.s. Q.E.D.

Posebno, pridruživanje

$$L^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad f \mapsto (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots)$$

je linearno i ima trivijalnu jezgru pa je injektivno.

Pomoću napomene 1.3.3 sada dobivamo:

Korolar 1.3.6 (Teorem jedinstvenosti, kompleksni eksponencijalni slučaj)**.** *Ako je $g \in \mathrm{L}^1([0,1])$ i $\hat{g}(n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, tada je $g = 0$ g.s.*

Znamo otprije da su $\mathbb{B}$ i $Trig$ ortonormirani skupovi. Tvrdimo da su oni zapravo ONB za $\mathrm{L}^2([0,1])$ i $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Npr. promotrimo $\mathbb{B}$. Po korolaru 1.2.6 (d) dovoljno je provjeriti sljedeće:

$$\Big(\forall f \in \mathrm{L}^2([0,1])\Big)\Big((\forall n \in \mathbb{Z})(\langle f, e_n\rangle = 0) \implies f = 0 \text{ g.s.}\Big),$$

ali to je upravo posljedica prethodnog korolara,

$$\mathrm{L}^2([0,1]) \subseteq \mathrm{L}^1([0,1]) \text{ i } \hat{f}(n) = \int_{[0,1]} f(x)e^{-2\pi inx}\, dx = \langle f, e_n\rangle.$$

Korolar 1.3.7. *(a) $Trig$ je ortonormirana baza u $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$.*

(b) $\mathbb{B}$ je ortonormirana baza u $\mathrm{L}^2([0,1])$.

Sada možemo sve rečeno za općenite ortonormirane baze primijeniti na $\mathbb{B}$.

Korolar 1.3.8 (Riesz-Fischerov teorem). *Ako je* $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$, *tada Fourierov red* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$ *konvergira prema* f *u* L^2 *normi. Nadalje, preslikavanje* $\hat{\ } : \mathrm{L}^2([0,1]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ *definirano sa* $f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *je izometrički izomorfizam prostora* $\mathrm{L}^2([0,1])$ *i* $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Napomena 1.3.9. Ovdje je

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \Big\{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ : \ \alpha_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 < \infty\Big\},$$

a norma na $\ell^2(\mathbb{Z})$ je dana sa

$$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \big\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big\|_{\ell^2} := \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Napomena 1.3.10. Poredak sumiranja nije važan za konvergenciju u L^2 normi, ali možemo se odlučiti npr. za

$$\lim_{N\to\infty} \Big\|f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n\Big\|_2 = 0.$$

Posebno, vrijedi *Parsevalov identitet*:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} \quad \text{za svake } f, g \in \mathrm{L}^2([0,1])$$

te tzv. *Plancherelova formula*:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \quad \text{za svaku } f \in \mathrm{L}^2([0,1]).$$

Za trigonometrijsku bazu $Trig$ posljednja jednakost postaje:

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_{2,[-\pi,\pi]}^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \quad \text{za svaku } f \in L^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi]).$$

Naime, skalarni produkti od f sa članovima baze $Trig$ su:

$$\Big\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\rangle_{[-\pi,\pi]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0,$$

$$\Big\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\Big\rangle_{[-\pi,\pi]} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \sqrt{\pi}a_n,$$

$$\Big\langle f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\Big\rangle_{[-\pi,\pi]} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \sqrt{\pi}b_n.$$

Sada koristimo apstraktni Parsevalov identitet kako bismo dobili:

$$\|f\|_{2,[-\pi,\pi]}^2 = \Big\langle f\,\Big|\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\rangle^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\Big\langle f\,\Big|\,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\Big\rangle^2 + \Big\langle f\,\Big|\,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\Big\rangle^2\Big) = \frac{\pi}{2}\,a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\pi a_n^2 + \pi b_n^2\Big),$$

iz čega dijeljenjem s π slijedi spomenuta formula.

* * *

Zadatak 1.3.1. Kako izgleda trigonometrijski Fourierov red parne, a kako neparne funkcije $f \in L^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$?

Rješenje. Ako je f parna:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin nx}_{\text{neparna}} \, dx = 0 \qquad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}$$

$$\implies f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Ako je f neparna:

$$a_n = 0 \qquad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}_0$$

$$\implies f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Zadatak 1.3.2. (a) Kako izgleda Fourierov red trigonometrijskog polinoma

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) \ ?$$

(b) Što možete reći o funkciji $f \in L^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ koja ima samo konačno mnogo Fourierovih koeficijenata različitih od 0?

Rješenje. (a) Zbog ortogonalnosti lako dobijemo

$$a_k = A_k \text{ za } k = 0, 1, 2, \dots, n, \qquad a_k = 0 \text{ za } k > n,$$

$$b_k = B_k \text{ za } k = 1, 2, \dots, n, \qquad b_k = 0 \text{ za } k > n.$$

Dakle, Fourierov red trigonometrijskog polinoma je on sam.

(b) Ako za funkciju f postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k > n$ vrijedi $a_k = 0 = b_k$, tada (prema (a) dijelu zadatka) f i trigonometrijski polinom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + a_k \sin kx)$$

imaju iste Fourierove koeficijente pa prema teoremu jedinstvenosti moraju biti jednaki g.s. Dakle, f je g.s. jednaka nekom trigonometrijskom polinomu.

Zadatak 1.3.3. (a) Dokažite da se svaka funkcija $f \in L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ može na jedinstveni način rastaviti kao $f = f_{\text{par}} + f_{\text{nep}}$, pri čemu su $f_{\text{par}}, f_{\text{nep}} \in L^2_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$, f_{par} je parna, a f_{nep} je neparna.

(b) Dokažite da vrijedi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f_{\text{par}}(x)|^2 \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f_{\text{nep}}(x)|^2 \, dx.$$

Rješenje. (a) Jedinstvenost slijedi iz računa:
$f(x) = f_{\text{par}}(x) + f_{\text{nep}}(x) \implies f(-x) = f_{\text{par}}(x) - f_{\text{nep}}(x)$

$$\implies f_{\text{par}}(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{i} \quad f_{\text{nep}}(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Obratno se vidi da ovako definirane funkcije f_{par} i f_{nep} doista zadovoljavaju jednadžbu $f = f_{\text{par}} + f_{\text{nep}}$ te se nalaze u $L^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Naime, koristeći nejednakost $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_{\text{par}}(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Big|\frac{f(x)+f(-x)}{2}\Big|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|^2 + |f(-x)|^2)\,dx =$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < +\infty$$

pa je $f_{\text{par}} \in L^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$, a slično se vidi i $f_{\text{nep}} \in L^2_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$.

(b) Primijetimo

$$\langle f_{\text{par}}, f_{\text{nep}}\rangle_{[-\pi,\pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f_{\text{par}}(x) f_{\text{nep}}(x)}_{\text{neparna}}\,dx = 0.$$

Pitagorin poučak daje

$$\|\underbrace{f_{\text{par}} + f_{\text{nep}}}_{f}\|^2_{2,[-\pi,\pi]} = \|f_{\text{par}}\|^2_{2,[-\pi,\pi]} + \|f_{\text{nep}}\|^2_{2,[-\pi,\pi]},$$

a to je upravo tražena jednakost.

Zadatak 1.3.4. Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-periodična funkcija klase C^1 i ako su nam poznati Fourierovi koeficijenti od f, kako izgledaju Fourierovi koeficijenti od f'?

Rješenje. Za $n \in \mathbb{Z}$ računamo:

$$\widehat{f'}(n) = \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi i n x}\,dx = (\text{parcijalna integracija}) =$$
$$= \underbrace{f(x)e^{-2\pi i n x}\Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0} - \int_0^1 f(x)(-2\pi i n)e^{-2\pi i n x}\,dx = 2\pi i n \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i n x}\,dx.$$

Dakle,

$$\widehat{f'}(n) = 2\pi i n\,\hat{f}(n) \qquad \text{za svaki } n \in \mathbb{Z}.$$

U ovom smo zadatku iskoristili formulu za parcijalnu integraciju za Riemannov integral,

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b},$$

dakle onu poznatu s prve godine studija. Mala varijanta je što su podintegralne funkcije u i v kompleksne, ali za njih se gornja formula lako dobiva rastavljanjem na realne i imaginarne dijelove; primijenimo “realnu” formulu 4 puta.

Zadatak 1.3.5 (Wirtingerova nejednakost)**.** Neka je $[a,b]$ ograničeni zatvoreni interval u $\mathbb{R}$ te neka je $f \in \mathrm{C}^1([a,b])$ takva da je $f(a) = f(b) = 0$. Dokažite nejednakost:

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leqslant \Big(\frac{b-a}{\pi}\Big)^2 \int_a^b |f'(x)|^2\,dx.$$

Nadalje, pokažite primjerom da se jednakost može postići za neku ne-nul funkciju pa je konstanta $\big(\frac{b-a}{\pi}\big)^2$ najbolja moguća.

Rješenje. Supstitucijom $y = \frac{x-a}{2(b-a)}$ tj. $x = 2(b-a)y + a$ svodimo opću tvrdnju na poseban slučaj $a = 0$ i $b = \frac{1}{2}$. Naime, definiramo $g(y) := f(2(b-a)y+a)$ za $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, tako da imamo:

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = \begin{bmatrix} x = & 2(b-a)y+a \\ dx = & 2(b-a)\,dy \end{bmatrix} = \int_0^{1/2} |f(2(b-a)y+a)|^2\,2(b-a)\,dy$$

$$= 2(b-a)\int_0^{1/2} |g(y)|^2\,dy,$$

$$\Big(\frac{b-a}{\pi}\Big)^2 \int_a^b |f'(x)|^2\,dx = \Big(\frac{b-a}{\pi}\Big)^2 \int_0^{1/2} |f'(2(b-a)y+a)^2\,2(b-a)\,dy$$

$$= \frac{b-a}{2\pi^2}\int_0^{1/2} |\underbrace{f'(2(b-a)y+a)\,2(b-a)}_{g'(y)}|^2\,dy.$$

Nejednakost postaje

$$\int_0^{1/2} |g(y)|^2\,dy \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{1/2} |g'(y)|^2\,dy.$$

Zato možemo odmah pretpostaviti $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ i pisati f umjesto g. Najprije proširimo f na $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ po neparnosti, a potom na cijeli $\mathbb{R}$ po 1-periodičnosti. Prisjetimo se: $f(0) = 0 = f(\frac{1}{2})$. Dobivamo funkciju klase C^1 na $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = (\text{derivacija neparne funkcije je parna})$$

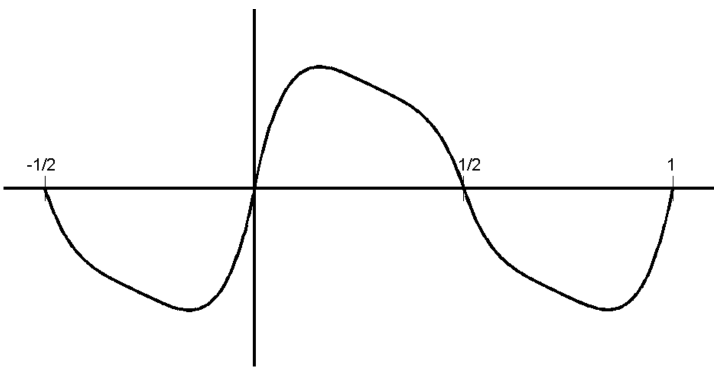
$$= \lim_{x\to 0-} f'(-x) = [y = -x] = \lim_{y\to 0+} f'(y),$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}+} f'(x) = (\text{1-periodičnost}) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}+} f'(x) = (\text{derivacija neparne funkcije je parna})$$

$$= \lim_{x\to -\frac{1}{2}+} f'(-x) = [y = -x] = \lim_{y\to \frac{1}{2}-} f'(y);$$

pogledajte sliku 1.9. Nadalje

$$\hat{f}(0) = \int_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} f(x)dx = 0.$$



Slika 1.9: Proširenje funkcije po neparnosti i 1-periodičnosti.

Koristimo Plancherelov identitet za f i f' te prethodni zadatak.

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx = \|f'\|_2^2 \overset{\text{Plan.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 \overset{\text{zad 1.3.4}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\pi^2 n^2 |\hat{f}(n)|^2 \overset{n^2\geqslant 1}{\geqslant} \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} 4\pi^2 |\hat{f}(n)|^2$$

$$\overset{\hat{f}(0)=0}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\pi^2|\hat{f}(n)|^2 \overset{\text{Plan.}}{=} 4\pi^2\|f\|_2^2 = 4\pi^2 \int_0^1 |f(x)|^2\,dx.$$

Primijetimo da su oba integrala $\int_0^1$ zapravo $\int_{-1/2}^{1/2} = 2\int_0^{1/2}$ jer su podintegralne funkcije $|f|^2$ i $|f'|^2$ 1-periodične i parne. Dijeljenjem s $4\pi^2$ slijedi tražena nejednakost.

Jednakost se postiže ako i samo ako je $\hat{f}(n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geqslant 2$. Npr. za

$$f(x) = \frac{e^{2\pi ix} - e^{-2\pi ix}}{2i} = \sin(2\pi x).$$

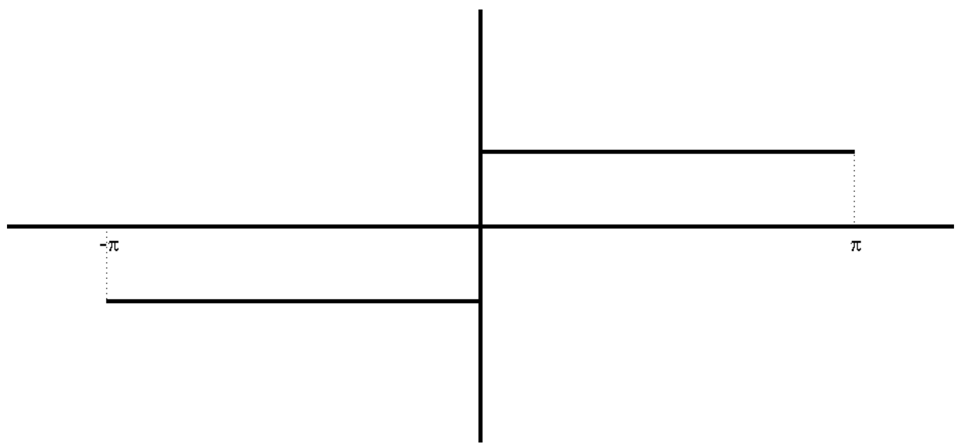
Zadatak 1.3.6. Nađite Fourierove koeficijente i Fourierove redove sljedećih funkcija iz prostora $L^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$.

(a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{za } x \in [-\pi,\, 0\rangle \\ 1 & \text{za } x \in [0,\pi] \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \in [-\pi,0\rangle \\ 1 & \text{za } x \in [0,\pi] \end{cases}$

(c) $h(x) = x^2$ za $x \in [-\pi,\pi]$

Rješenje. (a) Funkcija f je neparna pa je stoga $a_k = 0$ za $k \in \mathbb{N}_0$.



Slika 1.10: Graf funkcije pod (a).

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{\cos kx}{k}\Big)\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{k\pi}((-1)^k - 1) = \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi},\ k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi}\sin kx$$

Ovaj razvoj možemo zapisati još malo elegantnije ako primijetimo:

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{za } k \text{ paran}, \\ \frac{4}{k\pi} & \text{za } k \text{ neparan}. \end{cases}$$

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{N} \text{ neparan}} \frac{4}{k\pi} \sin kx = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4}{(2l-1)\pi} \sin(2l-1)x = \frac{4}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2l-1)x}{2l-1}$$

(b) Uočimo da je $g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f$ pa je

$$a_0(g) = 1 + \frac{1}{2}a_0(f), \quad a_n(g) = \frac{1}{2}a_n(f) \text{ za } n \geqslant 1, \quad b_n(g) = \frac{1}{2}b_n(f) \text{ za } n \geqslant 1.$$

Dakle, koeficijenti funkcije pod (b) su:

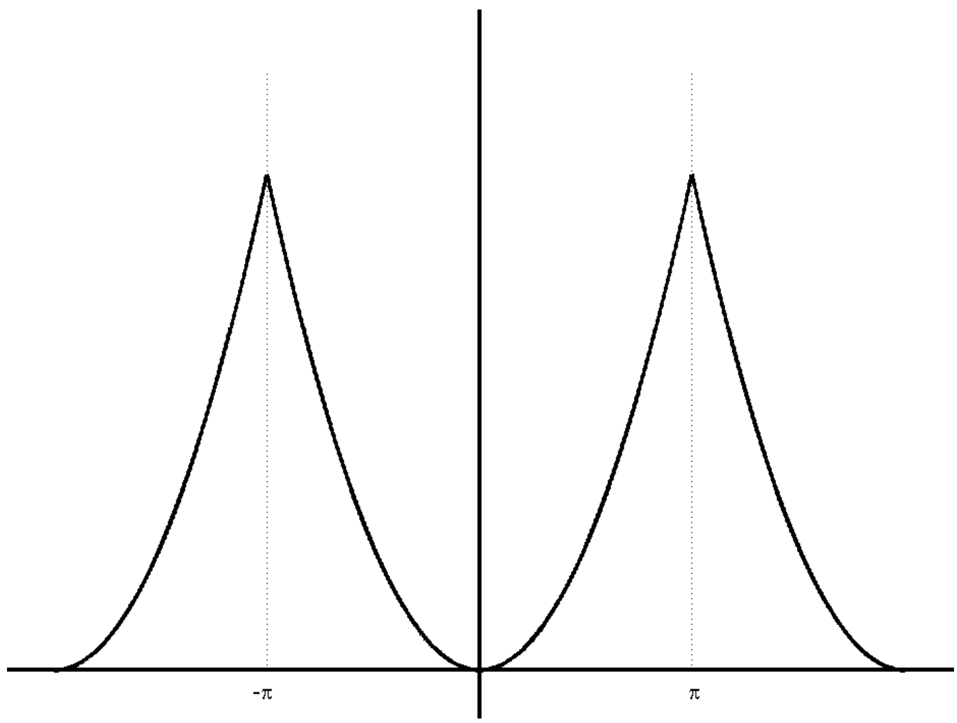
$a_0 = 1, \quad a_k = 0$ za $k \geqslant 1, \quad b_k = \begin{cases} 0 & \text{za } k \text{ paran,} \\ \frac{2}{k\pi} & \text{za } k \text{ neparan} \end{cases}$ pa imamo razvoj

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin(2l-1)x}{2l-1}.$$

Primijetimo da ga se formalno može izvesti naprosto kao:

$$\text{razvoj od } g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\text{razvoj od } f).$$

(c) Primijetimo da zbog parnosti vrijedi $b_k = 0$ za $k \geqslant 1$.



Slika 1.11: Graf funkcije pod (c).

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = (\text{parc. int.}) = \frac{4(-1)^k}{k^2}$$

$$h(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

Napomena 1.3.11. Fourierov red funkcije $f \in L^1_{\mathbb{R}}([-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}])$ (proširene po periodičnosti s periodom τ) glasi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos \frac{2\pi kx}{\tau} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{\tau} \Big),$$

pri čemu su koeficijenti dani sa

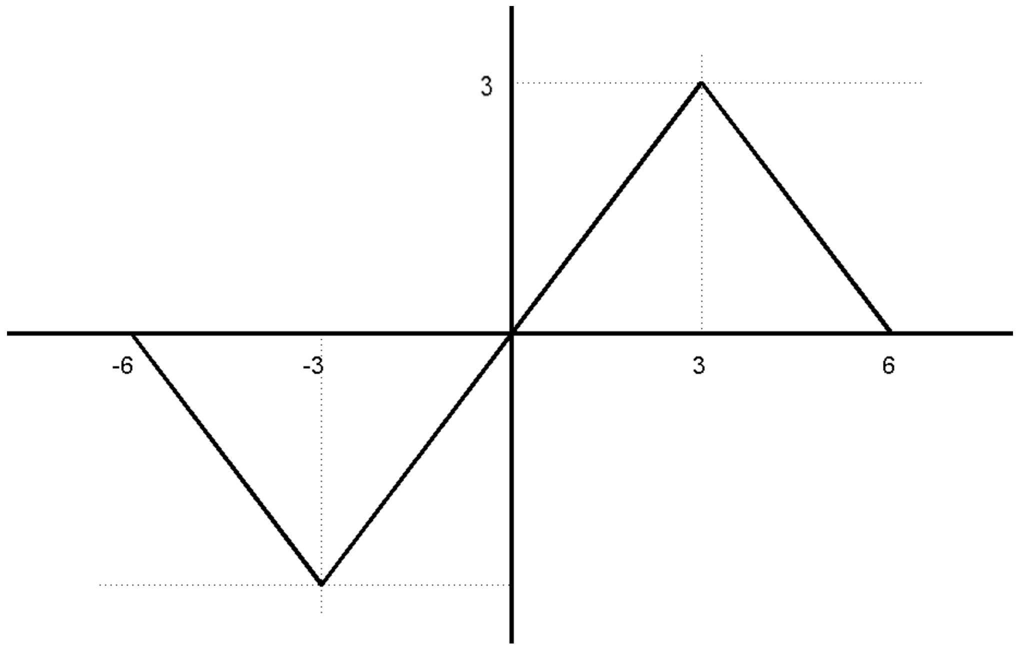
$$a_k = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(x) \cos \frac{2\pi kx}{\tau}\, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(x) \sin \frac{2\pi kx}{\tau}\, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Plancherelov identitet za $f \in L^1_{\mathbb{R}}([-\tau/2, \tau/2])$ glasi

$$\frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |f(x)|^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Zadatak 1.3.7. Razvijte funkciju definiranu sljedećim grafom i proširenu po periodičnosti s periodom $\tau = 12$ u trigonometrijski Fourierov red.



Slika 1.12: Graf funkcije iz zadatka 1.3.7.

Rješenje. Primijetimo da je funkcija neparna pa stoga vrijedi $a_k = 0$ za $k \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{6} \int_{-6}^{6} f(x) \sin \frac{2\pi kx}{12}\, dx = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x) \sin \frac{\pi kx}{6}\, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 x \sin \frac{\pi kx}{6}\, dx + \frac{1}{3} \int_3^6 (6 - x) \sin \frac{\pi kx}{6}\, dx \end{aligned}$$

Kraći račun daje

$$f(x) \sim \frac{24}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi x}{6},$$

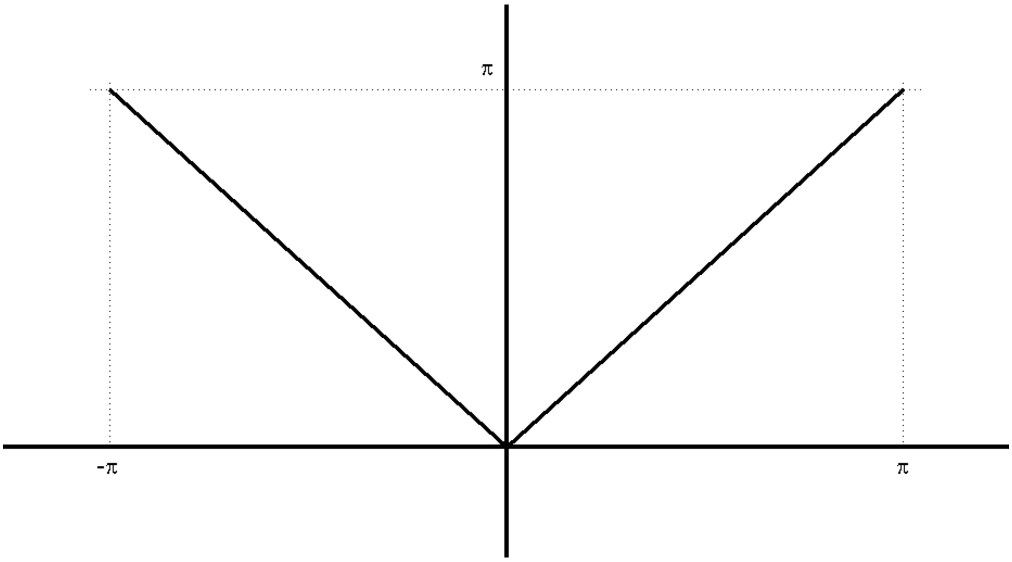
tj.

$$f(x) \sim \frac{24}{\pi^2}\Big(\sin\frac{\pi x}{6} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{6} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{6} - \dots\Big).$$

Zadatak 1.3.8. Funkciju $f(x) = x$ razvijte na intervalu $[0, \pi]$

(a) po funkcijama kosinus, (b) po funkcijama sinus.

Rješenje. (a) Funkciju f proširimo po parnosti na $[-\pi, \pi]$, kao na slici 1.13.



Slika 1.13: Funkcija f iz zadatka 1.3.8 proširena po parnosti.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx = \frac{2((-1)^k - 1)}{k^2\pi}$$

Zbog parnosti ovako proširene funkcije f slijedi $b_k = 0$. Stoga vrijedi

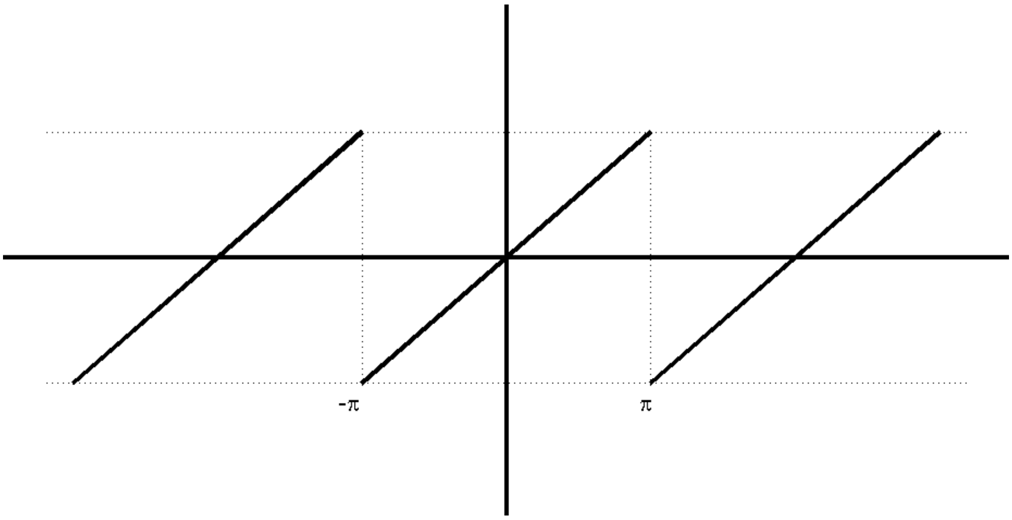
$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2l-1)x}{(2l-1)^2}.$$

(b) Funkciju proširimo po neparnosti na $[-\pi, \pi]$. Dakle, $f(x) = x$ za sve $x \in [-\pi, \pi]$, a proširenje po 2π-periodičnosti izgleda kao na slici 1.14. Lagani račun ovog puta daje:

$$f(x) \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.$$

Zadatak 1.3.9. Koristeći Plancherelovu formulu i račun iz zadatka 1.3.6, izračunajte:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.



Slika 1.14: Funkcija f iz zadatka 1.3.8 proširena po neparnosti i 2π-periodičnosti.

Napomena 1.3.12. Funkcija zadana sa:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{za } s > 1$$

naziva se *Riemannova zeta funkcija*. Postoje formule za sve $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}$; znao ih je još Euler. S druge strane, za ostale vrijednosti od $\zeta(s)$ za $s > 1$ ne očekuju se elementarne formule. Npr. tek 1978. je Apéry pokazao iracionalnost od $\zeta(3)$, ali je i dalje nepoznato je li taj broj transcendentan. Zanimljivo je napomenuti kako se zna samo da je barem jedan od brojeva $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ iracionalan, premda se očekuje da su to svi.

Rješenje. (a) Koristimo da su Fourierovi koeficijenti od

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{za } x \in [-\pi, 0\rangle, \\ 1 & \text{za } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

dani sa $\quad a_k = 0,\ k \in \mathbb{N}_0, \quad b_k = \begin{cases} 0 & \text{za } k \text{ paran} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{za } k \text{ neparan.} \end{cases}$

Imamo

$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \dfrac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2 \\ \dfrac{a_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{4}{(2l-1)\pi} \Big)^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\text{Označimo:} \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l)^2} = \frac{1}{4} S$$

$$\text{Rastavimo:} \quad \sum_{n} = \sum_{n \text{ paran}} + \sum_{n \text{ neparan}} \quad \Longrightarrow \quad S = \frac{1}{4} S + \frac{\pi^2}{8} \quad \Longrightarrow S = \frac{\pi^2}{6}$$

(b) Koristimo da su Fourierovi koeficijenti od $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ dani sa:

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_k = \frac{4(-1)^k}{k^2}, \quad b_k = 0 \quad \text{za } k \in \mathbb{N}$$

te Plancherelovu formulu:

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2\pi^4}{5} \\ \dfrac{a_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{4\pi^4}{9} + 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \end{cases} \implies \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Zadatak 1.3.10. Razvijte funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \in [0, 1/2], \\ 0 & \text{za } x \in \langle 1/2, 1] \end{cases}$$

u kompleksni eksponencijalni Fourierov red

Rješenje.

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\,dx = \int_0^{1/2} e^{-2\pi inx}\,dx \overset{n\neq 0}{=} \frac{1}{-2\pi in}e^{-2\pi inx}\Big|_0^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi in}(e^{-\pi in} - 1) = \frac{1 - e^{-\pi in}}{2\pi in} = \frac{1 - (-1)^n}{2\pi in}, \qquad \text{jer je } e^{i\pi} = -1$$

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \quad \text{paran} \\ \frac{-i}{\pi n} & , n \qquad \text{neparan} \end{cases} \qquad \hat{f}(0) = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n\in 2\mathbb{Z}-1}\frac{-i}{\pi n}e^{2\pi inx} = \frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{-i}{\pi(2l-1)}e^{2\pi i(2l-1)x} + \frac{-i}{-\pi(2l-1)}e^{-2\pi i(2l-1)x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{-e^{2\pi i(2l-1)\pi} + e^{-2\pi i(2l-1)x}}{2l-1}$$

Zadatak 1.3.11. Nađite sve 1-periodične neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje zadovoljavaju funkcijsku jednadžbu

$$f(x) + f\Big(x + \frac{1}{3}\Big) = \sin 2\pi x$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje. *Odgovor*: $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2\pi x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\pi x = \sin\big(2\pi x - \pi/3\big)$.

Svaka takva funkcija f se nalazi u $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Nadalje, funkcija na lijevoj strani jednadžbe se također nalazi u $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ te je njezin n-ti Fourierov koeficijent jednak $\hat{f}(n)\big(1 + e^{2\pi in/3}\big)$. S druge strane, ako označimo $g(x) = \sin 2\pi x$, tada pretvaranjem $\sin 2\pi x = (e^{2\pi ix} - e^{-2\pi ix})/2i$ dobivamo

$$\hat{g}(-1) = \frac{i}{2}, \quad \hat{g}(1) = \frac{-i}{2}, \quad \hat{g}(n) = 0 \text{ za } n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1, 1\}.$$

Iz jednakosti

$$\hat{f}(n)\big(1 + e^{2\pi in/3}\big) = \hat{g}(n) \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}$$

sada slijedi

$$\hat{f}(-1) = \frac{-\sqrt{3}+i}{4}, \quad \hat{f}(1) = \frac{-\sqrt{3}-i}{4}, \quad \hat{f}(n) = 0 \text{ za } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\},$$

tj., kako Fourierovi koeficijenti g.s. jednoznačno određuju funkciju (teorem jedinstvenosti),

$$f(x) = \frac{-\sqrt{3}+i}{4} e^{-2\pi i x} + \frac{-\sqrt{3}-i}{4} e^{2\pi i x} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \cos 2\pi x + \frac{1}{2} \sin 2\pi x.$$

Alternativno, zadatak je moguće riješiti i bez korištenja Fourierove analize. Uvrštavanjem $x + 1/3$ i $x + 2/3$ na mjesto x i korištenjem 1-periodičnosti dobivamo sustav od tri jednažbe:

$$\begin{aligned} f(x) + f\big(x + \tfrac{1}{3}\big) &= \sin 2\pi x, \\ f\big(x + \tfrac{1}{3}\big) + f\big(x + \tfrac{2}{3}\big) &= \sin\big(2\pi x + \tfrac{2\pi}{3}\big), \\ f\big(x + \tfrac{2}{3}\big) + f(x) &= \sin\big(2\pi x + \tfrac{4\pi}{3}\big). \end{aligned}$$

Iz njega možemo izraziti $f(x)$ tako da zbrojimo prvu i treću jednadžbu, oduzmemo im drugu te podijelimo sve sa 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2} \sin 2\pi x + \tfrac{1}{2} \sin\big(2\pi x + \tfrac{4\pi}{3}\big) - \tfrac{1}{2} \sin\big(2\pi x + \tfrac{2\pi}{3}\big) \\ &= \tfrac{1}{2} \sin 2\pi x - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\pi x. \end{aligned}$$

Ovog puta treba direktnim uvrštavanjem provjeriti da dobiveno rješenje doista zadovoljava polaznu jednadžbu, ali to je lako.

1.4 Fourierovi koeficijenti L^1 funkcija

Sjetimo se da smo za $f \in \mathrm{L}^1([0, 1])$ bili definirali

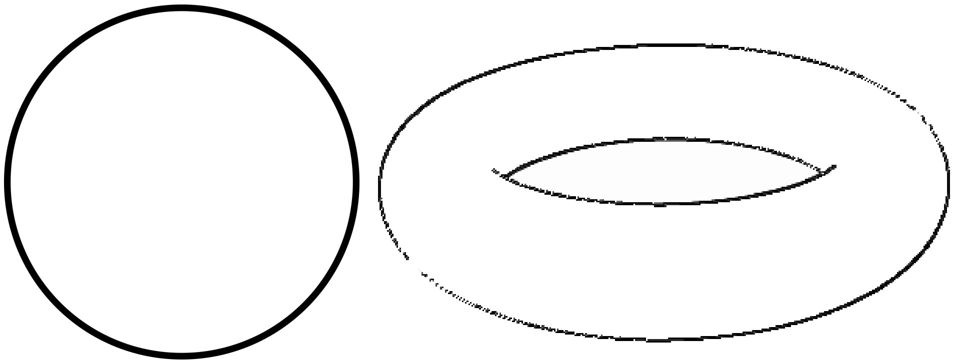
$$\hat{f}(n) := \int_{[0,1]} f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx, \text{ za } n \in \mathbb{Z}.$$

Prisjetimo se i da smo bili poistovjetili $[0, 1]$ sa $\mathbb{S}^1$ na način da smo 1-periodične funkcije na $\mathbb{R}$ shvaćali kao funkcije na $\mathbb{S}^1$. Kad god govorimo o funkciji f na $[0, 1]$ za koju vrijedi $f(0) = f(1)$, zapravo je prirodnije promatrati 1-periodičnu funkciju na $\mathbb{R}$. Ako pak imamo $f \in \mathrm{C}^k([0, 1])$, tada nam je još razumno pretpostaviti $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1)$ za $j = 1, 2, \ldots, k$, jer je tada proširenje po 1-periodičnosti također klase $\mathrm{C}^k(\mathbb{R})$. Obično je praktično ići još korak dalje i reći da zapravo radimo Fourierovu analizu na jednodimenzionalnom torusu.

Definicija 1.4.1. *Prirodno nam je promatrati takozvani* 1-dimenzionalni torus $\mathbb{T}$*, koji je, u smislu grupovne strukture, definiran kao kvocijentna grupa* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*. Najčešće umjesto elemenata od* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *naprosto uzimamo njihove predstavnike iz* $[0, 1\rangle$ *ili* $[-1/2, 1/2\rangle$ *(ovisno što je praktičnije). Tada zbrajanje u* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *postaje "zbrajanje modulo 1". Npr. umjesto* $(\frac{2}{3}+\mathbb{Z})+(\frac{2}{3}+\mathbb{Z}) = \frac{1}{3}+\mathbb{Z}$ *pišemo* $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} (\mathit{mod}\ 1)$*. U smislu prostora mjere,* $\mathbb{T}$ *identificiramo sa* $[0, 1\rangle$ *uz Lebesgueovu mjeru.*

Dakle, za pitanja je li funkcija $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ klase C^k ili parna/neparna shvaćamo da je f proširena po 1-periodičnosti na $\mathbb{R}$, dok za pitanja integrabilnosti ili $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ shvaćamo da je f definirana na $[0, 1\rangle$. Već smo bili pokazali da je $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ (skup neprekidnih fukcija na $\mathbb{T}$) gusti potprostor od $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$.

Topološki je 1-dimenzionalni torus $\mathbb{T}$ isto što i kružnica $\mathbb{S}^1$, ali analogna tvrdnja ne vrijedi u višim dimenzijama; pogledajte sliku 1.4.



Slika 1.15: $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1$, ali $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \not\cong \mathbb{S}^2$.

Propozicija 1.4.2. *Neka su $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Tada vrijedi:*

(a) $(\alpha f + \beta g)\widehat{\ }(n) = \alpha \hat{f}(n) + \beta \hat{g}(n)$; $n \in \mathbb{Z}$,

(b) $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$; $n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz. (a) Slijedi direktno po linearnosti integrala.

(b)
$$\widehat{\overline{f}}(n) = \int_{\mathbb{T}} \overline{f(x)} e^{-2\pi i n x}\, dx = \overline{\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{2\pi i n x}\, dx} = \overline{\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i (-n) x}\, dx} = \overline{\hat{f}(-n)}$$

Q.E.D.

Za $y \in \mathbb{T}$ i $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ definiramo funkciju $f_y \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ formulom
$$f_y(x) := f(x - y).$$
(Opet napomenimo da se oduzimanje vrši modulo 1.) Zovemo je je *translat* od f za y. Lako se vidi da je $f_y \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ i
$$\widehat{f_y}(n) = e^{-2\pi i n y} \hat{f}(n). \tag{1.33}$$
Naime,
$$\int_{\mathbb{T}} |f_y|\, d\lambda = \int_{\mathbb{T}} |f|\, d\lambda < +\infty$$
te
$$\hat{f}_y(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x - y) e^{-2\pi i n x}\, dx = \begin{bmatrix} z = x - y \\ dz = dx \end{bmatrix}$$
$$= \int_{\mathbb{T}} f(z) e^{-2\pi i n (y+z)}\, dz = e^{-2\pi i n y} \underbrace{\int_{\mathbb{T}} f(z) e^{-2\pi i n z}\, dz}_{\hat{f}(n)}.$$

Lema 1.4.3. *Za svaku $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ vrijedi*
$$\lim_{y \to 0} \|f_y - f\|_1 = 0.$$

Napomena 1.4.4. To je zapravo neprekidnost funkcije $y \mapsto f_y$ u točki 0 obzirom na udaljenost na $\mathbb{T}$ danu sa
$$|x + \mathbb{Z}| := |x| \quad \text{za } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$
i L^1 normu na kodomeni $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$.

Dokaz. Uzmimo najprije $g \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$. Ona je čak uniformno neprekidna pa vrijedi

$$\|g_y - g\|_1 = \int_{[0,1]} |g(x-y) - g(x)|\, dx \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |g(x-y) - g(x)| \xrightarrow{y\to 0} 0.$$

Naime, prisjetimo se definicije uniformne neprekidnosti:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in \mathbb{T})\Big(|y| < \delta \implies |g(x-y) - g(x)| < \varepsilon\Big).$$

Pritom kod definicije od $|y|$ za $y \in \mathbb{T}$ opet shvatimo da je $\mathbb{T}$ identificiran s $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$.

Zbog gustoće postoji niz $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ u $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ koji konvergira u L^1 danoj funkciji $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Za dani $\varepsilon > 0$ možemo naći $j_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_0$ vrijedi $\|g_j - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Stavimo $g := g_{j_0}$. Po prethodnom dijelu dokaza postoji $\delta > 0$ takav da za $y \in \mathbb{T}$, $|y| < \delta$ vrijedi $\|g_y - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Osim toga je $\|g_y - f_y\|_1 = \|(g-f)_y\|_1 = \|g - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Konačno, za $y \in \mathbb{T}$, $|y| < \delta$ možemo ocijeniti:

$$\|f_y - f\|_1 \leqslant \underbrace{\|f_y - g_y\|_1}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|g_y - g\|_1}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|g - f\|_1}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

Q.E.D.

Želimo reći nešto o "veličini" Fourierovih koeficijenata. Trivijalna opservacija je:

$$|\hat{f}(n)| = \Big|\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx\Big| \leqslant \int_{\mathbb{T}} \underbrace{|f(x)e^{-2\pi i n x}|}_{|f(x)|}\, dx = \|f\|_1. \tag{1.34}$$

Teorem 1.4.5 (Riemann-Lebesgueova lema)**.** *Ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, tada vrijedi*

$$\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Dokaz. Koristeći $e^{\pi i} = -1$ možemo pisati

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi i n x}\, dx = -\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i n (x - \frac{1}{2n})}\, dx \\
&= \begin{bmatrix} u = x - \frac{1}{2n} \\ du = dx \end{bmatrix} = -\int_{\mathbb{T}} \underbrace{f\big(u + \frac{1}{2n}\big)}_{f_{-\frac{1}{2n}}(u)} e^{-2\pi i n u}\, du \\
\implies \hat{f}(n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi i n x}\, dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} f_{-\frac{1}{2n}}(x) e^{-2\pi i n x}\, dx \\
\implies |\hat{f}(n)| &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} |f(x) - f_{-\frac{1}{2n}}(x)|\, dx = \frac{1}{2}\|f - f_{-\frac{1}{2n}}\|_1
\end{aligned}$$

Po lemi 1.4.3 znamo da vrijedi

$$\lim_{|n|\to\infty} \|f - f_{-\frac{1}{2n}}\|_1 = 0,$$

odakle slijedi tražena tvrdnja. Q.E.D.

Uočimo da već iz trivijalne ocjene (1.34) direktno dobijemo:

Korolar 1.4.6. *Neka su* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *i* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. *Ako* $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ *u* L^1, *tada* $\hat{f}_j(n) \xrightarrow{j\to\infty} \hat{f}(n)$ *uniformno po* $n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz.

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_j(n) - \hat{f}(n)| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |(f_j - f)\hat{}(n)| \leqslant \|f_j - f\|_1 \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Q.E.D.

Neka su $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Promatrajmo funkciju $F : \mathbb{T}\times\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ definiranu sa

$$F(x, y) := f(x - y)g(y).$$

Uočimo da je za fiksni y funkcija

$$x \mapsto F(x, y) = f(x - y)g(y) = g(y)f_y(x)$$

integrabilna i za svaki $y \in \mathbb{T}$ vrijedi:

$$\int_{\mathbb{T}} |F(x, y)|\, dx = |g(y)|\, \|f_y\|_1 = |g(y)|\, \|f\|_1 < +\infty.$$

Štoviše, imamo

$$\int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} |F(x, y)|\, dx\Big)\, dy = \int_{\mathbb{T}} |g(y)|\, \|f\|_1 dy = \|f\|_1\, \|g\|_1 < +\infty. \tag{1.35}$$

Zamjenom integrala (po Tonelli-Fubinijevom teoremu za nenegativne funkcije) iz ocjene (1.35) dobivamo

$$\int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} |F(x, y)|\, dy\Big)\, dx = \|f\|_1\, \|g\|_1 < +\infty.$$

Posebno, za g.s. $x \in \mathbb{T}$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{T}} |F(x, y)|\, dy < +\infty$$

pa za g.s. $x \in \mathbb{T}$ postoji

$$\int_{\mathbb{T}} F(x, y)\, dy$$

(kao neki kompleksni broj).

Funkciju

$$x \mapsto \int_{\mathbb{T}} \underbrace{f(x - y)g(y)}_{F(x,y)}\, dy$$

označavamo s $f * g$ i zovemo *konvolucija* funkcija f i g. Dakle, $f * g$ je u točki $x \in \mathbb{T}$ definirana sa

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{T}} f(x - y)g(y)\, dy = \begin{bmatrix} z = x - y \\ dz = -dy \end{bmatrix} = \int_{\mathbb{T}} f(z)g(x - z)\, dz$$

$$= \text{(neprecizno)} = \int_{\substack{x_1,\, x_2\in\mathbb{T} \\ x_1+x_2=x}} f(x_1)g(x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Pritom dozvoljavamo mogućnost da $(f * g)(x)$ nije definirano za svaki, već samo za gotovo svaki $x \in \mathbb{T}$.

Teorem 1.4.7. *Ako su* $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, *tada je* $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ *te vrijedi:*

(a) $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\, \|g\|_1$,

(b) $(f*g)\hat{}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n) \quad za\ n \in \mathbb{Z}.$

Dokaz. (a) Direktno slijedi iz prethodnog računa.

(b)

$$
\begin{aligned}
(f*g)\hat{}(n) &= \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} f(x-y)g(y)\,dy \Big) e^{-2\pi i n x}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} f(x-y)e^{-2\pi i n (x-y)} g(y) e^{-2\pi i n y}\,dy \Big)\,dx \\
&\text{(Tonelli-Fubinijev teorem za kompleksne funkcije)} \\
&= \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{T}} f(x-y)e^{-2\pi i n (x-y)}\,dx \Big)}_{\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi i n x}\,dx} g(y) e^{-2\pi i n y}\,dy \\
&= \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi i n x}\,dx \Big)}_{\hat{f}(n)} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{T}} g(y)e^{-2\pi i n y}\,dy \Big)}_{\hat{g}(n)}
\end{aligned}
$$

Napomenimo da smo Tonelli-Fubinijev teorem teorem smjeli iskoristiti, jer već otprije znamo da je

$$\int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} \big|f(x-y)e^{-2\pi i n (x-y)} g(y) e^{-2\pi i n y}\big|\,dx \Big)\,dy = \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} |F(x,y)|\,dx \Big)\,dy < +\infty.$$

Q.E.D.

Propozicija 1.4.8. *Konvolucija je binarna operacija na* $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ *koja je bilinearna, komutativna, asocijativna i distributivna u odnosu na zbrajanje. Dakle,* $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ *je uz operaciju* $*$ *kao "množenje" komutativna asocijativna algebra.*

Dokaz. Netrivijalna je jedino asocijativnost:

$$((f*g)*h)(x) = \int_{\mathbb{T}} (f*g)(x-y)h(y)\,dy = \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} f(z)g(x-y-z)\,dz \Big) h(y)\,dy$$

$$\text{(Tonelli-Fubinijev teorem za kompleksne funkcije)}$$

$$= \int_{\mathbb{T}} f(z) \Big(\int_{\mathbb{T}} g(x-y-z)h(y)\,dy \Big)\,dz = \int_{\mathbb{T}} f(z)(g*h)(x-z)\,dz = (f*(g*h))(x),$$

koja vrijedi za g.s. $x \in \mathbb{T}$. Napomenimo da smo za g.s. $x \in \mathbb{T}$ smjeli iskoristiti Tonelli-Fubinijev teorem jer je

$$\int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} |f(z)g(x-y-z)h(y)|\,dy\,dz \Big)\,dx$$

$$\text{(Tonelli-Fubinijev teorem za negativne funkcije)}$$

$$= \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{T}} |g(x-y-z)|\,dx \Big)}_{=\|g\|_1} |h(y)|\,dy \Big) |f(z)|\,dz = \|f\|_1 \|g\|_1 \|h\|_1 < +\infty$$

pa za g.s. $x \in \mathbb{T}$ imamo integrabilnost na produktnom prostoru $\mathbb{T}\times\mathbb{T}$:

$$\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} |f(z)g(x-y-z)h(y)|\,dy\,dz < +\infty.$$

Alternativni način provjere asocijativnosti je korištenjem (b) dijela prethodnog teorema, uspoređivanjem Fourierovih koeficijenata funkcija $(f*g)*h$ i $f*(g*h)$ te upotrebom teorema jedinstvenosti. Q.E.D.

Korolar 1.4.9. *Ako je* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ *i* $\varphi = \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n$, *tada vrijedi:*

(a) $(e_n * f)(x) = \hat{f}(n)e^{2\pi i n x}$,

(b) $(\varphi * f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \hat{f}(n)e^{2\pi i n x}$.

Dokaz. (a) Slijedi iz (1.33) i

$$(e_n * f)(x) = \int_{\mathbb{T}} f(x+y)e_n(-y)\,dy = \int_{\mathbb{T}} f_{-x}(y)e^{-2\pi i n y}\,dy = \widehat{f_{-x}}(n) = e^{-2\pi i n(-x)}\hat{f}(n).$$

(b) Slijedi iz prvog dijela zadatka i bilinearnosti konvolucije.

Q.E.D.

Vratimo se na Fourierov red funkcije $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ obzirom na sistem $\mathbb{B}$. Ima smisla govoriti o redu

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n,$$

ali za složenije rezultate od konvergencije u L^2 moramo fiksirati najprirodniji poredak sumacije. Za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ i $N \in \mathbb{N}_0$ definiramo N*-tu simetričnu parcijalnu sumu Fourierovog reda funkcije* f kao funkciju $S_N f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ danu sa

$$(S_N f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{2\pi i n x} \quad \text{za } x \in \mathbb{T}. \tag{1.36}$$

Iz korolara 1.4.9 uz $a_n = 1$ slijedi

$$S_N f = D_N * f, \tag{1.37}$$

pri čemu je D_N 1-periodični kompleksni trigonometrijski polinom zadan sa

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x}; \quad x \in \mathbb{T}.$$

Zapravo, iz gornjeg slijedi da jednakost (1.37) vrijedi samo g.s. (kada je f neki konkretni predstavnik g.s.-klase). Direktnijim računom

$$(S_N f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x} \int_{\mathbb{T}} f(y)e^{-2\pi i n y}dy = \int_{\mathbb{T}} f(y)\Big(\sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n(x-y)}\Big)dy = (D_N * f)(x)$$

vidimo da (1.37) vrijedi kao jednakost funkcija u baš svakoj točki.

Napomena 1.4.10. (a) Funkciju D_N nazivamo *Dirichletova jezgra.* Vrijedi formula:

$$D_N(x) = \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x}, \quad x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \setminus \{0\},$$
$$D_N(0) = 2N+1.$$

Naime,

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} (e^{2\pi i x})^n = (e^{2\pi i x})^{-N} \sum_{n=0}^{2N} (e^{2\pi i x})^n = e^{-2\pi i N x}\frac{(e^{2\pi i x})^{2N+1} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} =$$

$$\frac{e^{\pi i(2N+1)x} - e^{-\pi i(2N+1)x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \cdot \underbrace{\frac{e^{\pi i(2N+1)x}}{e^{\pi i x}} \cdot e^{-2\pi i N x}}_{=1} = \frac{\cancel{2i}\sin(2N+1)\pi x}{\cancel{2i}\sin \pi x}$$

Ovaj račun je ispravan čim je $e^{2\pi i x} \neq 1$, tj. npr. za $x \in [-1/2, 1/2\rangle \setminus \{0\}$.

(b) Vrijedi:

- $D_N(x) \in \mathbb{R}$,
- $D_N(-x) = D_N(x)$,
- $\int_{\mathbb{T}} D_N(x)\,dx = 1$.

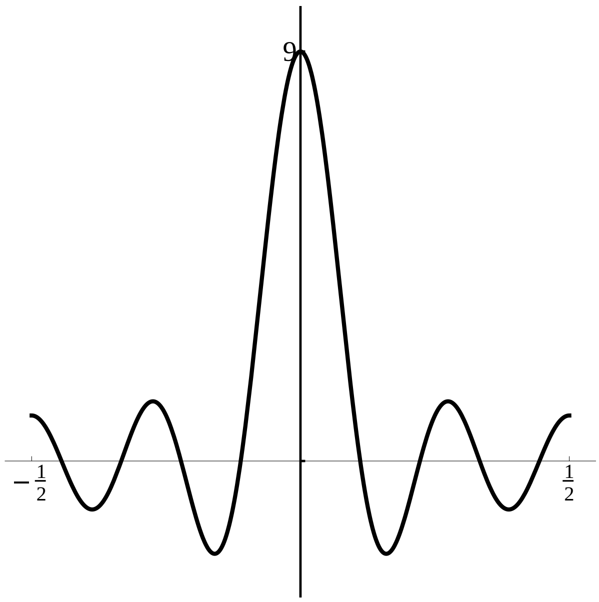
Makar je "većina mase" od D_N koncentrirana oko 0, ipak D_N nema sasvim dobra svojstva što se tiče integrabilnosti. Tako npr. za fiksan $0 < \delta < \frac{1}{2}$

$$\int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{2}} |D_N(x)|\,dx$$

<u>ne</u> konvergira prema 0 kada N teži u ∞, što je bilo korisno svojstvo trigonometrijskih polinoma T_n iz dokaza leme 1.3.1. Nadalje, vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}} |D_N(x)|\,dx = +\infty,$$

što će biti pokazano u zadatku 1.4.9.



Slika 1.16: D_N za $N = 4$.

* * *

Zadatak 1.4.1. Pokažite da u $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ <u>ne</u> postoji neutralni element obzirom na operaciju konvolucije.

Rješenje. Pretpostavimo da postoji $e \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ takav da bi za svaku $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ vrijedilo $e * f = f$. Tada bismo imali $\hat{e}(n)\hat{f}(n) = \hat{f}(n)$; $n \in \mathbb{Z}$. Odabirom $f = e_n$ bismo zbog $\hat{f}(n) = \hat{e}_n(n) = 1$ dobili

$$\hat{e}(n) \cdot 1 = 1 \implies \hat{e}(n) = 1.$$

To bi vrijedilo za svaki $n \in \mathbb{Z}$, što je u kontradikciji s Riemann-Lebesgueovom lemom, koja kaže $\lim_{|n|\to\infty} \hat{e}(n) = 0$.

Zadatak 1.4.2. Ako $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ ima samo konačno mnogo Fourierovih koeficijenata različitih od 0, pokažite da tada f mora biti (1-periodični kompleksni) trigonometrijski polinom.

Rješenje. Pretpostavimo da je $N \in \mathbb{N}_0$ dovoljno velik kako bi vrijedilo $\hat{f}(n) = 0$ za sve $n \in \mathbb{Z}$ takve da je $|n| > N$. Definiramo

$$g := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e_n.$$

Već smo komentirali da su Fourierovi koeficijenti trigonometrijskog polinoma zapravo njegovi vlastiti koeficijenti (što se i u kompleksnom slučaju lako vidi množenjem i integriranjem) pa vrijedi $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Po injektivnosti operatora $\hat{\cdot}$ (teorem jedinstvenosti) slijedi $f = g$, tj. f je trigonometrijski polinom.

Zadatak 1.4.3. Ako funkcija $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ zadovoljava $f * f = f$, dokažite da ona mora biti trigonometrijski polinom. (Ne zadovoljavaju svi trigonometrijski polinomi spomenutu jednakost; ovakvi ze zovu *idempotentni.*)

Rješenje.

$$f * f = f \implies \hat{f}(n)^2 = \hat{f}(n);\ n \in \mathbb{Z} \implies \hat{f}(n) \in \{0, 1\};\ n \in \mathbb{Z}$$

Zbog

$$\lim_{|n| \to \infty} \hat{f}(n) = 0$$

zaključujemo da samo konačno mnogo koeficijenata $\hat{f}(n)$ može biti različito od 0. Koristeći prethodni zadatak slijedi tražena tvrdnja.

Zadatak 1.4.4. Dokažite da je $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ ideal u $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ obzirom na operaciju konvolucije.

Rješenje. Zapravo trebamo pokazati:

$$f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}),\ g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}) \implies f * g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}).$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_2^2 &= \int_{\mathbb{T}} |(f * g)(x)|^2\, dx \leqslant \int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)||g(y)|\, dy \Big)^2 dx \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)|\, dy \Big)}_{\|f\|_1} \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)||g(y)|^2\, dy \Big) dx \\
&\overset{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \|f\|_1 \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)|\, dx \Big)}_{\|f\|_1} |g(y)|^2\, dy = \|f\|_1^2\, \|g\|_2^2 < +\infty \implies f * g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}).
\end{aligned}$$

Zadatak 1.4.5. Za funkciju $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$f_n := \underbrace{f * f * \cdots * f}_{n \text{ puta se pojavljuje } f}.$$

(a) Ako niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira u normi $\|\cdot\|_1$ prema nekoj funkciji iz $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, dokažite da mora vrijediti $\sup_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(m)| \leqslant 1$.

(b) Ako niz $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira u normi $\|\cdot\|_1$ prema nekoj funkciji $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$, dokažite da g mora biti 1-periodični kompleksni trigonometrijski polinom.

(c) Ako je $\|f\|_1 < 1$, dokažite da niz $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergira u normi $\|\cdot\|_1$ prema nul-funkciji.

Rješenje. (a) Ako niz $(f_n)_{n=1}^\infty$ konvergira u normi $\|\cdot\|_1$ prema nekoj funkciji g, tada za svaki $m \in \mathbb{Z}$ zbog ocjene

$$|\hat{f_n}(m) - \hat{g}(m)| \leqslant \|f_n - g\|_1$$

zaključujemo da niz brojeva $(\hat{f_n}(m))_{n=1}^\infty$ konvergira prema $\hat{g}(m)$. Kako je $\hat{f_n}(m) = \hat{f}(m)^n$, zaključujemo da mora biti $|\hat{f}(m)| \leqslant 1$.

(b) Iz rezoniranja u (a) dijelu znamo da je broj $\hat{g}(m)$ jednak limesu $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}(m)^n$, ali zbog

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(m)^n = \lim_{n\to\infty} \hat{f}(m)^{2n} = \big(\lim_{n\to\infty} \hat{f}(m)^n\big)^2$$

svaki konačni limes tog oblika mora biti 0 ili 1. Dakle, za svaki $m \in \mathbb{Z}$ vrijedi $\hat{g}(m) \in \{0, 1\}$, a radi Riemann-Lebesgueove leme je samo konačno mnogo Fourierovih koeficijenata $\hat{g}(m)$ različito od 0. Po teoremu jedinstvenosti slijedi da g mora biti trigonometrijski polinom.

(c) Koristeći ocjenu s predavanja za 1-normu konvolucije dobivamo $\|f_n\|_1 \leqslant \|f\|_1^n$. Ako je $\|f\|_1 < 1$, odavde po teoremu o sendviču slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$.

Zadatak 1.4.6. Definiramo operaciju $\odot$ tako da za $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ stavimo

$$(f \odot g)(x) := f(x) \int_{\langle -\infty, x]} g(t)dt + g(x) \int_{\langle -\infty, x]} f(t)dt \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Dokažite da za svake $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ vrijedi $f \odot g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ te $\|f \odot g\|_{1,\mathbb{R}} \leqslant \|f\|_{1,\mathbb{R}} \|g\|_{1,\mathbb{R}}$.

(b) Dokažite da je $\odot$ asocijativna binarna operacija na $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

Rješenje. (a) Imamo

$$|(f \odot g)(x)| \leqslant |f(x)| \int_{\langle -\infty, x]} |g(t)|dt + |g(x)| \int_{\langle -\infty, x]} |f(t)|dt$$

pa je

$$\begin{aligned} \|f \odot g\|_{1,\mathbb{R}} &= \int_{\mathbb{R}} |(f \odot g)(x)|\, dx \leqslant \iint_{\{(x,t):x \geqslant t\}} |f(x)||g(t)|\, dxdt + \iint_{\{(x,t):x \geqslant t\}} |f(t)||g(x)|\, dtdx \\ &= \iint_{\{(x,t):x \geqslant t\}} |f(x)||g(t)|\, dxdt + \iint_{\{(x,t):x \leqslant t\}} |f(x)||g(t)|\, dxdt \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x)||g(t)|\, dxdt = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|dt\Big) = \underbrace{\|f\|_{1,\mathbb{R}} \|g\|_{1,\mathbb{R}}}_{<+\infty}. \end{aligned}$$

Dakle, posebno imamo $f \odot g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i vrijedi tražena nejednakost.

(b) Vrlo sličan račun kao u (a) dijelu daje

$$\int_{\langle -\infty, x]} (f \odot g)(t)dt = \Big(\int_{\langle -\infty, x]} f\Big)\Big(\int_{\langle -\infty, x]} g\Big)$$

pa dvostrukom primjenom definicije dobivamo:

$$\big((f\odot g)\odot h\big)(x) = (f\odot g)(x)\int\limits_{\langle -\infty,x]} h(t)dt + h(x)\int\limits_{\langle -\infty,x]}(f\odot g)(t)dt$$
$$= f(x)\Big(\int\limits_{\langle -\infty,x]} g\Big)\Big(\int\limits_{\langle -\infty,x]} h\Big) + g(x)\Big(\int\limits_{\langle -\infty,x]} h\Big)\Big(\int\limits_{\langle -\infty,x]} f\Big) + h(x)\Big(\int\limits_{\langle -\infty,x]} f\Big)\Big(\int\limits_{\langle -\infty,x]} g\Big).$$

Na sasvim isti način se pokazuje da je $\big(f\odot(g\odot h)\big)(x)$ također jednako gornjem izrazu.

Zadatak 1.4.7. Ako je $N\in\mathbb{N}$ i $D_N(x)=\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi inx}$ Dirichletova jezgra, izračunajte:

(a) $\displaystyle\int_0^1 D_N(x)^2dx,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 D_{2N}(x)D_N(2x)dx.$

Rješenje. (a) Obzirom da je D_N zapravo realna funkcija, Plancherelov identitet daje

$$\int_0^1 D_N(x)^2dx = \int_0^1 |D_N(x)|^2dx = \|D_N\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{D}_N(n)|^2 = \sum_{n=-N}^{N} 1^2 = 2N+1.$$

(b) Ovog puta je riječ o skalarnom produktu funkcija

$$D_{2N}(x) = \sum_{-2N\leqslant n\leqslant 2N} e^{2\pi inx}$$

i

$$D_N(2x) = \sum_{-N\leqslant n\leqslant N} e^{4\pi inx} = \sum_{\substack{-2N\leqslant n\leqslant 2N\\ n \text{ paran}}} e^{2\pi inx}.$$

Parsevalov identitet daje

$$\big\langle D_{2N}(\cdot), D_N(2\cdot)\big\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{D}_{2N}(n)\overline{\widehat{D_N(2\cdot)}(n)} = \sum_{\substack{-2N\leqslant n\leqslant 2N\\ n \text{ paran}}} 1 = 2N+1.$$

Zadatak 1.4.8. Ako $D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi inx}$ označava 1-periodičnu Dirichletovu jezgru, izračunajte $\|f*g*h\|_2$, pri čemu je $f(x)=D_{15}(2x)$, $g(x)=D_{10}(3x)$, $h(x)=D_6(5x)$.

Rješenje. *Odgovor*: $\sqrt{3}$.
Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
f(x) &= D_{15}(2x) = \textstyle\sum_{n=-15}^{15} e^{2\pi in(2x)} = [m=2n] = \displaystyle\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ -30\leqslant m\leqslant 30\\ m \text{ je djeljiv s } 2}} e^{2\pi imx},\\
g(x) &= D_{10}(3x) = \textstyle\sum_{n=-10}^{10} e^{2\pi in(3x)} = [m=3n] = \displaystyle\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ -30\leqslant m\leqslant 30\\ m \text{ je djeljiv s } 3}} e^{2\pi imx},\\
h(x) &= D_6(5x) = \textstyle\sum_{n=-6}^{6} e^{2\pi in(5x)} = [m=5n] = \displaystyle\sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ -30\leqslant m\leqslant 30\\ m \text{ je djeljiv s } 5}} e^{2\pi imx}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(m) &= \begin{cases} 1 & \text{ako je } -30\leqslant m\leqslant 30 \text{ i } m \text{ je djeljiv s } 2,\\ 0 & \text{inače,}\end{cases}\\
\hat{g}(m) &= \begin{cases} 1 & \text{ako je } -30\leqslant m\leqslant 30 \text{ i } m \text{ je djeljiv s } 3,\\ 0 & \text{inače,}\end{cases}\\
\hat{h}(m) &= \begin{cases} 1 & \text{ako je } -30\leqslant m\leqslant 30 \text{ i } m \text{ je djeljiv s } 5,\\ 0 & \text{inače}\end{cases}
\end{aligned}$$

pa radi formule $(f*g*h)\hat{}(m) = \hat{f}(m)\hat{g}(m)\hat{h}(m)$ imamo

$$(f*g*h)\hat{}(m) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } m \in \{-30, 0, 30\}, \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

te Plancherelov identitet daje

$$\|f*g*h\|_2 = \|(f*g*h)\hat{}\|_{\ell^2} = \left(1^2+1^2+1^2\right)^{1/2} = \sqrt{3}.$$

Zadatak 1.4.9. Dokažite:

$$\lim_{N\to\infty} \|D_N\|_1 = \lim_{N\to\infty} \int_0^1 |D_N(x)|dx = +\infty.$$

Rješenje. Prisjetimo se formule za D_N, koja daje

$$\|D_N\|_1 = 2\int_0^{1/2} \frac{|\sin(2N+1)\pi x|}{\sin \pi x} dx \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2} \frac{|\sin(2N+1)\pi x|}{x} dx$$

radi $\sin t < t$ za $t \in \langle 0, \pi/2]$. Kako imamo

$$\left|\sin(2N+1)\pi x\right| \geqslant \tfrac{1}{2} \iff \frac{(k+\frac{1}{6})\cancel{\pi}}{(2N+1)\cancel{\pi}} \leqslant x \leqslant \frac{(k+\frac{5}{6})\cancel{\pi}}{(2N+1)\cancel{\pi}} \text{ za neki } k \in \mathbb{Z},$$

slijedi

$$\|D_N\|_1 \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1/2}{(k+\frac{5}{6})/(2N+1)} \cdot \frac{2/3}{2N+1} \geqslant \frac{2}{3\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{3\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Preostaje pustiti $N \to \infty$ i iskoristiti divergenciju harmonijskog reda.

Zadatak 1.4.10. Ako je $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{T})$, dokažite da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\hat{f}(n) = o(|n|^{-k}) \text{ kada } n \to \pm\infty,$$

$$\text{tj. } \lim_{n\to\pm\infty} |n|^k |\hat{f}(n)| = 0.$$

Rješenje. U zadatku 1.3.4 smo parcijalnom integracijom izveli

$$\widehat{f'}(n) = 2\pi i n \, \hat{f}(n) \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{Z}.$$

Primjenjujući tu formulu na derivacije funkcije f indukcijom lako dobijemo:

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\pi i n)^k \, \hat{f}(n) \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{Z} \text{ i svaki } k \in \mathbb{N}.$$

Posebno za $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$\widehat{f^{(k+1)}}(n) = (2\pi i n)^{k+1} \hat{f}(n) \implies |2\pi n|^{k+1} |\hat{f}(n)| = |\widehat{f^{(k+1)}}(n)| \leqslant \|f^{(k+1)}\|_1$$

$$\implies |n|^k |\hat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{k+1}|n|} \|f^{(k+1)}\|_1.$$

Sada pustimo limes $n \to \pm\infty$ i koristimo teorem o sendviču.

Zadatak 1.4.11. Neka je $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$. Dokažite da vrijedi

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) = \int_{[0,1]} f(x)\, dx,$$

pri čemu konvergenciju gornjeg niza funkcija shvaćamo kao konvergenciju u L^2 normi.

Rješenje. Označimo $g_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$g_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) - \int_{[0,1]} f(x)\, dx,$$

odnosno

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_{-\frac{k}{n}} - \hat{f}(0).$$

Želimo pokazati da $\|g_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Računamo Fourierove koeficijente od g_n. Najprije pretpostavimo $m \neq 0$. Ako m nije višekratnik od n, imamo:

$$\begin{aligned}\hat{g}_n(m) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_{-\frac{k}{n}}(m) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{k}{n} m} \hat{f}(m) = \frac{1}{n} \hat{f}(m) \sum_{k=0}^{n-1} \Big(e^{\frac{2\pi i m}{n}}\Big)^k \\ &= \frac{1}{n} \hat{f}(m) \frac{(e^{\frac{2\pi i m}{n}})^n - 1}{e^{\frac{2\pi i m}{n}} - 1} = \frac{1}{n}\, \hat{f}(m) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

jer je $e^{\frac{2\pi i m}{n}} - 1 \neq 0$. Kada m jest višekratnik od n vrijedi:

$$\hat{g}_n(m) = \frac{1}{n} \hat{f}(m) \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \hat{f}(m).$$

Konačno, za $m = 0$ dobivamo:

$$\hat{g}_n(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_{-\frac{k}{n}}(0) - \hat{f}(0) = \hat{f}(0) - \hat{f}(0) = 0.$$

Po Plancherelovoj formuli imamo:

$$\|g_n\|_2^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n(m)|^2 = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ m\neq 0\\ n|m}} |\hat{f}(m)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (|\hat{f}(kn)|^2 + |\hat{f}(-kn)|^2) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} (|\hat{f}(m)|^2 + |\hat{f}(-m)|^2).$$

Posljednji izraz (tzv. rep reda) konvergira u 0 kada $n \to \infty$ zbog konvergencije redova

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\hat{f}(m)|^2, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |\hat{f}(-m)|^2.$$

Zadatak 1.4.12. Dokažite

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

(Inače se taj identitet lako dobije dvostrukim prebrojavanjem broja izbora n djece iz razreda od n djevojčica i n dječaka.)

Rješenje. Promatramo trigonometrijski polinom:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{2\pi i k x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (e^{2\pi i x})^k = (1 + e^{2\pi i x})^n.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_0^1 |1 + e^{2\pi i x}|^{2n}\, dx = \int_0^1 |1 + \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x|^{2n}\, dx \\
&= \int_0^1 |2\cos^2 \pi x + i 2 \sin \pi x\, \cos \pi x|^{2n}\, dx \\
&= \int_0^1 2^{2n} |\cos \pi x|^{2n} \underbrace{|\underbrace{\cos \pi x + i \sin \pi x}_{e^{i\pi x}}|^{2n}}_{1}\, dx \\
&= 2^{2n+1} \int_0^{1/2} \cos^{2n} \pi x\, dx = \begin{bmatrix} t = & \pi x \\ dt = & \pi\, dx \end{bmatrix} \\
&= 2^{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, \frac{dt}{\pi} = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt.
\end{aligned}$$

Sada pogledajte zadatak 1.2.6, gdje smo za $n \in \mathbb{N}$ izveli formulu

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Dakle,

$$\|f\|_2^2 = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \frac{(2n)!}{(\underbrace{(2n)!!}_{2^n n!})^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

Alternativno, korištenjem binomne formule:

$$\|f\|_2^2 = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt = \frac{2^{2n-1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} t\, dt$$

$$= \frac{2^{2n-1}}{\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\Big)^{2n} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \underbrace{(e^{it})^k\, (e^{-it})^{2n-k}}_{e^{(2k-2n)it}}\, dt$$

$$= (\text{preostane samo član za } k = n) = \frac{1}{2\pi} \binom{2n}{n} \cdot 2\pi = \binom{2n}{n}.$$

S druge strane imamo $\hat{f}(k) = \binom{n}{k}$ za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Po Plancherelovoj formuli je:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 = \binom{2n}{n}.$$

1.5 Teoremi o točkovnoj konvergenciji

Prisjetimo se da je N-ta parcijalna suma Fourierovog reda funkcije f zapravo oblika

$$S_N f = D_N * f,$$

pri čemu je

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n x}$$

Dirichletova jezgra obzirom na sistem $\mathbb{B}$. (Kasnije ćemo raditi i s Dirichletovom jezgrom obzirom na sistem $Trig$.) U ovom odjeljku započinjemo proučavanje točkovne konvergencije, tj. postojanja limesa $\lim_{N\to\infty}(S_N f)(x)$ za svaku točku x.

- Fourierov originalni rad bio je odbijen najviše zbog problema konvergencije po točkama.
- 1826. A.-L. Cauchy objavljuje rad s pogrešnim dokazom konvergencije.
- 1829. P. G. L. Dirichlet popravlja Cauchyjevu grešku. U sklopu tih razmatranja uočava da Fourierov red ne mora u svakoj točki konvergirati prema polaznoj funkciji; jednostavni primjer je 1-periodična funkcija $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$. Dakle, treba naći korisne dovoljne uvjete.

Lema 1.5.1. *Neka je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ kompleksna funkcija. Ako je $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ omeđena izmjeriva funkcija za koju vrijedi*

$$\lim_{c\to\pm\infty} \frac{1}{c}\int_0^c h(t)\,dt = 0,$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)h(nt)\,dt = 0.$$

Napomena 1.5.2. Primjetimo da je ova lema svojevrsna generalizacija Riemann-Lebesgueove leme, koja govori:

- $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = 0,$
- $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0,$

čim je $f \in \mathrm{L}^1([-\pi,\pi])$. Naime,

$$\Big|\frac{1}{c}\int_0^c \sin t\,dt\Big| = \Big|\frac{1-\cos c}{c}\Big| \leqslant \frac{2}{|c|} \xrightarrow{c\to\pm\infty} 0$$

te slično vrijedi za cos. Osim toga, funkciju f na $[-\pi,\pi]$ možemo proširiti nulom na cijeli $\mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je najprije $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$ za neke $0 < a < b$. Tada je radi pretpostavke

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)h(nt)\,dt = \int_{[a,b]} h(nt)\,dt = [x = nt] = \frac{1}{n}\int_0^{nb} h(x)\,dx - \frac{1}{n}\int_0^{na} h(x)\,dx$$

$$= b\cdot \underbrace{\frac{1}{nb}\int_0^{nb} h}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} - a\cdot \underbrace{\frac{1}{na}\int_0^{na} h}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Slično se riješe i ostali slučajevi obzirom na predznake od a i b. Ako je pak f step-funkcija, rezultat slijedi po linearnosti. Neka je sada $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ proizvoljna kompleksna funkcija i neka je

$$K := \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|.$$

Uzmemo li $\varepsilon > 0$, možemo naći step-funkciju g takvu da je

$$\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Po netom dokazanom postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} g(t)h(nt)\, dt \Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Konačno, za $n \geqslant n_0$ imamo:

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} f(t)h(nt)\, dt \Big| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| \underbrace{|h(nt)|}_{\leqslant K}\, dt + \Big| \int_{\mathbb{R}} g(t)h(nt)\, dt \Big| \leqslant \underbrace{K\|f - g\|_1}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Q.E.D.

N-ta parcijalna suma Fourierovog reda realne funkcije f obzirom na trigonometrijski sistem $Trig$ je

$$(S_N^{\mathbb{R}} f)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \Big(\cos nt \Big(\int_{[-\pi,\pi]} f(x) \cos nx\, dx \Big) + \sin nt \Big(\int_{[-\pi,\pi]} f(x) \sin nx\, dx \Big) \Big)$$

adicijska formula: $\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx = \cos n(t - x)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\, \pi]} D_N^{\mathbb{R}}(t - x) f(x)\, dx,$$

pri čemu je

$$D_N^{\mathbb{R}}(x) := 1 + 2 \sum_{n=1}^{N} \cos nx = \mathrm{Re}\Big(\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} \Big) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$

Dirichletova jezgra obzirom na $Trig$. Opet se može izvesti formula

$$\begin{cases} D_N^{\mathbb{R}}(x) = & \dfrac{\sin(N + 1/2)x}{\sin(x/2)} \quad \text{za } x \in [-\pi, \pi\rangle \setminus \{0\}, \\ D_N^{\mathbb{R}}(0) = & 2N + 1 \end{cases}$$

te je posebno $D_N^{\mathbb{R}}$ parna funkcija. Možemo pisati,

$$(S_N^{\mathbb{R}} f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(t - x) D_N^{\mathbb{R}}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(t + x) D_N^{\mathbb{R}}(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow (S_N^{\mathbb{R}} f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,\, \pi]} \underbrace{\big(f(t + x) + f(t - x)\big) D_N^{\mathbb{R}}(x)}_{\text{parna}}\, dx, \tag{1.38}$$

jer je dobivena podintegralna funkcija parna u x pa joj je $\int_{[-\pi,\pi]} = 2 \int_{[0,\pi]}$.

Lema 1.5.3. *Neka su $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([0,\pi])$ realna funkcija i $0 < a \leqslant \pi$. Ako postoji jedan od limesa*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,a]} f(t) \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\, dt$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,a]} f(t) \frac{\sin(n+1/2)t}{t/2}\, dt,$$

tada postoji i drugi i oni moraju biti jednaki.

Dokaz. Promotrimo funkciju

$$t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2} & \text{za } t \in \langle 0, a], \\ 0 & \text{za } t = 0 \end{cases}$$

te uočimo da je ona neprekidna na $\langle 0, a]$ i

$$\lim_{t\to 0} \Big(\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2} \Big) = \lim_{t\to 0} \frac{t/2 - \sin(t/2)}{t/2 \sin(t/2)}$$

$$\text{dvostruki L'Hôpital}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1/4)\sin(t/2)}{(1/2)\cos(t/2) - (1/8)t\sin(t/2)} = 0$$

pa je ona neprekidna na $[0, a]$ i posebno je omeđena. Zato se funkcija

$$t \mapsto f(t) \Big(\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2} \Big)$$

nalazi u $\mathrm{L}^1([0, a])$, čak i kad se još pomnoži s $\cos(t/2)$ ili $\sin(t/2)$. Primijenimo lemu 1.5.1 na $h(t) = \sin t$ i $h(t) = \cos t$, iz koje dobijemo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,a]} f(t) \Big(\frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2} \Big) \underbrace{\sin\Big(n + \frac{1}{2}\Big)t}_{\sin(nt)\cos(t/2)+\cos(nt)\sin(t/2)}\, dt = 0,$$

što daje traženu tvrdnju. Q.E.D.

Teorem 1.5.4. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$ i uzmimo $t \in [-\pi, \pi]$. Limes*

$$\lim_{N\to\infty} (S_N^{\mathbb{R}} f)(t)$$

postoji ako i samo ako za neki $0 < a \leqslant \pi$ postoji limes

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{[0,\,a]} \big(f(t+x) + f(t-x)\big) \frac{\sin(N+1/2)x}{x}\, dx$$

te su u tom slučaju ta dva limesa jednaka.

Dokaz. Vidjeli smo da je prvi limes zapravo

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[0,\pi]} \big(f(t+x) + f(t-x)\big) D_N^{\mathbb{R}}(x)\, dx.$$

Fiksirajmo $0 < a \leqslant \pi$. Uočimo da za $x \in [a, \pi]$ vrijedi $\sin \frac{x}{2} \geqslant \sin \frac{a}{2} > 0$ pa su

$$x \mapsto \frac{f(t \pm x)}{\sin(x/2)}$$

funkcije iz $\mathrm{L}^1([a, \pi])$. Po lemi 1.5.1 slijedi

$$\lim_{N\to\infty} \int_{[a,\pi]} f(t \pm x) D_N^{\mathbb{R}}(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_{[a,\pi]} \frac{f(t \pm x)}{\sin x/2} \sin\Big(N + \frac{1}{2}\Big) x\, dx = 0.$$

Time smo "apsolvirali" dio integrala po $[a, \pi]$. Dakle, Fourierov red kovergira u točki t ako i samo ako za neki $0 < a \leqslant \pi$ postoji limes

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[0,a]} \big(f(t + x) + f(t - x)\big) D_N^{\mathbb{R}}(x)\, dx$$

te mu je u tom slučaju suma upravo jednaka spomenutom limesu. Budući da je

$$x \mapsto f(t + x) + f(t - x)$$

funkcija u $\mathrm{L}^1([0, \pi])$, rezultat slijedi primjenom leme 1.5.3. Q.E.D.

Korolar 1.5.5. *Neka je $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$ i uzmimo $t \in [-\pi, \pi]$. Fourierov red od f konvergira u točki t prema broju $A \in \mathbb{R}$ ako i samo ako postoji $0 < a \leqslant \pi$ takav da vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{[0,a]} \big(f(t + x) + f(t - x) - 2A\big) \frac{\sin(N + 1/2)x}{x}\, dx = 0.$$

Dokaz. Promatramo funkciju $g(x) := f(x) - A$ koja je također iz $\mathrm{L}^1([-\pi, \pi\rangle)$ i sjetimo se da su Fourierovi koeficijenti linearni. Tvrdnja slijedi primjenom teorema 1.5.4:

$$\lim_{N\to\infty} (S_N^{\mathbb{R}} f)(t) = A \iff \lim_{N\to\infty} (S_N^{\mathbb{R}} g)(t) = 0$$

$$\iff \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{[0,a]} \big(g(t + x) + g(t - x)\big) \frac{\sin((N + 1/2)x}{x}\, dx = 0$$

$$\iff \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{[0,a]} \big(f(t + x) + f(t - x) - 2A\big) \frac{\sin(N + 1/2)x}{x}\, dx = 0.$$

Q.E.D.

Zanima nas utječe li na konvergenciju/limes Fourierovog reda u točki t ako funkciju f promijenimo "daleko" od t. Slijedeći rezultat govori da je odgovor negativan, što je mnogo drugačije nego kod redova potencija.

Teorem 1.5.6 (Riemannov princip lokalizacije)**.** *Neka su $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodične funkcije takve da su $f|_{[-\pi,\pi]}, g|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi, \pi])$. Neka su još $t \in \mathbb{R}$ i $a > 0$. Ako vrijedi $f = g$ g.s. na intervalu $\langle t - a, t + a\rangle$, tada Fourierovi redovi za f i g ili oba konvergiraju ili oba divergiraju u točki t. Ako oba konvergiraju, tada oni konvergiraju prema istoj vrijednosti.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti promatramo $0 < a \leqslant \pi$. Uzmimo $h = f - g$ pa je po pretpostavci $h = 0$ g.s. na $\langle t - a, t + a\rangle$. Po teoremu 1.5.4 dobijemo da Fourierov red od h u t konvergira u 0. Iz linearnosti Fourierovih koeficijenata proizlazi

$$(S_N^{\mathbb{R}} f)(t) - (S_N^{\mathbb{R}} g)(t) = (S_N^{\mathbb{R}} h)(t) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pa slijedi tražena tvrdnja. Q.E.D.

Teorem 1.5.7 (Dinijev kriterij). *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Ako je $t \in \mathbb{R}$ i postoji $a > 0$ takav da je funkcija*

$$x \mapsto \frac{f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)}{x}$$

u $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([0,a])$, tada Fourierov red od f u točki t konvergira prema $f(t)$.

Dokaz. Primjenom leme 1.5.1 na navedenu funkciju iz $\mathrm{L}^1([0,a])$ dobivamo

$$\lim_{N\to\infty} \int_{[0,a]} \big(f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)\big) \frac{\sin(N+1/2)x}{x}\, dx = 0$$

pa tvrdnja slijedi primjenom korolara 1.5.5 uz $A = f(t)$. Q.E.D.

Definicija 1.5.8. *Reći ćemo da funkcija f zadovoljava* Hölderov uvjet *reda $\nu > 0$ u točki $t \in \mathbb{R}$ ako postoje $C > 0$ i $a > 0$ takvi da za svaki $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leqslant a$ vrijedi:*

$$\big|f(t+h) - f(t)\big| \leqslant C|h|^\nu.$$

U posebnom slučaju $\nu = 1$ taj uvjet se zove Lipschitzov uvjet *u točki $t \in \mathbb{R}$.*

Napomena 1.5.9. Funkcije iz gornje definicije još nazivamo *Hölder-neprekidnim* (odnosno *Lipschitz-neprekidnim*) funkcijama u točki t. Očito je svaka takva funkcija ujedno i neprekidna u t (pa je naziv opravdan).

Teorem 1.5.10 (Lipschitzov kriterij). *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Ako u točki $t \in \mathbb{R}$ funkcija f zadovoljava Hölderov uvjet (nekog reda), tada Fourierov red funkcije f konvergira u točki t prema $f(t)$.*

Dokaz. Neka je $\nu > 0$ red Hölderovog uvjeta i neka je $0 < a \leqslant \pi$ kao iz definicije. Tada za $x \in [0,a]$ vrijedi:

$$|f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)| \leqslant |f(t+x) - f(t)| + |f(t-x) - f(t)| \leqslant 2C|x|^\nu$$

pa imamo

$$\int_{[0,a]} \frac{|f(t+x) + f(t-x) - 2f(t)|}{x}\, dx \leqslant \int_0^a \frac{2Cx^\nu}{x}\, dx = 2C \int_0^a x^{\nu-1}\, dx = \frac{2Ca^\nu}{\nu} < +\infty.$$

Rezultat slijedi primjenom Dinijevog kriterija. Q.E.D.

Korolar 1.5.11. *Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna 2π-periodična funkcija, tada njezin Fourierov red po točkama konvergira prema f.*

Dokaz. U zadatku 1.5.1(a) bit će pokazano da derivabilna funkcija zadovoljava Lipschitzov uvjet (tj. Hölderov uvjet reda $\nu = 1$) u svakoj točki pa tvrdnja slijedi iz Lipschitzovog kriterija. Q.E.D.

Prethodne rezultate lako prevodimo u odgovarajuće rezultate za Fourierov red obzirom na sistem $\mathbb{B}$.

Korolar 1.5.12 (Riemannov princip lokalizacije, kompleksni eksponencijalni slučaj). *Neka su $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ i neka je $f = g$ g.s. u okolini točke $x_0 \in \mathbb{T}$. Tada Fourierovi redovi od f i g istovremeno konvergiraju ili divergiraju u točki x_0 te u slučaju konvergencije imaju istu sumu.*

Korolar 1.5.13. *Ako je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ derivabilna 1-periodična funkcija, tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty} (S_N f)(x) = f(x).$$

* * *

Zadatak 1.5.1. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija.

(a) Ako je f derivabilna u točki $t \in I$, tada f zadovoljava Lipschitzov uvjet (tj. Hölderov uvjet reda $\nu = 1$) u točki t.

(b) Ako f zadovoljava Hölderov uvjet reda $\nu > 1$ u točki t, tada je f derivabilna u točki t i vrijedi $f'(t) = 0$.

(c) Ako f zadovoljava Hölderov uvjet reda $\nu > 1$ u svakoj točki od I, tada je f konstanta.

Rješenje. (a) Znamo da postoji limes

$$\lim_{x\to t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}, \quad \text{tj.} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Posebno postoje $a > 0,\ R > 0$ takvi da za svaki $h \in \mathbb{R}$, $|h| < a,\ h \neq 0$ vrijedi

$$\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \leqslant R.$$

Dakle,

$$\big| f(t+h) - f(t) \big| \leqslant R|h|$$

za sve $h \in \mathbb{R}$, $|h| < a$.

(b) Pretpostavimo da postoje $a > 0,\ C > 0$ takvi da za svaki $h \in \mathbb{R},\ |h| < a$ vrijedi

$$|f(t+h) - f(t)| \leqslant C|h|^{\nu} \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \leqslant C|h|^{\nu-1},$$

čim je $h \neq 0$. Po teoremu o sendviču iz

$$\lim_{h\to 0} |h|^{\nu-1} = 0$$

slijedi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = 0$$

tj. $f'(t)$ postoji i $f'(t) = 0$.

(c) Iz (b) dijela slijedi da je f derivabilna na I te da je $f' \equiv 0$. Stoga f mora biti konstanta.

Napomena 1.5.14. Iz definicija i prethodnog zadatka slijede sljedeće inkluzije za svojstva funkcije f u točki t:

$\boxed{\text{derivabilnost}} \subseteq \boxed{\text{Lipschitzov uvjet}} \subseteq \boxed{\text{Hölderov uvjet reda } 0 < \nu < 1} \subseteq \boxed{\text{neprekidnost}}$.

Zadatak 1.5.2. Pokažite da su sve gornje inkluzije stroge.

Rješenje. Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = |t|$ nije derivabilna u točki $t = 0$, ali zadovoljava Lipschitzov uvjet u toj točki, naprosto jer za svaki $h \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|f(h) - f(0)| = |h|.$$

Za bilo koji fiksirani $0 < \nu < 1$ funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = |t|^\nu$ ne zadovoljava Lipschitzov uvjet u $t = 0$ zbog

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(h) - f(0)|}{|h|} = \lim_{h\to 0} |h|^{\nu-1} = +\infty,$$

ali svakako zadovoljava Hölderov uvjet reda $0 < \nu < 1$ u u točki $t = 0$, naprosto jer za svaki $h \in \mathbb{R}$ imamo

$$|f(h) - f(0)| = |h|^\nu.$$

Funkcija $f\colon \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\sqrt{-\ln|t|}} & \text{za } t \neq 0, \\ 0 & \text{za } t = 0 \end{cases}$$

ne zadovoljava Hölderov uvjet nikojeg reda u $t = 0$ jer za bilo koji $\nu > 0$ imamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(h) - f(0)|}{|h|^\nu} = \lim_{h\to 0} e^{-\sqrt{-\ln|h|} - \nu\ln|h|} = \left[x = \sqrt{-\ln|h|}\right] = \lim_{x\to+\infty} e^{-x+\nu x^2} = +\infty,$$

ali je neprekidna u točki $t = 0$ zbog

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} e^{-\sqrt{-\ln|t|}} = \left[x = \sqrt{-\ln|t|}\right] = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 = f(0).$$

1.6 Dirichletov teorem

Dirichletova ideja je da $D_N^{\mathbb{R}}$ za velike N aproksimira "δ-funkciju", tj.

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(u) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)u}{u}\, du \approx f(0+),$$

pri čemu je

$$f(a+) := \lim_{h\to 0+} f(a+h),$$

što je *desni limes* od f u a. Slično se definira i *lijevi limes* od f u a.

Napomena 1.6.1. Jednostrane limese ćemo promatrati i za derivaciju f'. Uočimo suptilnu razliku između:

- desnog limesa derivacije
$$f'(a+) := \lim_{h\to 0+} f'(a+h),$$
- desne derivacije
$$f'_+(a) := \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Napomenimo sljedeće.

- Kada kažemo da postoji $f'(a+)$, implicitno podrazumijevamo derivabilnost od f na intervalu $\langle a, b\rangle$ za neki $b > a$; naprosto kako bi limes imao smisla.

- Broj $f'(a+)$ može postojati, a da $f(a)$ uopće nije definirano pa nema smisla ni $f'_+(a)$.
- S druge strane, postoje primjeri, poput
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{za } x \neq 0, \\ 0 & \text{za } x = 0, \end{cases} \qquad a = 0,$$
za koje postoji $f'_+(a)$, ali ne postoji $f'(a+)$.
- Ako postoji $f'(a+)$, tada postoji $f(a+)$ i vrijedi $f'(a+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h)-f(a+)}{h}$; vidjeti zadatak 1.6.1.

Lema 1.6.2. *Ako je* $f\colon \langle 0,\pi] \to \mathbb{R}$ *integrabilna funkcija i ako postoji* $f'(0+)$*, tada za svaki* $0 < a \leqslant \pi$ *vrijedi:*
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{[0,a]} f(u) \frac{\sin\big(N+\frac{1}{2}\big)u}{u}\, du = \frac{1}{2} f(0+).$$

Dokaz. Prema napomeni 1.6.1 desna strana ima smisla. Budući da je
$$\frac{1}{\pi} \int_{[0,a]} f(u) \frac{\sin\big(N+\frac{1}{2}\big)u}{u}\, du = \frac{f(0+)}{\pi} \int_{[0,a]} \frac{\sin\big(N+\frac{1}{2}\big)u}{u}\, du$$
$$+\frac{1}{\pi} \int_{[0,a]} \frac{f(u)-f(0+)}{u} \sin\big(N+\frac{1}{2}\big)u\, du$$
i zadatak 1.6.2(a) daje
$$\lim_{N\to\infty} \int_{[0,a]} \frac{\sin\big(N+\frac{1}{2}\big)u}{u}\, du = \begin{bmatrix} t & = \big(N+\frac{1}{2}\big)u \\ dt & = \big(N+\frac{1}{2}\big)du \end{bmatrix}$$
$$= \lim_{N\to\infty} \int_{[0,\,(N+1/2)a]} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \overset{\text{zad. } 1.6.2\text{(a)}}{=} \frac{\pi}{2},$$
vidimo da je dovoljno pokazati da vrijedi
$$\lim_{N\to\infty} \int_{[0,a]} \frac{f(u)-f(0+)}{u} \sin\Big(N+\frac{1}{2}\Big)u\, du = 0. \tag{1.39}$$

Po napomeni 1.6.1 (tj. zadatku 1.6.1) postoji $f(0+)$ i postoji $r \in \langle 0,a\rangle$ takav da je
$$u \mapsto \frac{f(u)-f(0+)}{u}$$
omeđena na $\langle 0,r\rangle$ te je posebno i integrabilna na $[0,r]$. Osim toga, ta funkcija je integrabilna i na $[r,a]$, naprosto zbog $1/|u| \leqslant 1/r$. Zato po lemi 1.5.1 doista slijedi (1.39). Q.E.D.

Teorem 1.6.3 (Dirichletov teorem o točkovnoj konvergenciji)**.** *Neka je* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-periodična funkcija takva da je* $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$*. Ako za svaki* $t \in \mathbb{R}$ *postoje* $f'(t-)$ *i* $f'(t+)$*, tada za svaki* $t \in \mathbb{R}$ *vrijedi*
$$\lim_{N\to\infty} (S_N^{\mathbb{R}} f)(t) = \frac{1}{2}\big(f(t-)+f(t+)\big).$$

Napomena 1.6.4. Uvjeti na f iz teorema 1.6.3 nazivaju se *Dirichletovi uvjeti.*

Dokaz. Neka je t fiksan i stavimo $g(u) := f(t+u)$. Funkcija g zadovoljava pretpostavke leme 1.6.2 pa slijedi:

$$\frac{1}{2}f(t+) = \frac{1}{2}g(0+) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} g(u)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{u}\,du =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} f(t+u)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{u}\,du.$$

Sasvim analogno, korištenjem leme 1.6.2 za $g(u) := f(t-u)$, dobivamo:

$$\frac{1}{2}f(t-) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} f(t-u)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)u}{u}\,du.$$

Zbrojimo dva dobivena izraza:

$$\frac{1}{2}(f(t+)+f(t-)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi]} \big(f(t+x)+f(t-x)\big)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{x}\,dx.$$

Sada tvrdnja slijedi po teoremu 1.5.4. Q.E.D.

Korolar 1.6.5. *Neka je $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna 2π-periodična funkcija. Ako za svaki $t\in\mathbb{R}$ postoje $f'(t-)$, $f'(t+)$, tada za svaki $t\in\mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty}(S_N^{\mathbb{R}}f)(t) = f(t).$$

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcije je $f(t-) = f(t+) = f(t)$ pa naprosto iskoristimo teorem 1.6.3. Q.E.D.

Isti rezultat za 1-periodične funkcije glasi:

Korolar 1.6.6. *Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ neprekidna 1-periodična funkcija. Ako za svaki $x\in\mathbb{R}$ postoje $f'(x-)$, $f'(x+)$, tada za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty}(S_Nf)(x) = f(x). \tag{1.40}$$

Napomena 1.6.7. Prirodno je zapitati se je li za točkovnu konvergenciju (1.40) u svakoj točki dovoljno pretpostaviti samo neprekidnost od f. (Naime, sjetimo se da je derivabilnost dovoljna.) Dirichlet je iznio tu hipotezu, a još 40 godina kasnije tako su mislili i mnogi drugi ugledni matematičari (Riemann, Weierstrass, Dedekind). Ipak, to nije točno!

Teorem 1.6.8. *Postoji $f\in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ takva da je niz $\big((S_Nf)(0)\big)_{N=0}^{\infty}$ neomeđen pa, posljedično, Fourierov red od f u točki 0 <u>ne</u> konvergira prema $f(0)$.*

Dokaz. Naš dokaz neće biti konstruktivan. Koristit ćemo *princip uniformne ograničenosti*: Ako je $(X,\|\cdot\|_X)$ Banachov prostor, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ normirani prostor, $\{T_i : i\in I\}$ kolekcija ograničenih linearnih operatora $T_i\colon X\to Y$ i ako za svaki $x\in X$ vrijedi $\sup_{i\in I}\|T_ix\|_Y < +\infty$, tada imamo $\sup_{i\in I}\|T_i\| < +\infty$. Pritom je $\|T\|$ *operatorska norma* linearnog operatora $T\colon X\to Y$, definirana sa $\|T\| := \sup\limits_{x\in X,\,\|x\|_X\leqslant 1}\|Tx\|_Y$.

Poznata je činjenica da je normirani prostor $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ uz normu $\|\cdot\|_\infty$ definiranu s $\|f\|_\infty := \max\limits_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|$ potpun, tj. Banachov. Dokaz te tvrdnje zapravo možete naći u sklopu dokaza teorema 1.6.9 ispod.

Promotrimo niz linearnih funkcionala:

$$T_N \colon \mathrm{C}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}, \quad T_N \colon f \mapsto (S_N f)(0); \quad \text{za svaki } N \in \mathbb{N}_0.$$

Svaki od njih je ograničen jer za $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ imamo

$$|T_N f| = |(S_N f)(0)| = |(D_N * f)(0)| = \Big| \int_{\mathbb{T}} D_N(-y) f(y) dy \Big| = \Big| \int_{\mathbb{T}} D_N(y) f(y) dy \Big|$$

$$\leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbb{T}} |D_N(y)| dy = \|D_N\|_1 \|f\|_\infty.$$

Usput je $\|T_N\| \leqslant \|D_N\|_1$, a tvrdimo da zapravo vrijedi jednakost. Za $N \in \mathbb{N}_0$ i $\varepsilon > 0$ neka je $\psi_{N,\varepsilon} \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ definirana na sljedeći način:

- Kako D_N ima samo konačno mnogo nultočaka, odaberimo otvorene intervale $I_j^{N,\varepsilon}$ oko tih nultočaka čija ukupna duljina je najviše $\frac{\varepsilon}{2(2N+1)}$.
- Za svaki $x \notin \cup_j I_j^{N,\varepsilon}$ stavimo $\psi_{N,\varepsilon}(x) := \operatorname{sgn} D_N(x)$.
- Funkciju $\psi_{N,\varepsilon}$ proširimo afinim funkcijama (tj. polinomima stupnja najviše 1) na intervalima $I_j^{N,\varepsilon}$ tako da bude neprekidna na cijelom $\mathbb{T}$.

Očigledno je $\|\psi_{N,\varepsilon}\|_\infty \leqslant 1$. Nadalje,

$$\|T_N\| \geqslant |T_N \psi_{N,\varepsilon}| = |(S_N \psi_{N,\varepsilon})(0)| = \Big| \int_{\mathbb{T}} D_N(y) \psi_{N,\varepsilon}(y) dy \Big|$$

$$\geqslant \Big| \int_{\mathbb{T} \setminus \cup_j I_j^{N,\varepsilon}} \underbrace{D_N(y) \psi_{N,\varepsilon}(y)}_{=|D_N(y)|} dy \Big| - \Big| \int_{\cup_j I_j^{N,\varepsilon}} D_N(y) \psi_{N,\varepsilon}(y) dy \Big|$$

$$\geqslant \int_{\mathbb{T}} |D_N(y)| dy - 2 \underbrace{\|D_N\|_\infty}_{\leqslant 2N+1} \underbrace{\lambda\big(\cup_j I_j^{N,\varepsilon}\big)}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2(2N+1)}} \geqslant \|D_N\|_1 - \varepsilon$$

pa, kako je $\varepsilon > 0$ mogao biti proizvoljan, doista dobivamo $\|T_N\| = \|D_N\|_1$.

Kada tvrdnja iz iskaza teorema ne bi vrijedila, tada bi za svaku $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ bilo

$$\sup_{N \in \mathbb{N}_0} |T_N f| = \sup_{N \in \mathbb{N}_0} |(S_N f)(0)| < +\infty$$

pa bi princip uniformne ograničenosti dao

$$\sup_{N \in \mathbb{N}_0} \|T_N\| < +\infty, \quad \text{tj.} \quad \sup_{N \in \mathbb{N}_0} \|D_N\|_1 < +\infty.$$

S druge strane, u zadatku 1.4.9 je pokazano $\|D_N\|_1 \to +\infty$ kada $N \to \infty$, što dovodi do kontradikcije. Q.E.D.

Napomenimo još:

- P. du Bois-Reymond je 1876. dao primjer neprekidne funkcije čiji Fourierov red divergira na gustom podskupu domene ($\mathbb{T}$ ili $[-\pi, \pi]$).
- A. Kolmogorov je 1922. dao primjer L^1 funkcije čiji Fourierov red divergira u gotovo svakoj točki. Kasnije je modificirao tu konstrukciju tako da Fourierov red divergira u baš svakoj točki!

Drugo zanimljivo pitanje je: što se događa s konvergencijom ako pojačamo uvjete na f? Naprimjer, ako pretpostavimo da je f klase C^1.

Teorem 1.6.9. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-periodična i neprekidna te ako je*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty,$$

tada Fourierov red uniformno konvergira prema f.

Dokaz. Označimo:

$$\|g\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|,$$

tako da zapravo pokazujemo konvergenciju u normi $\|\cdot\|_\infty$. Za $M, N \in \mathbb{N}$, $M < N$ promatramo

$$\|S_N f - S_M f\|_\infty = \Big\| \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ M<|n|\leqslant N}} \hat{f}(n)e^{2\pi i n x} \Big\|_\infty \leqslant \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ M<|n|\leqslant N}} |\hat{f}(n)| \leqslant \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>M}} |\hat{f}(n)|.$$

Zbog

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>M}} |\hat{f}(n)| = 0 \quad \text{(rep reda)}$$

vidimo da je $(S_N f)_{N=1}^\infty$ Cauchyjev niz u normi $\|\cdot\|_\infty$. Sada bi se mogla iskoristiti potpunost prostora $(\mathrm{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$, ali mi ćemo radije u suštini ponoviti dokaz te činjenice. Posebno iz

$$|(S_N f)(x) - (S_M f)(x)| \leqslant \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>M}} |\hat{f}(n)| \tag{1.41}$$

slijedi da je za svaki $x \in [0,1]$ niz brojeva $\big((S_N f)(x)\big)_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev pa je i konvergentan. Označimo mu limes sa $g(x)$. Uzimanjem limesa po N u (1.41) dobivamo

$$|g(x) - (S_M f)(x)| \leqslant \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>M}} |\hat{f}(n)|,$$

a potom uzimanjem supremuma po x slijedi

$$\|g - S_M f\|_\infty \leqslant \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>M}} |\hat{f}(n)|.$$

Odavde pak vidimo

$$\lim_{M\to\infty} \|S_M f - g\|_\infty = 0.$$

Dakle, $\big(S_N f\big)_{n=1}^\infty$ konvergira uniformno prema g, a kako je riječ o nizu neprekidnih funkcija, tako i g mora biti neprekidna. Nadalje, očigledno je $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ pa iz Riesz-Fischerovog teorema slijedi da $\big(S_N f\big)_{n=1}^\infty$ konvergira u L^2-normi prema f. Odavde slijedi $f = g$ g.s. ali zbog neprekidnosti imamo baš $f = g$. Q.E.D.

Korolar 1.6.10. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-periodična funkcija klase C^1, tada Fourierov red uniformno konvergira prema f.*

Dokaz. Parcijalnom integracijom smo već dokazali formulu:

$$\widehat{f'}(n) = 2\pi in\hat{f}(n) \implies \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi in}\widehat{f'}(n),\ n \neq 0.$$

Koristeći $|ab| \leqslant \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2$ za $a,\ b \in \mathbb{C}$, dobivamo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\hat{f}(n)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(\frac{1}{8\pi^2 n^2} + \frac{1}{2}|\widehat{f'}(n)|^2\Big).$$

Očigledno je

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

a kako je $f' \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, po Plancherelovoj formuli imamo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 = \|f'\|_2^2 < +\infty.$$

Dakle,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)| < +\infty$$

pa tvrdnja slijedi po teoremu 1.6.9. Q.E.D.

Napomena 1.6.11. Ako je f klase C^1, dokazi teorema 1.6.9 i korolara 1.6.10 čak daju i ocjenu "brzine konvergencije" od $S_N f$ prema f.

$$\|S_N f - f\|_\infty = \Big\| \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|\leqslant N}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}\Big\|_\infty = \Big\| \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>N}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}\Big\|_\infty$$

$$\leqslant \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>N}} |\hat{f}(n)| = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>N}} \frac{1}{2\pi|n|}|\widehat{f'}(n)| \underset{\text{S-C}}{\leqslant} \Big(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>N}} \frac{1}{4\pi^2 n^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\|f'\|_2\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}}\Big)^{1/2} = C_f\frac{1}{\sqrt{N}},$$

pri čemu je $C_f \in [0, +\infty\rangle$ neka konstanta koja ovisi o f.

* * *

Zadatak 1.6.1. Ako je f derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ i ako postoji $f'(a+)$, dokažite da postoji i $f(a+)$ te da vrijedi

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a+)}{h} = f'(a+).$$

Rješenje. Uzmimo proizvoljan niz $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\langle a, b\rangle$ koji konvergira prema a. Prema pretpostavci postoji

$$\lim_{h\to 0+} f'(a+h) \in \mathbb{R}.$$

Posebno postoje $C > 0$ i $\delta > 0$ takvi da za svaki $h \in \langle 0, \delta \rangle$ vrijedi $|f'(a+h)| \leqslant C$. Za svake $x, y \in \langle a, a+\delta \rangle$ vrijedi

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$$

za neki ξ između x i y, što implicira

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|.$$

Zbog konvergencije niza $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prema a postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geqslant n_0$ imamo $t_n \in \langle a, a+\delta \rangle$. Za bilo koje $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $m, n \geqslant n_0$ sada vrijedi

$$|f(t_m) - f(t_n)| \leqslant C|t_m - t_n|.$$

Kako je $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz, vidimo da je niz $\big(f(t_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ također Cauchyjev pa i on konvergira prema nekom realnom broju. Dakle, postoji

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) \in \mathbb{R}.$$

Još želimo pokazati da taj limes ne ovisi o izboru početnog niza $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Uzmemo drugi niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u $\langle a, b \rangle$ koji konvergira prema a. Primijenimo li netom dokazano na niz

$$s_1,\ t_1,\ s_2,\ t_2,\ s_3,\ t_3,\ \ldots$$

zaključit ćemo da postoji limes niza

$$f(s_1),\ f(t_1),\ f(s_2),\ f(t_2),\ f(s_3),\ f(t_3),\ \ldots$$

pa posebno postoje limesi podnizova neparnih i parnih članova,

$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} f(t_n)$$

te oni moraju biti jednaki. Dakle, po nizovnoj karakterizaciji limesa funkcije postoji $f(a+)$ i zapravo je određen bilo kojim takvim nizom.

Za drugu tvrdnju sada možemo iskoristiti L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a+)}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\to 0+} f'(a+h),$$

koje precizno formuliramo: ako postoji limes

$$\lim_{h\to 0+} f'(a+h),$$

tada postoji i

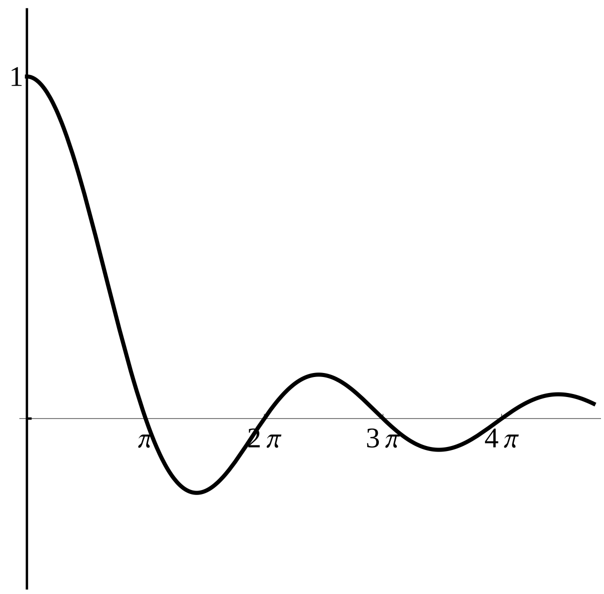
$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a+)}{h}$$

i oni su jednaki. Pritom nam treba pretpostavljena derivabilnost od f na $\langle a, b \rangle$ te činjenica $\lim\limits_{h\to 0+} \big(f(a+h) - f(a+)\big) = 0$, očigledna po definiciji desnog limesa.

Zadatak 1.6.2. Dokažite formule:

(a)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$



Slika 1.17: Graf funkcije $\frac{\sin x}{x}$.

(b)

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty.$$

Integral pod (a) shvaćamo kao nepravi Riemannov integral, tj.

$$\int_0^\infty f(x)\,dx := \lim_{a\to\infty}\int_0^a f(x)\,dx.$$

Rješenje. (a) Na dva načina računamo

$$\int_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{za} \quad f(x,y) = e^{-xy}\sin x,$$

$$D = \big\{(x,y)\in\mathbb{R} \;\big|\; 0<x<a,\ y>0\big\}.$$

Lako se vidi

$$\int_D |f(x,y)|dxdy = \int_0^a\int_0^\infty e^{-xy}|\sin x|\,dy\,dx$$
$$= \int_0^a |\sin x|\Big(\underbrace{\int_0^\infty e^{-xy}\,dy}_{1/x}\Big)\,dx = \underbrace{\int_0^a \frac{|\sin x|}{x}\,dx}_{<+\infty}$$

pa smijemo primijeniti Tonelli-Fubinijev teorem, tj. računati

$$\int_D f(x,y)\,dxdy$$

integrirajući u bilo kojem poretku. S jedne strane je

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^a \sin x\Big(\underbrace{\int_0^\infty e^{-xy}\,dy}_{1/x}\Big)\,dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

S druge strane dva puta koristimo parcijalnu integraciju i dobijemo

$$\int_0^a e^{-xy} \sin x dx = \frac{1}{1+y^2} - e^{-ay} \frac{y \sin a + \cos a}{1+y^2}$$

pa je

$$\int_D f(x,y) dx dy = \underbrace{\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}}_{\frac{\pi}{2}} - \int_0^\infty e^{-ay} \frac{y \sin a + \cos a}{1+y^2} dy.$$

Izjednačavajući ta dva izraza slijedi:

$$\Big| \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx - \frac{\pi}{2} \Big| \leqslant \int_0^\infty e^{-ay} \underbrace{\frac{|y \sin a + \cos a|}{1+y^2}}_{\leqslant 2} dy$$

$$\leqslant 2 \int_0^\infty e^{-ay} dy = \frac{2}{a} \xrightarrow{a \to +\infty} 0.$$

(b)

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \overset{\text{LTMK}}{=} \sum_{k=1}^\infty \int_{\langle (k-1)\pi,\, k\pi]} \frac{|\sin x|}{x} dx \geqslant \sum_{k=1}^\infty \int_{\langle (k-1)\pi,\, k\pi]} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_0^\pi |\sin x| \, dx}_{=2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty$$

Zadatak 1.6.3. Koristeći razvoj funkcije $f(x) = x^2$ u Fourierov red na $[-\pi, \pi]$ dajte još jedan dokaz formule

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Rješenje. Fourierov red od f je glasio

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2}.$$

Željeli bismo uvrstiti neku konkretnu vrijednost za x pa moramo opravdati konvergenciju po točkama. Primijetimo da funkcija f (proširena po 2π-periodičnosti sa $[-\pi, \pi\rangle$ na $\mathbb{R}$) zadovoljava Dirichletove uvjete (pogledajte sliku 1.11):

$$f'(x+) = \begin{cases} 2x & \text{za } x \in [-\pi, \pi\rangle, \\ -2\pi & \text{za } x = \pi, \end{cases} \qquad f'(x-) = \begin{cases} 2x & \text{za } x \in \langle -\pi, \pi], \\ 2\pi & \text{za } x = -\pi. \end{cases}$$

Osim toga je f neprekidna. Uvrstimo $x = \pi$ te primijetimo $\cos k\pi = (-1)^k$. Iz konvergencije

$$\lim_{N \to \infty} (S_N f)(\pi) = f(\pi)$$

dobivamo

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \pi^2 \implies \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}.$$

Zadatak 1.6.4. Prisjetimo se Fourierovog razvoja (iz zadatka 1.3.6(a)):

$$\operatorname{sgn} x \sim \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin(2l-1)x}{2l-1}$$

na intervalu $[-\pi,\pi]$. Dokažite formulu

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4} \qquad \big(\textit{J. Gregory}\big),$$

tj.

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{2l-1}=\frac{\pi}{4}.$$

Rješenje. Funkcija $f=\operatorname{sgn}\big|_{[-\pi,\pi\rangle}$ proširena po 2π-periodičnosti zadovoljava Dirichletove uvjete uz $f'(x+)=f'(x-)=0$. Možemo uvrstiti $x=\frac{\pi}{2}$ u Fourierov red, a kako vrijedi $\sin(2l-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{l-1}$, $\operatorname{sgn}(\frac{\pi}{2})=1$, imamo

$$1=\frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{2l-1}.$$

Zadatak 1.6.5. Funkciju $f(x)=x$ razvijte u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[0,1]$. Odredite u kojim točkama on konvergira prema polaznoj funkciji i dokažite

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k\pi x)}{k}=\pi\Big(\frac{1}{2}-x\Big) \quad \text{za } x\in\langle 0,1\rangle.$$

Rješenje. Funkciju f proširujemo po 1-periodičnosti sa $[0,1\rangle$ na cijeli $\mathbb{R}$ i potom razvijamo na $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, gdje glasi

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{za } x\in[-1/2,0\rangle,\\ x & \text{za } x\in[0,1/2\rangle.\end{cases}$$

Period je $\tau=1$ i možemo koristiti formule iz napomene 1.3.11.

$$a_0=\frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}f(x)\,dx=2\int_{-1/2}^{1/2}f(x)\,dx=1$$

$$a_k=\frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}f(x)\,\cos 2k\pi x=0 \quad \text{za } k\geqslant 1$$

$$\begin{aligned} b_k=\frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}f(x)\,\sin 2k\pi x\,dx &= \int_0^{1/2}x\sin 2k\pi x\,dx+\int_{-1/2}^{0}(x+1)\sin 2k\pi x\,dx\\ &=2x\frac{-\cos 2k\pi x}{2k\pi}\Bigg|_0^{1/2}+2\int_0^{1/2}\frac{\cos 2k\pi x}{2k\pi}\,dx\\ &+2(x+1)\frac{-\cos 2k\pi x}{2k\pi}\Bigg|_{-1/2}^{0}+\int_{-1/2}^{0}\frac{\cos 2k\pi x}{2k\pi}\,dx=-\frac{1}{k\pi}.\end{aligned}$$

Fourierov red je dakle

$$\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\sin 2k\pi x.$$

Funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete:

$$f'(x+) = 1 \text{ za sve } x \in [0,1\rangle, \quad f'(x-) = 1 \text{ za sve } x \in [0,1\rangle.$$

Osim toga je

$$f(x+) = x \text{ za sve } x \in [0,1\rangle, \quad f(x-) = \begin{cases} x & \text{za } x \in \langle 0,1\rangle, \\ 1 & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

Po Dirichletovom teoremu Fourierov red od f konvergira prema $\frac{1}{2}\big(f(x-) + f(x+)\big)$, što je jednako $f(x)$ upravo za $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Nadalje, za $x \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi formula

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin 2k\pi x = x,$$

koja se lako transformira u traženu.

Zadatak 1.6.6. Ako su $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, dokažite da Fourierov red funkcije $f * g$ konvergira uniformno prema toj funkciji.

Rješenje. Fourierovi koeficijenti od $f * g$ su

$$(f * g)\widehat{\ }(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n) \text{ za svaki } n \in \mathbb{Z}.$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost i Plancherelov identitet daju:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(f * g)\widehat{\ }(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)\hat{g}(n)| \leqslant \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}(n)|^2\Big)^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2 < +\infty.$$

Prema teoremu 1.6.9 još treba provjeriti da je funkcija $f * g$ neprekidna na $\mathbb{T}$. Za $x, z \in \mathbb{T}$ uz oznaku $f_z(x) := f(x - z)$ imamo:

$$\begin{aligned} &|(f * g)(x - z) - (f * g)(x)| = \Big| \int_{\mathbb{T}} \big(f(x - z - y) - f(x - y)\big) g(y) dy \Big| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{T}} \big|f_z(x - y) - f(x - y)\big| |g(y)| dy \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \Big(\int_{\mathbb{T}} \big|f_z(x - y) - f(x - y)\big|^2 dy\Big)^{1/2} \Big(\int_{\mathbb{T}} |g(y)|^2 dy\Big)^{1/2} \\ &= \|f_z - f\|_2 \|g\|_2 \longrightarrow 0 \text{ kada } z \to 0. \end{aligned}$$

U posljednjem retku smo koristili $\lim_{z\to 0} \|f_z - f\|_2 = 0$, što se dokazuje kao i lema 1.4.3, gdje je odgovarajuća tvrdnja pokazana za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ i po normi $\|\cdot\|_1$, umjesto za $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ i po normi $\|\cdot\|_2$. Ukratko, za $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ tvrdnja slijedi iz uniformne neprekidnosti od f, dok za općenitu $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ koristimo gustoću od $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ u prostoru $(\mathrm{L}^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$.

Zadatak 1.6.7. (a) Razvijte funkciju $f(x) = |\cos x|$ u trigonometrijski Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) Provjerite da ta funkcija zadovoljava Dirichletove uvjete pa koristeći razvoj iz (a) zadatka izračunajte $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$.

(c) Dokažite jednakost $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16}$.

Rješenje. (a) Fourierovi koeficijenti su:

$$a_0 = \frac{4}{\pi}, \quad a_1 = 0, \quad a_n = \frac{-4\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi(n^2-1)} \text{ za } n \geqslant 2, \quad b_n = 0 \text{ za } n \geqslant 1$$

pa Fourierov red glasi

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

(b) Funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete jer je

$$\begin{aligned} f'(x+) &= \begin{cases} -\sin x & \text{za } x \in [-\pi/2, \pi/2\rangle, \\ \sin x & \text{za } x \in [-\pi, -\pi/2\rangle \cup [\pi/2, \pi], \end{cases} \\ f'(x-) &= \begin{cases} -\sin x & \text{za } x \in \langle -\pi/2, \pi/2], \\ \sin x & \text{za } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup \langle \pi/2, \pi]. \end{cases} \end{aligned}$$

Osim toga je neprekidna, tj. $f(x+) = f(x-) = f(x)$. Zato možemo uvrstiti $x = \pi/2$ u razvoj iz (a) i dobiti

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \left|\cos\frac{\pi}{2}\right| = 0,$$

odakle slijedi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

(c) Plancherelova formula daje

$$\frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{[-\pi,\pi]} (\cos x)^2 dx = 1,$$

odakle proizlazi tražena jednakost.

Zadatak 1.6.8. Funkcija f je zadana formulom $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi-1)x & \text{za } 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{za } 1 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$ proširena je po neparnosti na interval $[-\pi, \pi]$, a potom po 2π-periodičnosti na cijeli $\mathbb{R}$.

(a) Izračunajte trigonometrijski Fourierov red funkcije f.

(b) Zadovoljava li funkcija f Dirichletove uvjete?

(c) Konvergira li Fourierov red od f uniformno prema samoj funkciji f?

(d) Izračunajte $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$.

Rješenje. (a) *Odgovor*: $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}\sin nx$.

Zbog neparnosti je $a_n = 0$ za svaki n, dok koeficijente b_n računamo korištenjem parcijalne integracije:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{\pi-1}{\pi}\int_0^1 x\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_1^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx \\ &= \frac{\pi-1}{\pi}\cdot\frac{-n\cos n + \sin n}{n^2} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(\pi-1)n\cos n + \sin n}{n^2} = \frac{\sin n}{n^2}. \end{aligned}$$

(b) Funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete jer je

$$f'(x-) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{za } x \in [-\pi, -1], \\ \frac{\pi-1}{2} & \text{za } x \in \langle -1, 1], \\ -\frac{1}{2} & \text{za } x \in \langle 1, \pi \rangle, \end{cases} \qquad f'(x+) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{za } x \in [-\pi, -1\rangle, \\ \frac{\pi-1}{2} & \text{za } x \in [-1, 1\rangle, \\ -\frac{1}{2} & \text{za } x \in [1, \pi \rangle. \end{cases}$$

(c) Funkcija f je neprekidna, a Fourierovi koeficijenti su joj apsolutno sumabilni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \frac{\sin n}{n^2} \Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Prema teoremu s predavanja Fourierov red od f uniformno konvergira prema f.

(d) *Odgovor*: $\frac{\pi-1}{2}$.
Zbog (b) dijela zadatka na funkciju f možemo primijeniti Dirichletov teorem. Uvrštavanje $x = 1$ u Fourierov razvoj daje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\sin n}{n} \Big)^2 = \frac{f(1-) + f(1+)}{2} = f(1) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Napomenimo kako je razvojem funkcije $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{za } x \in [-\pi, -1\rangle \cup \langle 1, \pi], \\ \frac{\pi-1}{2} & \text{za } x \in [-1, 1] \end{cases}$ i uvrštavanjem $x = 0$ lako izvesti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2}$, odakle dobivamo zanimljivi identitet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\sin n}{n} \Big)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n},$$

kojeg je otkrio R. Baillie.

Zadatak 1.6.9. Pretpostavimo da je 1-periodična funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uniformno Hölder-neprekidna reda $\nu > 1/2$, tj. postoji konstanta $C > 0$ takva da je

$$|f(t+h) - f(t)| \leqslant C|h|^{\nu} \quad \text{za svake } t, h \in \mathbb{T}.$$

Dokažite da Fourierov red od f uniformno konvergira prema f. (Ovo je poopćenje korolara 1.6.10 koje se ponekad naziva *Bernsteinov teorem.*)

Rješenje. Fiksirajmo $m \in \mathbb{N}$ i uzmimo $h = \frac{1}{3 \cdot 2^m}$. Fourierovi koeficijenti od $t \mapsto f(t+h) - f(t)$ su

$$\int_{\mathbb{T}} \big(f(t+h) - f(t)\big) e^{-2\pi i n t} dt = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-2\pi i n (t-h)} dt - \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-2\pi i n t} dt = (e^{2\pi i n h} - 1) \hat{f}(n).$$

Plancherelov identitet i pretpostavka na f daju

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 |e^{2\pi i n h} - 1|^2 = \int_{\mathbb{T}} |f(t+h) - f(t)|^2 dt \leqslant C^2 |h|^{2\nu}.$$

Ako je $2^m \leqslant |n| < 2^{m+1}$, tada vrijedi

$$\frac{2\pi}{3} \leqslant |2\pi n h| < \frac{4\pi}{3} \implies |e^{2\pi i n h} - 1| \geqslant \sqrt{3}$$

pa posebno imamo

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ 2^m\leqslant|n|<2^{m+1}}} |\hat{f}(n)|^2 \leqslant \frac{1}{3}C^2\frac{1}{(3\cdot 2^m)^{2\nu}}$$

te je potom po Cauchy-Schwarz nejednakosti:

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ 2^m\leqslant|n|<2^{m+1}}} |\hat{f}(n)| \leqslant 2^{\frac{m+1}{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{C}{(3\cdot 2^m)^{\nu}}.$$

Sumiranje po m konačno daje

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)| \leqslant |\hat{f}(0)| + C2^{1/2}3^{-\nu-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m(\nu-1/2)} < +\infty$$

(jer je $2^{-(\nu-1/2)} < 1$) pa po teoremu 1.6.9 znamo da Fourierov red od f uniformno konvergira prema f.

1.7 Još o konvergenciji po točkama

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodična funkcija. Vidjeli smo:

$$\text{funkcija } f \text{ je klase } \mathrm{C}^1 \implies \text{Fourierov red konvergira prema } f \text{ uniformno.} \tag{1.42}$$

Na temelju razmatranja iz prethodnog odjeljka sasvim analogno se dobije i malo općenitija tvrdnja:

$$\begin{matrix} f \text{ je po dijelovima klase } \mathrm{C}^1 \\ \text{i } f \text{ je neprekidna} \end{matrix} \implies \text{Fourierov red konvergira prema } f \text{ uniformno.} \tag{1.43}$$

Prirodno se postavlja sljedeće pitanje. Ako je f po dijelovima klase C^1, ali ima točke prekida, što se događa s Fourierovim redom oko tih točaka prekida? Uz naše pretpostavke f zadovoljava i Dirichletove uvjete pa u točki prekida c vrijedi

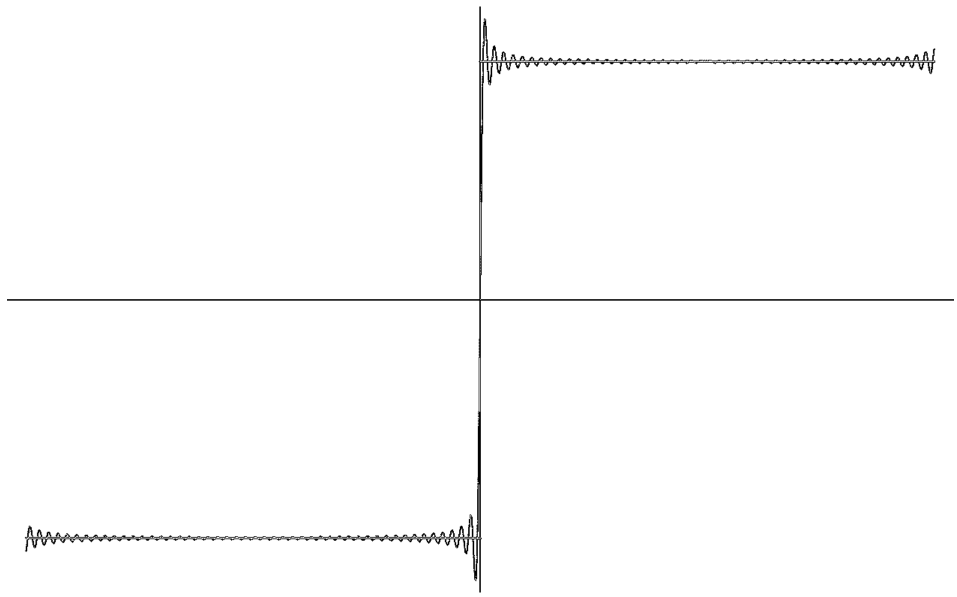
$$(S_N^{\mathbb{R}}f)(c) \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2}\big(f(c-)+f(c+)\big),$$

ali zanima nas možemo li govoriti o bilo kakvom nadomjestku uniformnosti kod te konvergencije. Odgovor je donekle začuđujuć!

Napomena 1.7.1. (a) Intuicija bi nam mogla sugerirati da parcijalne sume Fourierovog reda sve manje "prebacuju" vrijednosti limesa $f(c-)$ i $f(c+)$. Ipak, to je prebacivanje uvijek za oko 9% skoka funkcije za dovoljno velike N. Pogledajte sliku 1.18.

(b)
- Ovaj fenomen je prvi uočio *H. Wilbraham* 1848.
- Neznajući za taj rezultat *J. W. Gibbs* je opisao ovu pojavu u časopisu *Nature* 1899.
- Opći dokaz te pojave je dao *M. Bôcher* 1906.
- Igrom slučaja ova pojava ostaje poznata kao *Gibbsov fenomen*.

Promotrimo najjednostavniji slučaj funkcije kod koje se uočava spomenuti fenomen.



Slika 1.18: Prikaz preskoka Fourierovog reda.

Teorem 1.7.2. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je*

$$f\big|_{[-\pi,\,\pi\rangle} = a\mathbb{1}_{[-\pi,\,0\rangle} + b\mathbb{1}_{[0,\,\pi\rangle}.$$

Tada vrijedi:

(a)

$$M_N := \max_{|t|\leqslant\frac{\pi}{2N}} (S_N^{\mathbb{R}} f)(t) = (S_N^{\mathbb{R}} f)(\frac{\pi}{2N}) \quad \text{za } N \in \mathbb{N},$$
$$m_N := \min_{|t|\leqslant\frac{\pi}{2N}} (S_N^{\mathbb{R}} f)(t) = (S_N^{\mathbb{R}} f)(-\frac{\pi}{2N}) \quad \text{za } N \in \mathbb{N}.$$

(b)

$$\lim_{N\to\infty} M_N = f(0+) + c(f(0+) - f(0-)),$$
$$\lim_{N\to\infty} m_N = f(0-) - c(f(0+) - f(0-)),$$

za neku konstantu $c \approx 0.089$.

Dokaz. Množenjem odgovarajućom konstantom i dodavanjem konstante tvrdnju svodimo na slučaj $a = -1$, $b = 1$, odnosno $f(0-) = -1$, $f(0+) = 1$; dakle skok je $f(0+) - f(0-) = 2$. Za taj slučaj smo već bili izračunali Fourierov red of f (u zadatku 1.3.6(a)), čija parcijalna suma glasi

$$(S_N^{\mathbb{R}} f)(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}.$$

(a) Tražimo maksimum i minimum od $S_N^{\mathbb{R}} f$ na $[-\frac{\pi}{2N}, \frac{\pi}{2N}]$.

$$\frac{d}{dt}\big[(S_N^{\mathbb{R}} f)(t)\big] = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \cos(2n-1)t \overset{t\notin\pi\mathbb{Z}}{=} \frac{4}{\pi}\frac{\sin 2Nt}{\sin t}$$

Primijetimo da je ta derivacija nenegativna na cijelom spomenutom intervalu pa je $S_N^{\mathbb{R}} f$ rastuća funkcija te posljedično poprima maksimum na desnom, a minimum na lijevom kraju intervala.

(b)

$$M_N = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2N}}{(2n-1)\frac{\pi}{2N}} \cdot \frac{\pi}{N}$$

Ovo su Riemannove sume funkcije

$$t \mapsto \frac{\sin t}{t}$$

na intervalu $[0, \pi]$ uz dijametar razdiobe $\frac{\pi}{N}$. Kako je ta funkcija R-integrabilna, one konvergiraju prema

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \approx 1.179.$$

Dakle,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{M_N - \overbrace{f(0+)}^{=1}}{\underbrace{f(0+) - f(0-)}_{=2}} \approx 0.089.$$

Q.E.D.

Ranije smo rekli da Fourierov red neprekidne funkcije uopće ne mora konvergirati po točkama. Ako je $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$, što možemo reći o takozvanom *skupu divergencije*:

$$\big\{x \in \mathbb{T} \;:\; \lim_{N\to\infty} (S_N f)(x) \neq f(x)\big\}?$$

Odgovor na ovo pitanje pokazao se vrlo složenim. Mnogi su matematičari dali primjere neprekidnih funkcija sa "zanimljivim" skupovima divergencije. Tek sredinom 20. stoljeća dan je konačan odgovor na to pitanje.

Teorem 1.7.3 (J.-P. Kahane, Y. Katznelson, 1966.)**.** *Za svaki izmjerivi skup $E \subseteq \mathbb{T}$ takav da je $\lambda(E) = 0$ postoji $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ takva da je skup divergencije od f upravo jednak E.*

Obrnuto, još 1915. godine N. N. Luzin iznio je slutnju da skup divergencije neprekidne funkcije mora biti mjere 0. Štoviše, on je naslutio da isto vrijedi čak za svaku funkciju iz $\mathrm{L}^2(\mathbb{T})$.

Teorem 1.7.4 (L. Carleson, 1966.)**.** *Ako je $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, tada*

$$S_N f \xrightarrow{N\to\infty} f \text{ g.s.}$$

Kako je $\mathrm{C}(\mathbb{T}) \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$, posebno vidimo da je skup divergencije mjere 0 za svaku neprekidnu funkciju f.

Teorem 1.7.5 (R. A. Hunt, 1967.)**.** *Ako je $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T})$ za neki $p > 1$, tada*

$$S_N f \xrightarrow{N\to\infty} f \text{ g.s.}$$

Dokazi gornjih teorema uvelike nadilaze ovaj kolegij i bili su ispiracija za čitave teorije unutar grane matematičke analize.

Prisjetimo se da za $1 < p < 2$ vrijedi

$$\mathrm{L}^1(\mathbb{T}) \supsetneqq \mathrm{L}^p(\mathbb{T}) \supsetneqq \mathrm{L}^2(\mathbb{T}) \supsetneqq \mathrm{C}(\mathbb{T})$$

i napomenimo još jednom da je A. N. Kolmogorov dao primjer funkcije iz $L^1(\mathbb{T})$ čiji Fourierov red divergira u svakoj točki. Do danas nije razjašnjeno koji je najveći podskup prostora $L^1(\mathbb{T})$ za čije funkcije Fourierov red konvergira u gotovo svakoj točki prema f.

Prokomentirajmo prvu (i odavno poznatu) redukciju u dokazu Carlesonovog teorema. Označimo

$$(S_N f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \qquad (Mf)(x) := \sup_{N\in\mathbb{N}} |(S_N f)(x)|.$$

Uvedimo veličinu (nije norma; ni ne zadovoljava nejednakost $\triangle$!):

$$\|g\|_{L^2_{\text{slabi}}([0,1])} := \sup_{\alpha\in\langle 0,\infty\rangle} \Big(\alpha \cdot \lambda\big(\{x \in [0,1] : |g(x)| \geqslant \alpha\}\big)^{1/2}\Big).$$

Napomena 1.7.6. Općenito vrijedi

$$\|g\|_{L^2_{\text{slabi}}([0,1])} \leqslant \|g\|_{L^2([0,1])}.$$

Dokaz. Zapravo trebamo dokazati da za svaku $g \in L^2([0,1])$ i svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$\lambda\big(\{x \in [0,1] : |g(x)| \geqslant \alpha\}\big) \leqslant \alpha^{-2} \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

To je tzv. *Čebiševljeva nejednakost.* Za njen dokaz označimo $A_\alpha := \{x \in [0,1] : |g(x)| \geqslant \alpha\}$.

$$\begin{aligned} \|g\|^2_{L^2([0,1])} = \int_{[0,1]} |g(x)|^2 dx &= \int_{A_\alpha} \underbrace{|g(x)|^2}_{\geqslant\alpha^2} dx + \underbrace{\int_{[0,1]\setminus A_\alpha} |g(x)|^2 dx}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \alpha^2 \int_{A_\alpha} 1 dx = \alpha^2 \lambda(A_\alpha) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 1.7.7. *Ako znamo da postoji konstanta $C \in \langle 0, +\infty\rangle$ takva da za svaku $f \in L^2([0,1])$ imamo*

$$\|Mf\|_{L^2_{\text{slabi}}([0,1])} \leqslant C \|f\|_{L^2([0,1])},$$

tada da za svaku $f \in L^2([0,1])$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} (S_N f)(x) = f(x) \quad \text{za g.s. } x \in [0,1].$$

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu $f \in L^2([0,1])$ te neke brojeve $\delta, \varepsilon > 0$. Označimo

$$E_\delta := \big\{x \in [0,1] : \limsup_{N\to\infty} |(S_N f)(x) - f(x)| \geqslant \delta\big\}.$$

Zbog gustoće postoji trigonometrijski polinom g takav da je $\|f - g\|_{L^2([0,1])} < \varepsilon$. Ako u nejednakosti

$$|(S_N f)(x) - f(x)| \leqslant |(S_N(f-g))(x)| + |(S_N g)(x) - g(x)| + |(g-f)(x)|$$

pustimo $\limsup_{N\to\infty}$ i iskoristimo da za dovoljno velike N vrijedi $S_N g = g$, dobit ćemo

$$\limsup_{N\to\infty} |(S_N f)(x) - f(x)| \leqslant \limsup_{N\to\infty} |(S_N(f-g))(x)| + |(g-f)(x)|$$

te pogotovo

$$\limsup_{N\to\infty} |(S_N f)(x) - f(x)| \leqslant (M(f-g))(x) + |(f-g)(x)|.$$

Sada možemo iskoristiti pretpostavljenu ocjenu za funkciju $h = f - g$:

$$\lambda\big(\{x \in [0,1] : (M(f-g))(x) \geqslant \delta/2\}\big)$$
$$\leqslant 4\delta^{-2}\|M(f-g)\|^2_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{slabi}}(\mathbb{R})} \leqslant 4C^2\delta^{-2}\|f-g\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

(Ovo nije Čebiševljeva nejednakost nego pretpostavka leme!) Nadalje, Čebiševljeva nejednakost daje

$$\lambda\big(\{x \in [0,1] : |(f-g)(x)| \geqslant \delta/2\}\big) \leqslant 4\delta^{-2}\|f-g\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})}.$$

Sve u svemu, dobili smo:

$$\lambda(E_\delta) \leqslant 4(C^2+1)\delta^{-2}\|f-g\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R})},$$

tj.

$$\lambda(E_\delta) \leqslant 4(C^2+1)\delta^{-2}\varepsilon^2.$$

Sjetimo se da je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan pa puštanjem $\lim_{\varepsilon\to 0}$ dobivamo $\lambda(E_\delta) = 0$ za svaki $\delta > 0$. Zbog σ-subaditivnosti je čak

$$\lambda\Big(\bigcup_{\delta>0} E_\delta\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_{1/m}\Big) = 0,$$

a s druge strane za svaki $x \in [0,1] \setminus \bigcup_{\delta>0} E_\delta$ vrijedi

$$\limsup_{N\to\infty} |(S_N f)(x) - f(x)| = 0,$$

tj. $\lim_{N\to\infty}(S_N f)(x) = f(x)$. Q.E.D.

Može se pokazati da vrijedi i obrat leme 1.7.7: tvrdnja o g.s. konvergenciji implicira danu "slabu" ocjenu za maksimalne parcijalne sume. Sve to su ljudi znali prije nego je Carleson 1966. konačno dokazao spomenutu slabu maksimalnu ocjenu.

Iz Huntovih rezultata slijedi da zapravo vrijedi i "jaka" maksimalna ocjena:

$$\|Mf\|_{\mathrm{L}^2([0,1])} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^2([0,1])},$$

ali ona nije potrebna za dokaz Carlesonovog teorema.

* * *

Napomena 1.7.8. (a) Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz neprekidnih funkcija na segmentu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ koji konvergira uniformno na $[a,b]$, tada je $x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ također neprekidna funkcija na $[a,b]$ i vrijedi

$$\int_{[a,b]} \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n(x)\,dx.$$

(Ovo je poseban slučaj LTDK, koji se može dokazati i bez teorije mjere.)

(b) Ako je $I \subseteq \mathbb{R}$ ograničeni interval i ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz derivabilnih funkcija na I takav da:

- niz derivacija $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema nekoj funkciji g,
- niz brojeva $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira za barem jednu točku $x_0 \in I$,

tada niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno na I prema nekoj funkciji f takvoj da vrijedi $f' = g$. Slikovito možemo pisati:

$$\frac{d}{dx}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Specijalno, ako su $f_N = \sum_{n=1}^{N} h_n$ parcijalne sume nekog reda funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$, tada uz gornje pretpostavke imamo:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} h_n(x) \qquad \text{(deriviramo "član-po-član")},$$

tj. za primjenu gornje formule treba provjeriti uniformnu konvergenciju na I reda derivacija i barem u jednoj točki $x_0 \in I$ konvergenciju reda funkcija.

(c) *Weierstrassov kriterij*:
Ako postoji niz brojeva $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je

$$M_n \geqslant 0, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n < +\infty$$

i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ takav da je $|f_n| \leqslant M_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

uniformno konvergira na I.

Zadatak 1.7.1. Neka su $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realni brojevi takvi da je $|\alpha_n| \leqslant n^{-4}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je tada formulom

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx$$

definirana 2π-periodična funkcija f klase C^2 i izračunajte Fourierove koeficijente funkcija f, f', f''.

Rješenje. Red derivacija je

$$\sum_n (-\alpha_n n) \sin nx,$$

dok je red drugih derivacija

$$\sum_n (-\alpha_n n^2) \cos nx.$$

Sva tri reda konvergiraju uniformno na $\mathbb{R}$ po Weierstrassovom kriteriju zbog

$$|\alpha_n \cos nx| \leqslant |\alpha_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty,$$

$$|(-\alpha_n n) \sin nx| \leqslant |\alpha_n| n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty,$$

$$|(-\alpha_n n^2) \cos nx| \leqslant |\alpha_n| n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| n^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Prema (b) dijelu prethodne napomene je $f \in C^2$, jer su sume svih triju redova neprekidne funkcije i imamo:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \overset{(b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_n n) \sin nx,$$

$$f''(x) = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx \overset{(b)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_n n^2) \cos nx.$$

Fourierovi koeficijenti funkcija f, f', f'' se mogu očitati iz gornjih razvoja, tj. (sasvim rigorozno) zbog uniforme konvergencije oni se mogu dobiti množenjem s $\cos mx$, $\sin mx$ i integriranjem po $[-\pi, \pi]$ član-po-član, korištenjem (a) dijela prethodne napomene. Oni glase:

$$\text{koeficijenti od } f: \quad a_n(f) = \alpha_n \quad \text{za } n \geqslant 1, \text{ ostali su } 0,$$

$$\text{koeficijenti od } f': \quad b_n(f') = -n\alpha_n \quad \text{za } n \geqslant 1, \text{ ostali su } 0,$$

$$\text{koeficijenti od } f'': \quad a_n(f'') = -n^2\alpha_n \quad \text{za } n \geqslant 1, \text{ ostali su } 0.$$

Zadatak 1.7.2. (a) Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ konvergira red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n \ln n)^2}$$

i da njegova suma definira funkciju klase C^1 na cijelom $\mathbb{R}$.

(b) Dokažite da funkcija iz (a) dijela zadatka nije klase C^3 na $\mathbb{R}$.

Rješenje. (a) Uočimo da i polazni red i red derivacija

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\pi i e^{2\pi i n x}}{n (\ln n)^2}$$

konvergiraju uniformno po Weierstrassovom kriteriju jer je

$$\Big|\frac{e^{2\pi i n x}}{(n \ln n)^2}\Big| \leqslant \frac{1}{n^2 (\ln n)^2}, \quad \Big|\frac{2\pi i e^{2\pi i n x}}{n (\ln n)^2}\Big| \leqslant \frac{2\pi}{n (\ln n)^2}$$

i jer jednostavna primjena integralnog kriterija konvergencije reda daje

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 (\ln n)^2} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^2} < +\infty.$$

Sada znamo da su formulama

$$f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x}}{(n \ln n)^2}, \quad g(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\pi i e^{2\pi i n x}}{n (\ln n)^2}$$

definirane neprekidne funkcije takve da je $f' = g$, odakle zaključujemo da je f klase C^1.

(b) Pretpostavimo da f ipak jest klase C^3. Tada je treća derivacija $f^{(3)}$ neprekidna (i posebno integrabilna) te trostruka primjena parcijalne integracije daje

$$\widehat{f^{(3)}}(n) = (2\pi i n)^3 \hat{f}(n) \quad \text{za } n \in \mathbb{Z}.$$

Kako je red iz (a) dijela zadatka zapravo Fourierov red funkcije f (što opet slijedi iz uniformne konvergencije), možemo eksplicitno očitati njezine Fourierove koeficijente:

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{1}{n^2(\ln n)^2} & \text{za } n \geqslant 2, \\ 0 & \text{za } n \leqslant 1. \end{cases}$$

Za $n \geqslant 2$ slijedi

$$|\widehat{f^{(3)}}(n)| = (2\pi)^3 \frac{n}{(\ln n)^2}$$

pa je

$$\lim_{n\to+\infty} |\widehat{f^{(3)}}(n)| = (2\pi)^3 \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(\ln n)^2} = (2\pi)^3 \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{(\ln t)^2} \overset{\text{L'H pravilo}}{=} +\infty,$$

što je u kontradikciji s Riemann-Lebesgueovom lemom primijenjenom na funkciju $f^{(3)}$.

Zadatak 1.7.3. Funkcija $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ zadana je formulom $f(x) = \dfrac{1}{2e^{2\pi ix} - 1}$.

(a) Izračunajte njezine Fourierove koeficijente $\hat{f}(n)$ za $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2 dx$.

Rješenje. (a) *Odgovor*: $\hat{f}(n) = \begin{cases} 2^n & \text{za } n \leqslant -1, \\ 0 & \text{za } n \geqslant 0. \end{cases}$

Bilo bi komplicirano direktno računati Fourierove koeficijente. Zato najprije zapišimo

$$\frac{1}{2e^{2\pi ix} - 1} = \frac{e^{-2\pi ix}}{2 - e^{-2\pi ix}} = \frac{1}{2} e^{-2\pi ix} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-2\pi ix}}.$$

Sada koristimo poznatu formulu za sumu geometrijskog reda,

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z} \quad \text{za } |z| < 1,$$

koja nam daje

$$\begin{aligned} \frac{1}{2e^{2\pi ix} - 1} &= \frac{1}{2} e^{-2\pi ix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} e^{-2\pi imx} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m-1} e^{-2\pi i(m+1)x} = [n = -m-1] = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n e^{2\pi inx}. \end{aligned}$$

Odavde se "očitaju" Fourierovi koeficijenti. Naime, zbog $\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n = 1 < +\infty$, Weierstrassovog kriterija i uniformne konvergencije gornji red pomnožen s $e^{-2\pi imx}$ smijemo integrirati član-po-član i dobiti $\hat{f}(m)$.

(b) *Odgovor*: 1/3.

Iz Plancherelovog identiteta dobivamo

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-2m-2} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Zadatak 1.7.4. Ako je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}$ kompleksni Fourierov red neke 1-periodične funkcije $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ koja je klase C^2, napišite Fourierov red funkcije

$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}, \quad g(x) := e^{2\pi i x} f''(x).$$

Obrazložite svoj odgovor ili ga potkrijepite računom.

Rješenje. Kako je funkcija g neprekidna, ona je posebno i integrabilna pa ima smisla promatrati njezin Fourierov red. Fourierove koeficijente od g računamo dvostrukom primjenom formule za parcijalnu integraciju

$$\begin{aligned}\hat{g}(n) &= \int_0^1 f''(x) e^{-2\pi i(n-1)x} dx = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i(n-1)x} \big(-2\pi i(n-1)\big)^2 dx \\ &= -4\pi^2 (n-1)^2 \hat{f}(n-1) = -4\pi^2(n-1)^2 c_{n-1}\end{aligned}$$

pa Fourierov red od g glasi

$$-4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n-1)^2 c_{n-1} e^{2\pi i n x}.$$

Zadatak 1.7.5. Neka je $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ klase C^1. Dokažite da za sve a,b takve da je $\alpha\leqslant a < b\leqslant\beta$ vrijedi

$$\lim_{n\to\pm\infty} \Big| \int_a^b f(x)\sin nx\, dx \Big| = 0$$

uniformno po a i b.

Rješenje.

$$I_n := \int_a^b f(x)\sin nx\, dx \overset{n\neq 0}{=} f(x)\frac{-\cos nx}{n}\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\frac{-\cos nx}{n}\, dx$$

$$\Longrightarrow\ |I_n| \leqslant \frac{1}{n}\|f\|_\infty\cdot 2 + \frac{1}{n}\|f'\|_\infty\cdot(\beta-\alpha)$$

Kako smo ocijenili $|I_n|$ sa $\frac{C}{|n|}$, pri čemu konstanta C ne ovisi o a i b, doista imamo uniformnu konvergenciju u 0.

Zadatak 1.7.6. Prisjetimo se identiteta (iz zadatka 1.6.5):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k} = \pi\Big(\frac{1}{2}-x\Big) \quad \text{za } x\in\langle 0,1\rangle.$$

Dokažite da konvergencija gornjeg reda nije uniformna na $\langle 0,1\rangle$, ali jest uniformna na svakom segmentu sadržanom u $\langle 0,1\rangle$.

Rješenje. Trivijalno imamo konvergenciju reda na lijevoj strani za $x=0$: $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$. Kada bi taj red konvergirao uniformno na $\langle 0,1\rangle$, tada bi on konvergirao uniformno i na $[0,1\rangle$, a kako su mu članovi 1-periodične funkcije, konvergirao bi na cijelom $\mathbb{R}$. Zbog neprekidnosti od $x\mapsto \frac{\sin 2\pi k x}{k}$ bi mu suma također bila neprekidna funkcija. S druge strane, $\pi\big(\frac{1}{2}-x\big)$ se ne može proširiti sa $\langle 0,1\rangle$ do neprekidne 1-periodične funkcije na $\mathbb{R}$. Zato red ne konvergira uniformno.

Uzmemo li sada segement $[c,d]\subseteq\langle 0,1\rangle$ takav da je $c<\frac{1}{2}<d$, možemo na sljedeći način ocijeniti parcijalnu sumu.

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\sin 2k\pi x}{k} = 2\pi \sum_{k=1}^{N} \int_{1/2}^{x} \cos 2k\pi t\, dt = 2\pi\, \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{N} \int_{1/2}^{x} e^{2k\pi i t}\, dt\Big)$$

$$= \pi \int_{1/2}^{x} \Big(\underbrace{\sum_{k=-N}^{N} e^{2k\pi i t}}_{D_N(t)} -1 \Big)\, dt = \pi \int_{1/2}^{x} \Big(\frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t} - 1 \Big)\, dt$$

$$= \pi \underbrace{\int_{1/2}^{x} \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt}_{u=\pi t} - \pi\Big(x - \frac{1}{2}\Big) = \int_{\pi/2}^{\pi x} \frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}\, du + \pi\Big(\frac{1}{2} - x\Big)$$

Iskoristimo prethodni zadatak za funkciju $f(u) = \frac{1}{\sin u}$ na intervalu $[\alpha, \beta] = [\pi c, \pi d] \subseteq \langle 0, \pi \rangle$:

$$\Big| \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin 2k\pi}{k} - \pi\Big(\frac{1}{2} - x\Big) \Big| = \Big| \int_{\pi/2}^{\pi x} \frac{\sin(2N+1)u}{\sin u}\, du \Big| \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

uniformno po $x \in [c, d]$, obzirom da je $[\pi/2,\, \pi x]$ ili $[\pi x,\, \pi/2] \subseteq [\pi c,\, \pi d]$.

Zadatak 1.7.7. Dokažite

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^2} = \pi^2 \Big(x^2 - x + \frac{1}{6} \Big)$$

za svaki $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Smijemo li uvrstiti $x = 0$?

Rješenje. Red iz prethodnog zadatka je uniformno konvergentan na $[1/2, x]$ ili $[x, 1/2]$ za fiksirani $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Zato ga smijemo integrirati član po član:

$$\int_{1/2}^{x} \pi\Big(\frac{1}{2} - t\Big)\, dt = \int_{1/2}^{x} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi t}{k} \Big)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/2}^{x} \frac{\sin 2k\pi t}{k}\, dt$$

$$\Longrightarrow\ \pi\Big(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2\Big)\Big|_{1/2}^{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\cos 2k\pi t}{2k^2\pi}\Big|_{1/2}^{x}$$

$$\Longrightarrow\ \pi\Big(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\Big) - \frac{\pi}{8} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^2} - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}}_{A}$$

$$A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\Longrightarrow\ \pi\Big(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\Big) - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{24} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^2}$$

$$\Longrightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^2} = -2\pi\Big(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x^2 - \frac{\pi}{12}\Big) = \pi^2\Big(x^2 - x + \frac{1}{6}\Big)$$

Primijetimo da zbog

$$\Big| \frac{\cos 2k\pi x}{k^2} \Big| \leqslant \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

red na lijevoj strani konvergira uniformno na cijelom $\mathbb{R}$. Suma mu je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$, koja se na $\langle 0, 1 \rangle$ podudara s $\pi^2\big(x^2 - x + \frac{1}{6}\big)$. Zato u sumi možemo pustiti $x \to 0$ i dobiti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi 0}{k^2} = \lim_{x\to 0+} \pi^2\Big(x^2 - x + \frac{1}{6}\Big)$$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

što smo ionako već bili izračunali.

Zadatak 1.7.8. Pronađite 1-periodičnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ klase C^1 čiji Fourierovi koeficijenti zadovoljavaju:

$$\begin{aligned}
&\hat{f}(n) = 0 \quad \text{za } n \leqslant -1,\\
&\hat{f}(0) = 5,\\
&\hat{f}(1) = 2,\\
&6\hat{f}(n) - 5\hat{f}(n-1) + \hat{f}(n-2) = 0 \quad \text{za } n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Rješenje. Iz uvjeta na glatkoću funkcije f znamo da njen Fourierov red konvergira (čak uniformno) prema njoj samoj. Dakle,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x} = 5 + 2e^{2\pi i x} + \sum_{n=2}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Množenjem posljednje jednakosti u zadatku s $e^{2\pi i n x}$ i sumiranjem po $n \geqslant 2$ dobivamo

$$6\big(f(x) - 5 - 2e^{2\pi i x}\big) - 5e^{2\pi i x}\big(f(x) - 5\big) + e^{4\pi i x} f(x) = 0.$$

Iz ove jednadžbe lako izrazimo $f(x)$:

$$f(x) = \frac{-13e^{2\pi i x} + 30}{e^{4\pi i x} - 5e^{2\pi i x} + 6}.$$

Očigledno je ova funkcija klase C^1.

Alternativni pristup je najprije riješiti rekurziju za niz $(f(n))_{n=0}^{\infty}$. Rješenje koje se dobije (a moguće ga je i pogoditi te dokazati indukcijom) je

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}} \quad \text{za } n \geqslant 0.$$

Zato sumiranje dvaju geometrijskih redova daje:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}}\Big) e^{2\pi i n x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{e^{2\pi i x}}{2}\Big)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{e^{2\pi i x}}{3}\Big)^n\\
&= \frac{2}{1 - \frac{e^{2\pi i x}}{2}} + \frac{3}{1 - \frac{e^{2\pi i x}}{3}} = \frac{-13e^{2\pi i x} + 30}{e^{4\pi i x} - 5e^{2\pi i x} + 6}.
\end{aligned}$$

Iz uniformne konvergencije gornjeg reda slijedi da funkcija f doista ima navedene Fourierove koeficijente.

1.8 Tehnike usrednjenja

Promotrimo red $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, koji divergira. Njegove parcijalne sume su:

$$s_1 = 1,\ s_2 = 0,\ s_3 = 1,\ s_4 = 0,\ \ldots,\ \text{tj.}$$

$$s_{2k-1} = 1, \quad s_{2k} = 0, \quad \text{za } k \in \mathbb{N}.$$

Niz parcijalnih suma ne konvergira, ali možemo očekivati da će se "bolje ponašati" prosjeci parcijalnih suma

$$\sigma_n := \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}.$$

Naime, lako se vidi

$$\sigma_{2k-1} = \frac{k}{2k-1}, \quad \sigma_{2k} = \frac{1}{2}, \quad \text{za } k \in \mathbb{N}$$

pa vrijedi

$$\sigma_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Ideju usrednjivanja parcijalnih suma razvio je oko 1890. godine *E. Cesàro*. Na Fourierove redove je tu ideju primjenio *L. Fejér* početkom 20. stoljeća.

Definicija 1.8.1. *Neka je $\sum a_n$ red realnih ili kompleksnih brojeva i označimo sa s_n njegovu n-tu parcijalnu sumu. Kažemo da je*

$$\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$$

n-ta Cesàrova suma reda $\sum a_n$. *Reći ćemo da red $\sum a_n$ konvergira u* smislu Cesàra *ako postoji broj σ takav da je*

$$\lim_n \sigma_n = \sigma.$$

U tom slučaju pišemo:

$$\sigma = (\mathrm{C})\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Lema 1.8.2. *Ako red kompleksnih brojeva konvergira u uobičajenom smislu, tada on konvergira i u smislu Cesàra i to prema istoj vrijednosti. Dakle, ako je*

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

tada je

$$a = (\mathrm{C})\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dokaz. Zadajmo $\varepsilon > 0$. Zbog $\lim_{n\to\infty} s_n = a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n \geqslant n_0 \implies |s_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $M := \max_{1\leqslant k\leqslant n_0} |s_k|$ i neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da vrijedi

$$n \geqslant n_1 \implies \tfrac{n_0(M+|a|)}{n} < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Tada za $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$ dobivamo

$$\begin{aligned} |\sigma_n - a| &= \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}(s_k - a) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}(s_k - a)\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}(|s_k| + |a|) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|s_k - a| \\ &\leqslant \frac{n_0(M+|a|)}{n} + \frac{(n-n_0)(\varepsilon/2)}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Budući da je

$$(\mathrm{C})\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=\frac{1}{2},$$

a klasično taj red ne konvergira, vidimo da Cesàrova konvergencija strogo poopćuje klasičnu konvergenciju. Nadalje, Cesàrove sume poštuju linearnost:

$$(\mathrm{C})\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A,\quad (\mathrm{C})\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}\implies (\mathrm{C})\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A+\beta B. \tag{1.44}$$

Prijeđimo sada na parcijalne sume Fourierovog reda. Sjetimo se formule za Dirichletovu jezgru,

$$D_N^{\mathbb{R}}(x)=1+2\sum_{n=1}^{N}\cos nx=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}=\frac{\sin\big(N+\frac{1}{2}\big)x}{\sin\frac{x}{2}}\quad \text{za } x\in[-\pi,\pi\rangle\setminus\{0\},$$

te da je

$$(S_N^{\mathbb{R}}f)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{[0,\pi]}\big(f(t+x)+f(t-x)\big)D_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx.$$

Uzmemo li Cesàrovo usrednjenje niza $\big(S_N^{\mathbb{R}}f\big)_{N=0}^{\infty}$, dobivamo

$$\sigma_N^{\mathbb{R}}f:=\frac{1}{N+1}\Big(S_0^{\mathbb{R}}f+S_1^{\mathbb{R}}f+\cdots+S_N^{\mathbb{R}}f\Big), \tag{1.45}$$

što daje

$$(\sigma_N^{\mathbb{R}}f)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{[0,\pi]}\big(f(t+x)+f(t-x)\big)F_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx, \tag{1.46}$$

pri čemu je

$$F_N^{\mathbb{R}}(x):=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n^{\mathbb{R}}(x). \tag{1.47}$$

Posljednja funkcija $F_N^{\mathbb{R}}$ naziva se *Fejérova jezgra* (za sistem $Trig$). Uočimo $F_0^{\mathbb{R}}\equiv 1$.

Propozicija 1.8.3. *Fejérova jezgra ima sljedeća svojstva:*

(a) Fejérova jezgra $F_N^{\mathbb{R}}$ je 2π-periodična i zadovoljava:

$$F_N^{\mathbb{R}}(x)=\begin{cases}N+1 & \text{za } x=0,\\ \frac{1}{N+1}\Big(\frac{\sin\frac{N+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\Big)^2 & \text{za } x\in[-\pi,\pi\rangle\setminus\{0\}.\end{cases}$$

(b) Za svaki N vrijedi $F_N^{\mathbb{R}}\geqslant 0$.

(c) Za svaki $r\in\langle 0,\pi\rangle$ vrijedi $F_N^{\mathbb{R}}(x)\xrightarrow{N\to\infty}0$ uniformno po x za koje vrijedi $r\leqslant|x|\leqslant\pi$, tj. uniformno na $[-\pi,-r]\cup[r,\pi]$.

(d) Vrijedi:

$$\int_{[-\pi,\pi]}F_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx=2\pi.$$

Dokaz. (a) Računamo:

$$D_n^{\mathbb{R}}(0) = 2n+1 \implies F_N^{\mathbb{R}}(0) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2n+1) = \frac{1}{N+1}\frac{(N+1)(2N+2)}{2} = N+1.$$

Ostatak formule slijedi iz

$$F_N^{\mathbb{R}}(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{N}\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)x\,\sin\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{n=0}^{N}\Big(\frac{1}{2}\cos nx - \frac{1}{2}\cos(n+1)x\Big)$$

$$= \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\frac{1-\cos(N+1)x}{2} = \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\sin^2\frac{(N+1)x}{2}.$$

(b) Očigledno iz (a) dijela.

(c) Za $r \leqslant |x| \leqslant \pi$ zahvaljujući formuli iz (a) dijela imamo

$$F_N^{\mathbb{R}}(x) = \frac{1}{N+1}\Big(\frac{\sin\frac{(N+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\Big)^2 \leqslant \frac{1}{N+1}\Big(\frac{1}{\sin\frac{r}{2}}\Big)^2,$$

što konvergira u 0 kada $N\to\infty$.

(d) Imamo:

$$\int_{[-\pi,\pi]} F_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx = \int_{[-\pi,\pi]}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\Big(1+\sum_{k=1}^{n}2\cos kx\Big)\,dx = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}2\pi = 2\pi.$$

Q.E.D.

Teorem 1.8.4 (Fejérov teorem o točkovnoj konvergenciji)**.** *Neka je $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]}\in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Za svaku točku $t\in\mathbb{R}$ za koju postoje $f(t-)$ i $f(t+)$ Fourierov red konvergira u smislu Cesàra prema $\frac{1}{2}\big(f(t-)+f(t+)\big)$, tj.*

$$\lim_{N\to\infty}(\sigma_N^{\mathbb{R}}f)(t) = \frac{1}{2}\big(f(t-)+f(t+)\big).$$

Dokaz. Neka je $t\in\mathbb{R}$ kao u iskazu. Po (1.46) imamo

$$\big(\sigma_N^{\mathbb{R}}f\big)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,\pi]} f(t+x)F_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{[0,\pi]} f(t-x)F_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx$$

pa je dovoljno pokazati da odgovarajući pribrojnici konvergiraju prema $\frac{1}{2}f(t-)$ i $\frac{1}{2}f(t+)$, tj., radi propozicije 1.8.3(d),

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{[0,\pi]}\big(f(t+x)-f(t+)\big)F_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx = 0 \tag{1.48}$$

(i analognu tvrdnju za lijevi limes). Neka je $\varepsilon>0$. Postoji $r=r(t,\varepsilon)>0$ takav da

$$0<x<r \implies |f(t+x)-f(t+)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{1}{2\pi}\int_{[0,r]}\big(f(t+x)-f(t+)\big)F_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{[0,r]}F_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx \overset{\text{prop. 1.8.3(d)}}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot 2\pi = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Po propoziciji 1.8.3(c) postoji $N_0 = N_0(t,\varepsilon,r) \in \mathbb{N}$ takav da

$$N \geqslant N_0, \quad r \leqslant |x| \leqslant \pi \quad \Longrightarrow \quad |F_N^{\mathbb{R}}(x)| \leqslant \frac{\pi\varepsilon}{\|f\|_{1,[-\pi,\pi]} + \pi|f(t+)| + 1}.$$

Za $N \geqslant N_0$ imamo

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{[r,\pi]}\big(f(t+x)-f(t+)\big)F_N^{\mathbb{R}}(x)\,dx\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{\pi\varepsilon}{\|f\|_{1,[-\pi,\pi]} + \pi|f(t+)| + 1}\int_{[r,\pi]}\big(|f(t+x)| + |f(t+)|\big)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, izraz pod limesom na lijevoj strani od (1.48) je za $N \geqslant N_0$ po apsolutnoj vrijednosti manji od ε. Q.E.D.

Napomena 1.8.5. Usporedimo li ovaj teorem s Dirichletovim teoremom, vidimo da su sve pretpostavke za jedan red diferencijabilnosti slabije.

Korolar 1.8.6 (Fejérov teorem o uniformnoj konvergenciji)**.** *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna 2π-periodična funkcija, tada niz $\big(\sigma_N^{\mathbb{R}} f\big)_{N\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira prema f.*

Dokaz. Iskoristimo dokaz teorema 1.8.4. Ako je funkcija f neprekidna, tada je ona uniformno neprekidna na segmentu $[-\pi,\pi]$ pa u prvom dijelu dokaza možemo naći r koji ovisi samo o ε (ali ne i o t) takav da vrijedi

$$0 < x < r \implies |f(t+x) - f(t)| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

U drugom dijelu dokaza koristimo omeđenost od f pa nalazimo N_0 koji ovisi samo o ε i r (ali ne i o t) takav da vrijedi

$$N \geqslant N_0, \quad r \leqslant |x| \leqslant \pi \quad \Longrightarrow \quad |F_N^{\mathbb{R}}(x)| \leqslant \frac{\pi\varepsilon}{\|f\|_{1,[-\pi,\pi]} + \pi\|f\|_\infty + 1}.$$

Limes (1.48) iz dokaza teorema 1.8.4 je sada uniforman po t. Na kraju iskoristimo

$$\frac{1}{2}\big(f(t-) + f(t+)\big) = f(t).$$

Q.E.D.

Posljedica leme 1.8.2 i teorema 1.8.4 je sljedeći korolar.

Korolar 1.8.7. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Neka je $t \in \mathbb{R}$ takav da postoje $f(t-)$ i $f(t+)$. Ako Fourierov red konvergira u točki t, tada njegova suma mora biti*

$$\frac{1}{2}\big(f(t-) + f(t+)\big).$$

Dokaz. Ako Fourierov red konvergira klasično, tada on konvergira i u smislu Cesàra prema istoj vrijednosti pa Fejérov teorem o točkovnoj konvergenciji daje tvrdnju. Q.E.D.

Ideja usrednjivanja se može vezati i uz druge jezgre, tj. načine sumiranja. Naprimjer, možemo promatrati tzv. *Abelovu konvergenciju.* Za $r \in [0,1\rangle$ definiramo

$$(P_r f)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt)\,r^n,$$

pri čemu su a_n, b_n Fourierovi koeficijenti funkcije f. Naime, faktor r^n doprinosti eksponencijalnim padom pa je već sama ograničenost Fourierovih koeficijenata a_n, b_n dovoljna kako bi gornji red apsolutno (i uniformno) konvergirao. Možemo promatrati limes $\lim\limits_{r\to 1-} (P_r f)(t)$ i nadati se da on postoji čak i kada sam Fourierov red ne konvergira.

Sasvim općenito, pišemo

$$\text{(A)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$$

ukoliko vrijedi

$$\lim_{r\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = a$$

i tada kažemo da red *konvergira u smislu Abela*. Najprije pokažimo da Abelova konvergencija poopćuje Cesàrovu.

Lema 1.8.8. *Ako red kompleksnih brojeva konvergira u smislu Cesàra, tada on konvergira i u smislu Abela i to prema istoj vrijednosti. Dakle, ako je*

$$a = \text{(C)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

tada je

$$a = \text{(A)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Nakon zadatka 1.8.1 vidjet će se da je to poopćenje strogo, tj. da postoji red koji konvergira u smislu Abela, ali ne konvergira u smislu Cesàra.

Dokaz. Označimo parcijalne sume

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

te stavimo

$$t_n := \sum_{k=0}^{n} s_k, \quad \sigma_n := \frac{1}{n+1} t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k.$$

Prije svega primijetimo da za svaki $r \in [0,1\rangle$ red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ apsolutno konvergira. Naime, iz naše pretpostavke da je niz $(\sigma_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergentan slijedi da je taj niz i ograničen pa je

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |\sigma_n| < +\infty.$$

Nadalje, iz

$$a_n = s_n - s_{n-1} = t_n - 2t_{n-1} + t_{n-2} = (n+1)\sigma_n - 2n\sigma_{n-1} + (n-1)\sigma_{n-2}$$

proizlazi

$$|a_n r^n| \leqslant M\Big((n+1)r^n + 2nr^{n-1} + (n-1)r^{n-2}\Big),$$

odakle odmah slijedi konvergencija od $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n r^n|$. Dakle, posebno je uopće dobro definirana suma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ za svaki $r \in [0,1\rangle$.

Zadajmo $\varepsilon > 0$. Zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$n \geqslant n_0 \implies |\sigma_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $\delta > 0$ dovoljno mali da vrijedi

$$1-\delta < r < 1 \implies n_0^2(M+|a|)(1-r)^2 < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Za bilo koji $0 < r < 1$ množenje apsolutno konvergentnih redova daje

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n}{(1-r)^2} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\Big)^2$$

$$= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_n r^n,$$

a imamo i

$$\frac{a}{(1-r)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a r^n.$$

Iz te dvije jednakosti oduzimanjem i množenjem s $(1-r)^2$ dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - a = (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\sigma_n - a) r^n.$$

Sada za r takav da je $1-\delta < r < 1$ ocjenjujemo

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n - a\Big| \leqslant (1-r)^2 \sum_{n=0}^{n_0-1} (n+1)(|\sigma_n| + |a|) r^n + (1-r)^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} (n+1)|\sigma_n - a| r^n$$

$$\leqslant n_0^2(M+|a|)(1-r)^2 + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{(1-r)^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} (n+1) r^n}_{\leqslant 1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Iz i teorema 1.8.4 i leme 1.8.8 odmah proizlazi sljedeća posljedica.

Korolar 1.8.9. *Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija takva da je $f|_{[-\pi,\pi]} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\pi,\pi])$. Za svaku točku $t \in \mathbb{R}$ za koju postoje $f(t-)$ i $f(t+)$ Fourierov red konvergira u smislu Abela prema $\frac{1}{2}\big(f(t-)+f(t+)\big)$, tj.*

$$\lim_{r\to 1-} (P_r f)(t) = \frac{1}{2}\big(f(t-)+f(t+)\big).$$

Nadalje, može se pokazati da za $r \in [0,1\rangle$ vrijedi

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\alpha = \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha + r^2}. \tag{1.49}$$

Naime, naprosto se uzme realni dio geometrijskog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \big(re^{i\alpha}\big)^n = \frac{1}{1-re^{i\alpha}}.$$

Iz (1.49) uz $\alpha = t - x$ slijedi

$$(P_r f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(x) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\, dx. \tag{1.50}$$

U (1.50) je opet “skrivena” jedna jezgra:

$$(t,x) \mapsto \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2},$$

koja se naziva *Poissonova jezgra.* Funkcija $(t,r) \mapsto (P_r f)(t)$ se pak zove *Poissonov integral* od f, što obrazlaže slovo P u notaciji.

* * *

Zadatak 1.8.1. Izračunajte sume sljedećeg reda u smislu Cesàra i Abela:

(a) $(\mathrm{C})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$, (b) $(\mathrm{A})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$.

Rješenje. (a) Zbrajanjem po dva člana (čiji zbroj je -1) dobivamo

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}\cdot(-1) = -\frac{n+1}{2} & \text{za } n \text{ neparan,} \\ \frac{n}{2}\cdot(-1)+(n+1) = \frac{n+2}{2} & \text{za } n \text{ paran,} \end{cases}$$

te na isti način (uz broj uzastopnih parova jednak $\frac{2k+2}{2} - \frac{2k+1+1}{2} = 0$) proizlazi

$$\sigma_N = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_N}{N+1} = \begin{cases} 0 & \text{za } N \text{ neparan,} \\ \frac{N+2}{2(N+1)} & \text{za } N \text{ paran,} \end{cases}$$

odakle slijedi

$$\sigma_{2K-1} \xrightarrow{K\to\infty} 0,$$
$$\sigma_{2K} \xrightarrow{K\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Dakle, red **ne** konvergira u smislu Cesàra.

(b) Vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)r^n = \frac{1}{(1-(-r))^2} = \frac{1}{(1+r)^2}, \ r \in [0,1\rangle,$$

jer je

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

(ili postupamo kao u dokazu leme 1.8.8). Zato imamo:

$$(\mathrm{A})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1) = \lim_{r\to 1-}\frac{1}{(1+r)^2} = \frac{1}{4}.$$

Zadatak 1.8.2. Označimo $\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Izračunajte sumu reda u smislu Cesàra: $(\mathrm{C})\sum_{n=1}^{\infty}\omega^{n-1}$.

(b) Izračunajte sumu reda u smislu Abela: $(\mathrm{A})\sum_{n=0}^{\infty}\omega^{n}$.

Rješenje. (a) Parcijalne sume reda su

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \omega^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^n = \frac{1-\omega^N}{1-\omega}.$$

Odavde slijedi:

$$S_{3k} = \frac{1-\omega^0}{1-\omega} = 0, \quad S_{3k+1} = \frac{1-\omega^1}{1-\omega} = 1, \quad S_{3k+2} = \frac{1-\omega^2}{1-\omega} = 1+\omega$$

za $k \in \mathbb{N}_0$. Sada se (uz ponovno diskutiranje ostatka pri dijeljenju s 3) lako dobije

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_N}{N} = \frac{2+\omega}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

(b) Za svaki $r \in [0,1\rangle$ sumiramo konvergentni geometrijski red:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega^n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega r)^n = \frac{1}{1-\omega r},$$

a puštanjem $r \to 1^-$ dobivamo rezultat

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-\omega r} = \frac{1}{1-\omega} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Naravno, radi leme 1.8.8 znamo da smo morali dobiti isti rezultat.

Zadatak 1.8.3. Izračunajte sume redova u smislu Abela:

(a) $(\mathrm{A})\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$, (b) $(\mathrm{A})\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Rješenje. (a) *Odgovor*: $+\infty$.
Za svaki $r \in [0,1\rangle$ najprije računamo $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2r)^n$, ali taj geometrijski red divergira u $+\infty$ čim je $2r \geqslant 1$, tj. $r \geqslant 1/2$. Zato možemo pisati

$$(\mathrm{A})\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \lim_{r\to 1^-} (+\infty) = +\infty.$$

Napomenimo kako bismo naivnom primjenom formule za sumu geometrijskog reda, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, dobili besmislicu:

$$(\mathrm{A})\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (2r)^n = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-2r} = -1,$$

ali tu formulu nismo smjeli ni primijeniti jer ona vrijedi samo za $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$.

(b) *Odgovor*: $\ln 2$.
Integriranjem "član-po-član" reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ dobiva se formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = -\operatorname{Ln}(1-z)$$

za $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, pri čemu Ln označava glavnu granu kompleksnog logaritma. Mi trebamo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n}{n+1}$ za $r \in [0,1\rangle$ pa računamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-r)^n}{n+1} = -\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-r)^{n+1}}{n+1} = \frac{\ln(1+r)}{r},$$

odakle je

$$(\mathrm{A}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \lim_{r \to 1^-} \frac{\ln(1+r)}{r} = \ln 2.$$

Napomenimo kako je obična suma reda također jednaka $\ln 2$ pa nas ovaj rezultat ne iznenađuje.

Zadatak 1.8.4. Ako je D_N Dirichletova jezgra, tada je *Fejérovu jezgru za sistem* $\mathbb{B}$ prikladno definirati formulom

$$F_N := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n.$$

(Primijetite da smo ovdje pomaknuli granicu sumacije s N na $N-1$, iz čisto estetskih razloga.) Dokažite da za $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big) e^{2\pi i n x},$$

dok za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ imamo

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \Big(\frac{\sin N\pi x}{\sin \pi x}\Big)^2.$$

Rješenje. Prva formula slijedi iz

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k x} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{k,n \\ |k| \leqslant n \leqslant N-1}} e^{2\pi i k x}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \Big(\sum_{n=|k|}^{N-1} 1 \Big) e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \frac{N-|k|}{N} e^{2\pi i k x}.$$

Gornjoj sumi još možemo priključiti pribrojnike za $k = \pm N$, jer su oni ionako jednaki 0.

Za drugu formulu računamo

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{N \sin \pi x} \operatorname{Im}\Big(\sum_{n=0}^{N-1} (e^{i\pi x})^{2n+1} \Big)$$

$$= \frac{1}{N \sin \pi x} \operatorname{Im}\Big(e^{\pi i x} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} \Big) = \frac{1}{N \sin \pi x} \operatorname{Im} \frac{e^{2N\pi i x} - 1}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}$$

$$= \frac{1}{N \sin \pi x} \operatorname{Im} \frac{\sin 2N\pi x + i(1 - \cos 2N\pi x)}{2 \sin \pi x} = \frac{1}{2N \sin^2 \pi x} \cdot 2 \sin^2 N\pi x.$$

Drugi dokaz je dan na predavanjima; samo treba promijeniti normalizaciju iz $D_N^{\mathbb{R}}$ na D_N.

Poglavlje 2

Primjene osnovnih rezultata

Na nekoliko primjera ilustrirat ćemo raznolikost primjena Fourierove metode.

2.1 Weierstrassov teorem aproksimacije

Iz Fejérovog teorema o uniformnoj konvergenciji može se izvesti poznati Weiestrassov rezultat o gustoći polinoma u prostoru $(\mathrm{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. Bez smanjenja općenitosti promatrajmo interval $[a,b] = [-1,1]$; općeniti slučaj se potom lako dobije skaliranjem i translacijom.

Teorem 2.1.1 (Weiestrassov teorem). *Za svaku $f \in \mathrm{C}([-1,1])$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji polinom p takav da je*

$$\max_{t\in[-1,1]} |f(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

Dokaz. Dovoljno je promatrati slučaj realne funkcije f, jer se inače tvrdnja primijeni na njezin realni i imaginarni dio. Definirajmo $g(t) := f(\cos t)$, tako da je g neprekidna 2π-periodična funkcija. Osim toga, g je parna pa joj je Fourierov red oblika

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt,$$

a pripadna n-ta Fejérova suma je

$$(\sigma_n^{\mathbb{R}} f)(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} (S_l^{\mathbb{R}} f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big) a_k \cos kt.$$

Po Fejérovom teoremu o uniformnoj konvergenciji niz $(\sigma_n^{\mathbb{R}} f)_{n=1}^{\infty}$ uniformno konvergira prema f pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\|g - \sigma_n^{\mathbb{R}} f\|_\infty < \varepsilon$. Uz supstituciju $t = \arccos x$ dobijemo

$$\Big| f(x) - \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big) a_k \cos(k \arccos x)\Big)\Big| < \varepsilon$$

za svaki $x \in [-1,1]$.

Za završetak dokaza je još dovoljno vidjeti da je $\cos(k \arccos x)$ polinom u varijabli x. Dakle, pokazat ćemo matematičkom indukcijom po $k \in \mathbb{N}_0$ da postoji polinom p_k takav da je

$$p_k(\cos y) = \cos ky$$

za svaki $y \in \mathbb{R}$. Možemo uzeti $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = x$, a potom rekurzivno definiramo

$$p_k(x) := 2x p_{k-1}(x) - p_{k-2}(x) \text{ za } k \geqslant 2.$$

Baza indukcije za $k = 0$ i $k = 1$ je trivijalna. U koraku uzmimo $k \geqslant 2$ i pretpostavimo da vrijedi $p_{k-2}(\cos y) = \cos(k-2)y$ i $p_{k-1}(\cos y) = \cos(k-1)y$. Sada imamo

$$\begin{aligned} p_k(\cos y) &= 2(\cos y)p_{k-1}(\cos y) - p_{k-2}(\cos y) = 2(\cos y)\cos(k-1)y - \cos(k-2)y \\ &= \cos\big((k-1)y + y\big) + \cos\big((k-1)y - y\big) - \cos(k-2)y = \cos ky. \end{aligned}$$

Time je teorem dokazan. Q.E.D.

Polinomi p_k opisani gornjom rekurzijom poznati su kao *Čebiševljevi polinomi prve vrste*, a u literaturi se pojavljuju u raznim normalizacijama.

2.2 Izoperimetrijski problem

Pitanje: Ako promatramo sve jednostavne zatvorene krivulje u ravnini iste duljine L, koja od njih omeđuje lik najveće površine?
Odgovor: Kružnica.

- Naziv se javlja u opisu problema već kod Proklusa iz Atene.
- Zenodorus nudi rješenje već 100. pr.n.e.; usporediti s Didoninim problemom (tj. legendom o osnivanju Kartage).
- J. Steiner je 1838. predložio rješenje u kojem je Dirichlet otkrio grešku.
- K. Weierstrass daje potpuno rješenje.
- A. Hurwitz 1902. daje rješenje pomoću Fourierovih redova koje izlažemo.

Promatrat ćemo ravninske krivulje

$$C = \{(x(t), y(t)) : t \in [0,1]\}$$

koje su:

(i) zatvorene, tj. $x(0) = x(1)$, $y(0) = y(1)$,

(ii) po dijelovima glatke, tj. može se particionirati $[0,1]$ na konačno mnogo intervala tako da na svakom od njih x, y budu klase C^1,

(iii) jednostavne, tj. ako su $s, t \in [0,1]$, $s \neq t$, $\{s,t\} \neq \{0,1\}$, onda je $(x(s), y(s)) \neq (x(t), y(t))$,

(iv) duljine 1, tj. $1 = \int_0^1 \big(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\big)^{1/2} dt$.

Zadatak 2.2.1. (a) Dokažite da je površina P lika omeđenog krivuljom C dana formulom

$$P = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\big)dt.$$

(b) Ako su (x_i, y_i); $i = 1, 2, \ldots, n$ vrhovi mnogokuta u ravnini, dokažite da je njegova površina dana tzv. *formulom vezica* (A. L. F. Meister 1769.):

$$P = \frac{1}{2}\big(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \cdots + x_ny_1 - x_1y_n\big).$$

Rješenje. (a) Koristit ćemo *Greenovu formulu*

$$\int_C (F dx + G dy) = \iint_D \Big(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\Big) dx dy$$

za jednostavno povezano područje D omeđeno krivuljom C. Uzmemo $F(x,y) = -y$, $G(x,y) = x$ i koristimo parametrizaciju $t \mapsto (x(t), y(t))$. Lijeva strana je

$$\int_0^1 \big(- y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)\big) dt,$$

dok je desna

$$\iint_D 2 dx dy = 2P.$$

(b) Stranice mnogokuta se parametriziraju linearno u parametru $t \in [(i-1)/n, i/n]$; $i = 1, 2, \ldots, n$ pa se primijeni (a) dio. Dobije se (uz zbrajanje indeksa modulo n):

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2\cancel{n}}\cancel{n}(y_{i+1} - y_i) - \cancel{n}(x_{i+1} - x_i)\frac{y_i + y_{i+1}}{2\cancel{n}}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\big(x_i y_{i+1} - \cancel{x_i y_i} + \cancel{x_{i+1} y_{i+1}} - x_{i+1} y_i - x_{i+1} y_i - \cancel{x_{i+1} y_{i+1}} + \cancel{x_i y_i} + x_i y_{i+1}\big),$$

tj.

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\big).$$

Zbog jednostavnosti ćemo normalizirati $L = 1$. Ako je opseg kružnice 1, radijus joj je $R = \frac{1}{2\pi}$ pa je površina pripadnog kruga $R^2\pi = \frac{1}{4\pi}$.

Teorem 2.2.1. *Površina P lika omeđenog krivuljom C duljine 1 zadovoljava $P \leqslant \frac{1}{4\pi}$. Jednakost se postiže ako i samo ako je C kružnica.*

Ovaj rezultat je poznat kao *izoperimetrijska nejednakost*. Iskoristit ćemo činjenicu da je moguće izabrati parametrizaciju $(x(t), y(t))$ tako da je duljina luka $C_t := \{(x(s), y(s)) : s \in [0,t]\}$ jednaka t za svaki t. Kažemo da smo krivulju *parametrizirali duljinom luka* i u ovom slučaju vrijedi

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = 1$$

za svaki $t \in [0,1]$.

Dokaz. Funkcije $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ su neprekidne i 1-periodične pa im možemo promatrati Fourierove koeficijente $\hat{x}(n) = \int_0^1 x(t) e^{-2\pi i n t} dt$, itd. Prema zadatku 2.2.1(a) je

$$P = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t) y(t)\big) dt = \frac{1}{2}\big(\langle x, \dot{y}\rangle - \langle y, \dot{x}\rangle\big),$$

a po pretpostavci $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \equiv 1$ imamo i

$$1 = \int_0^1 \big(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\big) dt = \|\dot{x}\|_2^2 + \|\dot{y}\|_2^2.$$

Zato Parsevalov i Plancherelov identitet te zadatak 1.3.4 daju:

$$P = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big(\hat{x}(n)\overline{\widehat{\dot{y}}(n)} - \hat{y}(n)\overline{\widehat{\dot{x}}(n)}\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-\pi i n)\big(\hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)} - \hat{y}(n)\overline{\hat{x}(n)}\big)$$

i

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(|\widehat{x}(n)|^2 + \widehat{y}(n)|^2\big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\pi^2 n^2 \big(|\hat{x}(n)|^2 + \hat{y}(n)|^2\big).$$

Iz posljednje dvije jednakosti dobivamo

$$\frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{4\pi} - P\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(n^2\big(|\hat{x}(n)|^2 + |\hat{y}(n)|^2\big) + in\underbrace{\big(\hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)} - \overline{\hat{x}(n)}\hat{y}(n)\big)}_{=2i\,\mathrm{Im}(\hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)})}\Big).$$

Uz $\hat{x}(n) = \alpha_n + i\beta_n$, $\hat{y}(n) = \gamma_n + i\delta_n$, $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n \in \mathbb{R}$ posljednji se izraz pojednostavljuje kao

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{4\pi} - P\Big) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big(n^2(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \gamma_n^2 + \delta_n^2) + 2n(\alpha_n\delta_n - \beta_n\gamma_n)\Big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big((n\alpha_n + \delta_n)^2 + (n\beta_n - \gamma_n)^2 + (n^2-1)(\gamma_n^2 + \delta_n^2)\Big) \geqslant 0,\end{aligned}$$

iz čega doista slijedi $P \leqslant \frac{1}{4\pi}$.

Jednakost se postiže samo ako je

$$\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \delta_n = 0 \text{ za } |n| \geqslant 2,$$

$$\alpha_1 + \delta_1 = 0, \quad \alpha_{-1} - \delta_{-1} = 0, \quad \beta_1 - \gamma_1 = 0, \quad \beta_{-1} + \gamma_{-1} = 0.$$

Odavde se laganim računom dobiva

$$\begin{aligned}&\big(x(t) - \hat{x}(0)\big)^2 + \big(y(t) - \hat{y}(0)\big)^2 \\ &= \big((\alpha_1 + i\beta_1)e_1(t) + (\alpha_{-1} + i\beta_{-1})e_{-1}(t)\big)^2 + \big((\gamma_1 + i\delta_1)e_1(t) + (\gamma_{-1} + i\delta_{-1})e_{-1}(t)\big)^2 \\ &= \big((\alpha_1 + i\beta_1)e_1(t) + (\alpha_{-1} + i\beta_{-1})e_{-1}(t)\big)^2 + \big((-i\alpha_1 + \beta_1)e_1(t) + (i\alpha_{-1} - \beta_{-1})e_{-1}(t)\big)^2 \\ &= \big((\alpha_1 + i\beta_1)e_1(t) + (\alpha_{-1} + i\beta_{-1})e_{-1}(t)\big)^2 - \big((\alpha_1 + i\beta_1)e_1(t) - (\alpha_{-1} + i\beta_{-1})e_{-1}(t)\big)^2 \\ &= 4(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_{-1} + i\beta_{-1}) = \text{const}.\end{aligned}$$

pa vidimo da doista mora biti riječ o kružnici. Q.E.D.

2.3 Popločavanje pravokutnika

Sljedeći problem je simpatičan i opće poznat.

> *Ako je pravokutnik sa stranicama duljina a i b razrezan na konačno mnogo pravokutnika koji imaju barem po jednu cjelobrojnu stranicu, pokažite da barem jedan od brojeva a i b mora biti cijeli.*

Nakon kraćeg razmišljanja uvjerit ćemo se da problem nije trivijalan, jer postoji obilje raznolikih podjela pravokutnika na konačno mnogo manjih pravokutnika. Ipak, on ima vrlo elegantno rješenje koje koristi Fourierove koeficijente.

U napomeni 1.3.11 bili smo rekli kako izgledaju Fourierovi koeficijenti funkcije $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\tau/2, \tau/2])$ proširene po periodičnosti s periodom τ. Zapravo trebamo samo koeficijente $b_k = b_k(f)$ za $k \in \mathbb{N}$, a oni su dani sa

$$b_k(f) = \frac{2}{\tau}\int_{[-\tau/2,\tau/2]} f(x)\sin\frac{2\pi kx}{\tau}\,dx.$$

Fourierovi koeficijenti imaju smisla i za dvodimenzionalne funkcije $F \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([-\tau/2, \tau/2]^2)$. Tako su naprimjer njezini "sinusni" koeficijenti dani dvostrukim integralom

$$B_{k,l}(F) := \frac{4}{\tau^2} \int_{[-\tau/2,\tau/2]^2} F(x,y) \sin \frac{2\pi kx}{\tau} \sin \frac{2\pi ly}{\tau} \, dx \, dy$$

za svake $k, l \in \mathbb{N}$. Očigledno $B_{k,l}(F)$ linearno ovise o F.

Pretpostavimo da je τ prirodan broj. Nadalje, uzmimo neki interval $[\alpha, \beta] \subseteq [-\tau/2, \tau/2]$ i računajmo baš koeficijent b_τ karakteristične funkcije tog intervala:

$$b_\tau(\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}) = \frac{2}{\tau} \int_\alpha^\beta \sin 2\pi x \, dx = -\frac{\cos 2\pi\beta - \cos 2\pi\alpha}{\pi\tau} = \frac{2 \sin \pi(\beta - \alpha) \sin \pi(\alpha + \beta)}{\pi\tau}.$$

Ako je sada $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subseteq [-\tau/2, \tau/2]^2$ neki pravokutnik, tada je

$$B_{\tau,\tau}(\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]}) = b_\tau(\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}) b_\tau(\mathbb{1}_{[\gamma,\delta]}) = \frac{4}{\pi^2\tau^2} \sin \pi(\beta-\alpha) \sin \pi(\alpha+\beta) \sin \pi(\delta-\gamma) \sin \pi(\gamma+\delta).$$

Posebno primijetimo

$$\begin{aligned} \beta - \alpha \in \mathbb{Z} \text{ ili } \delta - \gamma \in \mathbb{Z} \quad &\Longrightarrow \quad \sin \pi(\beta - \alpha) = 0 \text{ ili } \sin \pi(\delta - \gamma) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad B_{\tau,\tau}(\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]}) = 0. \end{aligned}$$

Neka je sada veliki pravokutnik smješten u koordinatni sustav tako da postane $[0, a] \times [0, b]$ za neke $a, b > 0$. Uzmimo prirodni broj τ veći od $2a$ i $2b$. Pretpostavimo da je $[0, a] \times [0, b]$ popločan pravokutnicima $I_k \times J_k$, $k = 1, \ldots, n$, te da, za svaki k, barem jedan od intervala I_k, J_k ima stranicu čija duljina je cijeli broj. Po prethodnom znamo da vrijedi

$$B_{\tau,\tau}(\mathbb{1}_{I_k\times J_k}) = 0 \quad \text{za } k = 1, \ldots, n,$$

a aditivnost Fourierovih koeficijenata i

$$\mathbb{1}_{[0,a]\times[0,b]} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{I_k\times J_k} \quad \text{g.s.}$$

potom daju

$$B_{\tau,\tau}(\mathbb{1}_{[0,a]\times[0,b]}) = 0.$$

Iz prethodnog računa slijedi

$$\sin^2 \pi a \sin^2 \pi b = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin \pi a = 0 \text{ ili } \sin \pi b = 0,$$

što je moguće jedino ako je neki od brojeva a, b cijeli.

Napomenimo, kao zanimljivost, da je u članku

> Stan Wagon, *Fourteen Proofs of a Result About Tiling a Rectangle*, The American Mathematical Monthly, Vol. 94, No. 7, (Aug. - Sep., 1987), pp. 601–617.

dano čak 14 različitih dokaza navedenog rezultata.

2.4 Ekvidistribuiranost nizova

Pisat ćemo $x \bmod 1$ za $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1\rangle$, tj. za "ostatak" od x nakon oduzimanja prvog lijevog cijelog broja. Prirodno pitanje je sljedeće.

Koji nizovi realnih brojeva $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ izračunati modulo 1 "ravnomjerno" obilaze $\mathbb{T} \equiv [0,1\rangle$?

Pokazuje se da gornje pitanje ima vrlo netrivijalan odgovor, no prije svega treba definirati "ravnomjernost". Naš glavni rezultat pokazuje da je nekoliko vrlo prirodnih definicija međusobno ekvivalentno.

Teorem 2.4.1 (Weylov kriterij)**.** *Za niz realnih brojeva $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ekvivalentne su sljedeće tvrdnje.*

(a) Za svaku neprekidnu 1-periodičnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_0^1 f(x)dx.$$

(b) Za svaki interval $[a,b\rangle \subseteq [0,1\rangle$ vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{card}\{k \in \{0,1,\ldots,n-1\} : x_k \bmod 1 \in [a,b\rangle\}}{n} = b-a.$$

(c) Za svaku 1-periodičnu funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Riemann-integrabilnu na $[0,1]$ vrijedi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_0^1 f(x)dx.$$

(d) Za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m x_k} = 0.$

U tom slučaju kažemo da je niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran modulo 1.

Dokaz. Dokazat ćemo
$$\text{(a)} \implies \text{(b)} \implies \text{(c)} \implies \text{(d)} \implies \text{(a)}.$$

(a) $\implies$ (b): Ako uzmemo $f = \mathbb{1}_{[a,b\rangle}$ i proširimo ju po periodičnosti na cijeli $\mathbb{R}$, tada imamo
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[a,b\rangle}(x_k \bmod 1) = \operatorname{card}\{0 \leqslant k \leqslant n-1 : x_k \bmod 1 \in [a,b\rangle\}$$
i
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \mathbb{1}_{[a,b\rangle}(x)dx = b-a$$
pa bi tvrdnja slijedila kada bismo pretpostavku (a) mogli primijeniti na funkciju f. Ipak, ta funkcija nije neprekidna čim je $[a,b\rangle \neq [0,1\rangle$.

Zato uzmimo $\varepsilon > 0$ i neke neprekidne 1-periodične funkcije g i h takve da je $0 \leqslant g \leqslant f \leqslant h \leqslant 1$ i da vrijedi $\int_0^1 h(x)dx - \int_0^1 g(x)dx < \varepsilon$. Primjenom pretpostavke (a) na g i h dobivamo
$$\int_0^1 g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$
$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(x_k) = \int_0^1 h(x)dx,$$

a imamo i

$$\int_0^1 g(x)dx \leqslant \int_0^1 f(x)dx \leqslant \int_0^1 h(x)dx.$$

Slijedi da se svaka dva od brojeva

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \quad \int_0^1 f(x)dx$$

razlikuju za manje od ε. Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, odavde slijedi

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_0^1 f(x)dx$$

pa postoji odgovarajući limes i on je jednak $\int_0^1 f(x)dx$.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Uzmimo proizvoljnu subdiviziju $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_{J-1} < c_J = 1$, za $j = 1, 2, \ldots, J$ označimo

$$m_j := \inf\{f(x) : x \in [c_{j-1}, c_j]\}, \quad M_j := \sup\{f(x) : x \in [c_{j-1}, c_j]\}$$

te konačno definirajmo funkcije

$$g := \sum_{j=1}^{J} m_j \mathbb{1}_{[c_{j-1}, c_j\rangle}, \quad h := \sum_{j=1}^{J} M_j \mathbb{1}_{[c_{j-1}, c_j\rangle}$$

i proširimo ih na $\mathbb{R}$ po 1-periodičnosti. Prema pretpostavci (b) primijenjenoj na svaki interval $[a, b\rangle = [c_{j-1}, c_j\rangle$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[c_{j-1}, c_j\rangle}(x_k \bmod 1) = c_j - c_{j-1}$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h(x_k) = \sum_{j=1}^{J} M_j(c_j - c_{j-1})$$

te potom

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h(x_k) = \sum_{j=1}^{J} M_j(c_j - c_{j-1}).$$

Sasvim analogno dobivamo

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \geqslant \sum_{j=1}^{J} m_j(c_j - c_{j-1}).$$

Zbog Riemann-integrabilnosti od f za svaki $\varepsilon > 0$ smo mogli odabrati subdiviziju takvu da je razlika gornje i donje Darbouxove sume manja od ε:

$$\sum_{j=1}^{J} M_j(c_j - c_{j-1}) - \sum_{j=1}^{J} m_j(c_j - c_{j-1}) < \varepsilon.$$

Tada se brojevi

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \quad \int_0^1 f(x)dx$$

svi međusobno razlikuju za manje od ε pa tvrdnja slijedi iz proizvoljnosti od $\varepsilon > 0$.

(c) $\Longrightarrow$ (d): Trivijalno uzimajući $f(x) = e^{2\pi imx}$. Primijetimo da je integral te funkcije jednak 0.

(d) $\Longrightarrow$ (a): Najprije pretpostavimo da je f trigonometrijski polinom,

$$f = \sum_{m=-M}^{M} c_m e_m.$$

za neke $M \in \mathbb{N}$ i $c_m \in \mathbb{C}$. U tom slučaju je

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{m=-M}^{M} c_m\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi imx_k}\Big)$$

$$= c_0 + \sum_{m=1}^{M} c_m\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi imx_k}\Big) + \sum_{m=1}^{M} c_{-m}\overline{\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi imx_k}\Big)}.$$

Dakle, po pretpostavci (d) imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = c_0 = \hat{f}(0) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Neka je sada f proizvoljna neprekidna 1-periodična funkcija i uzmimo $\varepsilon > 0$. Jednostavnom primjenom Fejérovog teorema o uniformnoj konvergenciji slijedi da postoji trigonometrijski polinom g takav da je $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$. Imamo

$$\limsup_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - \int_0^1 f(x)dx\Big| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|f(x_k) - g(x_k)|}_{<\varepsilon}$$

$$+ \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) - \int_0^1 g(x)dx\Big|}_{=0 \text{ po prethodnom}} + \int_0^1 \underbrace{|g(x) - f(x)|}_{<\varepsilon} dx < 2\varepsilon.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, slijedi

$$\limsup_{n\to\infty} \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - \int_0^1 f(x)dx\Big| = 0$$

pa i limes tog niza postoji i jednak je 0. Q.E.D.

Dokazani kriterij je najkorisniji upravo zato što provjeru ekvidistribuiranosti svodi na ocjenjivanje tzv. eksponencijalnih suma $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi imx_k}$.

Zadatak 2.4.1. Za svake $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ i $\beta \in \mathbb{R}$ dokažite da je niz $(\alpha n + \beta)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran modulo 1.

Rješenje. Provjeravamo svojstvo (d) iz Weylovog kriterija. Ako je $x_k = \alpha k + \beta$, tada za svaki $m \in \mathbb{N}$ imamo

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m x_k} = e^{2\pi i m\beta}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{2\pi i m\alpha})^k = e^{2\pi i m\beta}\frac{e^{2\pi i m n\alpha}-1}{n(e^{2\pi i m\alpha}-1)}.$$

Ovdje smo koristili da je $e^{2\pi i m\alpha} \neq 1$, jer $m\alpha$ ne može biti cijeli broj obzirom da je α iracionalan. Kako je

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m x_k}\Big| \leqslant \frac{2}{n|e^{2\pi i m\alpha}-1|},$$

po teoremu o sendviču zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m x_k} = 0$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$. Dakle, niz $(x_n)_{n=0}^{\infty} = (\alpha n + \beta)_{n=0}^{\infty}$ je ekvidistribuiran modulo 1.

Kada imamo velike količine podataka s vrijednostima u skupu $\langle 0, +\infty\rangle$ kod kojih nema restrikcije obzirom na red veličine (dobar primjer su veličine datoteka na tvrdom disku), tada je uočena sljedeća pravilnost, nazvana *Benfordov zakon*: Otprilike 30% podataka počinje znamenkom 1. Kako objasniti taj fenomen? On, naravno, ovisi o nizu podataka koje gledamo. Usredotočimo se recimo samo na potencije broja 2:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots.$$

Broj 2^k ($k \in \mathbb{N}_0$) počinje znamenkom 1 ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & 10^l \leqslant 2^k < 2\cdot 10^l \quad \text{za neki } l \in \mathbb{Z} \\ \iff \quad & l \leqslant k\log_{10} 2 < l + \log_{10} 2 \quad \text{za neki } l \in \mathbb{Z} \\ \iff \quad & (k\log_{10} 2) \bmod 1 \in [0, \log_{10} 2\rangle. \end{aligned}$$

Kako je $\alpha = \log_{10} 2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, zadatak 2.4.1 i svojstvo (b) iz Weylovog kriterija daju

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{card}\big\{k \in \{0,1,\ldots,n-1\} : 2^k \text{ počinje znamenkom } 1\big\}}{n} \\ & = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{card}\big\{k \in \{0,1,\ldots,n-1\} : (k\log_{10} 2) \bmod 1 \in [0,\log_{10} 2\rangle\big\}}{n} \\ & = \log_{10} 2 \approx 0.30103. \end{aligned}$$

Zadatak 2.4.2. Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dokažite da je niz $(\alpha n^2)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran modulo 1.

Rješenje. Opet provjeravamo svojstvo (d) iz Weylovog kriterija. Uzimimo prirodne brojeve m, h, n takve da je $h \leqslant n$.

$$\begin{aligned} & \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m\alpha k^2} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h} e^{2\pi i m\alpha(k+l)^2}\Big| \\ & = \frac{1}{n}\Big|\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m\alpha k^2} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m\alpha(k+l)^2}\Big)\Big| \end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\max_{1\leqslant l\leqslant h}\Big(\underbrace{\Big|\sum_{k=0}^{l-1} e^{2\pi i m\alpha k^2}\Big|}_{\leqslant l}+\underbrace{\Big|\sum_{k=n}^{n+l-1} e^{2\pi i m\alpha k^2}\Big|}_{\leqslant l}\Big) \leqslant \frac{2h}{n}$$

U daljnjem radimo s dvostrukom sumom.

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h} e^{2\pi i m\alpha(k+l)^2}\Big|^2 \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big|\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h} e^{2\pi i m\alpha(k+l)^2}\Big|^2$$

$$\text{korištenje } |z|^2 = z\overline{z}$$

$$= \frac{1}{h^2 n}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ 1\leqslant l\leqslant h}} 1 + \frac{2}{h^2 n}\mathrm{Re}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ 1\leqslant l<l'\leqslant h}} e^{2\pi i m\alpha((k+l')^2-(k+l)^2)}$$

$$= \frac{1}{h} + \frac{2}{h^2 n}\mathrm{Re}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ 1\leqslant l<l'\leqslant h}} e^{2\pi i m\alpha(l'-l)(2k+l'+l)}$$

Zamjenom indeksâ sumacije ($d = l' - l$, $q = k + l$) posljednji izraz prelazi u sljedeći.

$$\frac{1}{h} + \frac{2}{h^2 n}\mathrm{Re}\sum_{\substack{l,d\geqslant 1,\ l+d\leqslant h\\ l\leqslant q\leqslant n+l-1}} e^{2\pi i m\alpha d(2q+d)}$$

$$\leqslant \frac{1}{h} + \frac{2}{h^2 n}\mathrm{Re}\sum_{\substack{l,d\geqslant 1,\ l+d\leqslant h\\ 0\leqslant q\leqslant n-1}} e^{2\pi i m\alpha d(2q+d)} + \frac{2}{h^2 n}\underbrace{\sum_{l=1}^{h}(h-l)2l}_{\leqslant 2h^3}$$

$$= \frac{1}{h} + \frac{4h}{n} + \frac{2}{h^2 n}\mathrm{Re}\sum_{d=1}^{h}(h-d)e^{2\pi i m\alpha d^2}\sum_{q=0}^{n-1} e^{4\pi i m\alpha d q}$$

$$\leqslant \frac{1}{h} + \frac{4h}{n} + \frac{2}{h^2 n}\sum_{d=1}^{h}(\underbrace{h-d}_{\leqslant h})\Big|\frac{1-e^{4\pi i m\alpha d n}}{1-e^{4\pi i m\alpha d}}\Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{h} + \frac{4h}{n} + \frac{4}{hn}\sum_{d=1}^{h}\frac{1}{|1-e^{4\pi i m\alpha d}|}$$

Vidimo da je limes gornjeg izraza kada $n \to \infty$ jednak $1/h$ pa smo dobili

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m\alpha k^2}\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Konačno, puštanjem $h \to \infty$ zaključujemo

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m\alpha k^2}\Big| = 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m\alpha k^2} = 0$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$.

Trik "snižavanja stupnja polinoma" iz prethodnog rješenja se nekad zove *van der Corputov trik* i njime se općenitije može pokazati ekvidistribuiranost polinomijalnih nizova s iracionalnim vodećim koeficijentom. Zapravo, ekvidistribuirani modulo 1 su svi nizovi $(P(n))_{n=0}^{\infty}$, pri čemu je P polinom s barem jednim iracionalnim nekonstantnim koeficijentom.

2.5 Provođenje topline po kružnoj žici

Ovaj primjer je povijesno zanimljiv jer je motivirao i samog Fouriera. Uzmimo kružnu žicu po kojoj promatramo širenje topline. U početnom trenutku $t = 0$ temperatura je opisana funkcijom $x \mapsto f(x)$. Raspodjela topline u trenutku $t > 0$ će biti označena $x \mapsto u(x,t)$. Žicu možemo poistovjetiti s kružnicom $\mathbb{S}^1$ na koju je opet još praktičnije gledati kao na torus $\mathbb{T}$. Dakle, postavlja se sljedeći problem: za danu realnu funkciju $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ treba naći funkciju

$$u\colon \mathbb{T} \times \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto u(x,t)$$

takvu da vrijedi

(i) $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{T} \times \langle 0, +\infty\rangle)$,

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ za svake $x \in \mathbb{T}$, $t \in \langle 0, +\infty\rangle$ (jednadžba provođenja),

(iii) $\lim\limits_{t\to 0+} \max\limits_{x\in\mathbb{T}} |u(x,t) - f(x)| = 0$ (početni uvjet).

(Fizikalno su nam dovoljne realne funkcije, ali sve će vrijediti i za kompleksne f i u.)

Najprije pretpostavimo da takva funkcija u postoji i pokušajmo doći do njene formule. Ideja je da za svaki $t > 0$ uzmemo Fourierov razvoj funkcije $x \mapsto u(x,t)$, tj.

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e_n(x),$$

pri čemu je $c_n(t) = \int_{\mathbb{T}} u(x,t)\overline{e_n(x)}dx$, podrazumijevamo da $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ znači $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N}$, a konvergencija se shvaća po točkama (što je u redu, jer je funkcija klase C^1 pa za fiksirani $t > 0$ vrijedi čak uniformna konvergencija po $x \in \mathbb{T}$). Sada za $n \in \mathbb{Z}$ i $t > 0$ računamo (uz pomoć parcijalne integracije):

$$\frac{d}{dt}c_n(t) \overset{\text{zad. 1.1.6 (b)}}{=} \int_0^1 \Big(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big)e^{-2\pi inx}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\Big)e^{-2\pi inx}dx$$

$$\overset{\text{parc. int.}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1 u(x,t)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-2\pi inx}\Big)dx = -2\pi^2 n^2 \int_0^1 u(x,t)e^{-2\pi inx}dx = -2\pi^2 n^2 c_n(t).$$

Napomenimo da smo u prvoj jednakosti smjeli zamijeniti derivaciju i integral jer za svaki segment $[a,b] \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$ zbog neprekidnosti parcijalne derivacije imamo

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{T}\\ t\in[a,b]}} \Big|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\Big| < +\infty$$

pa se na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ može iskoristiti zadatak 1.1.6(b). Rješavanjem gornje obične diferencijalne jednadžbe dobivamo

$$c_n(t) = C_n e^{-2\pi^2 n^2 t} \quad \text{za svaki } t > 0,$$

pri čemu je $C_n \in \mathbb{C}$ neka konstanta. Zbog

$$|c_n(t) - \hat{f}(n)| = \Big|\int_{\mathbb{T}} \big(u(x,t) - f(x)\big)\overline{e_n(x)}dx\Big| \leqslant \int_{\mathbb{T}} \big|u(x,t) - f(x)\big|dx \leqslant \max_{x\in\mathbb{T}} \big|u(x,t) - f(x)\big|$$

i početnog uvjeta (iii) imamo

$$\hat{f}(n) = \lim_{t\to 0+} c_n(t) = C_n$$

pa slijedi

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{-2\pi^2 n^2 t} e_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi^2 n^2 t} e_n(x) \int_{\mathbb{T}} f(y)\overline{e_n(y)}dy$$

$$\stackrel{\text{LTDK}}{=} \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi^2 n^2 t} e_n(x-y) \Big) f(y)dy.$$

Pritom smo smjeli zamijeniti sumu reda i integral, jer je

$$\int_{\mathbb{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big| e^{-2\pi^2 n^2 t} e_n(x-y) f(y) \big| dy = \|f\|_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi^2 n^2 t} < +\infty$$

pa su sve parcijalne sume ograničene integrabilnom funkcijom. Korisno je označiti

$$G \colon \mathbb{T} \times \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R},$$

$$G(x,t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2 n^2 t} e_n(x),$$

jer tada vrijedi

$$u(\cdot, t) = G(\cdot, t) * f. \tag{2.1}$$

(Red koji definira $G(x,t)$ konvergira apsolutno pa poredak sumacije nije važan, a realne vrijednosti poprima radi simetrije koeficijenata i $e_n(x) + e_{-n}(x) = 2\cos(2\pi n x) \in \mathbb{R}$.) Funkciju G nazivamo *Greenova funkcija* za problem (i)–(iii). Provjerit ćemo da i ona sama zadovoljava uvjete (i) i (ii) pa ju nazivamo *fundamentalnim rješenjem.* Možemo ju interpretirati kao raspodjelu topline ako je početna raspodjela bila dana Diracovom mjerom koncentriranom u točki 0.

Zadatak 2.5.1. Dokažite da za svaki $t > 0$ vrijedi $\int_{\mathbb{T}} G(x,t)dx = 1$. Nadalje, dokažite da je $G \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{T} \times \langle 0, +\infty \rangle)$ i da zadovoljava jednadžbu provođenja (ii).

Rješenje. Fiksirajmo segment $[a,b] \subseteq \langle 0, +\infty \rangle$. Zbog Weierstrassovog kriterija uz

$$M_n = \max_{t\in[a,b]} e^{-2\pi^2 n^2 t} = e^{-2\pi^2 n^2 a}$$

vidimo da red koji definira $G(x,t)$ konvergira uniformno po $(x,t) \in \mathbb{T} \times [a,b]$ pa ga radi napomene 1.7.8(a) za fiksni $t \in [a,b]$ možemo integrirati član-po-član:

$$\int_{\mathbb{T}} G(x,t)dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2 n^2 t} \underbrace{\int_{\mathbb{T}} e_n(x)dx}_{=1 \text{ za } n=0;\ =0 \text{ inače}} = 1.$$

Kako je (M_n) niz koji "trne" brže od bilo kojeg polinoma, opet po Weierstrassovom kriteriju vidimo da za svake $k, l \in \mathbb{N}_0$ uniformno konvergiraju redovi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^l}{\partial x^l} e^{-2\pi^2 n^2 t} e_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-2\pi^2 n^2)^k (2\pi i n)^l e^{-2\pi^2 n^2 t} e_n(x).$$

Napomena 1.7.8(b) kaže da je tada G funkcija klase C^∞ i da se njene parcijalne derivacije mogu računati deriviranjem definirajućeg reda član-po-član. Obzirom da za svaki fiksirani n funkcija $(x,t) \mapsto e^{-2\pi^2 n^2 t} e_n(x)$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu iz (ii):

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-2\pi^2 n^2 t + 2\pi i n x} = -2\pi^2 n^2 e^{-2\pi^2 n^2 t + 2\pi i n x} = \frac{1}{2}(2\pi i n)^2 e^{-2\pi^2 n^2 t + 2\pi i n x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-2\pi^2 n^2 t + 2\pi i n x},$$

deriviranjem član-po-član slijedi da isto vrijedi i za G.

Sljedeći teorem konačno govori o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja našeg problema. U sklopu njegovog dokaza usput ćemo pokazati i da je G nenegativna, tj. da za svake $x \in \mathbb{T}$, $t > 0$ vrijedi $G(x,t) \geqslant 0$.

Teorem 2.5.1. *Ako je $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$, tada problem* (i)–(iii) *ima jedinstveno rješenje i ono je dano formulom* (2.1).

Dokaz. Izvod kojeg smo proveli na početku odjeljka pokazuje da, ako imamo rješenje, tada ono mora biti oblika (2.1). Preostaje dokazati da je formulom (2.1) doista dano rješenje problema. Višestrukim korištenjem zadatka 1.1.6(b) proizlazi da je u klase C^∞ (kojoj se parcijalne derivacije računaju deriviranjem podintegralne funkcije) i da također zadovoljava jednadžbu provođenja:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{T}} G(x-y,t)f(y)dy = \int_{\mathbb{T}} \frac{\partial}{\partial t} G(x-y,t)f(y)dy$$

$$\overset{\text{zad. 2.5.1}}{=} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x-y,t)f(y)dy = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

Preostaje još jedino provjeriti početni uvjet (iii). Ukoliko je $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{T})$, to slijedi iz

$$\max_{x\in\mathbb{T}} |u(x,t) - f(x)| = \max_{x\in\mathbb{T}} \Big| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{-2\pi^2 n^2 t} e_n(x) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e_n(x) \Big|$$

$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| \left|1 - e^{-2\pi^2 n^2 t}\right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Big| \frac{1}{(2\pi i n)^2} \widehat{f''}(n) \Big| \left|1 - e^{-2\pi^2 n^2 t}\right|$$

$$\leqslant \|f''\|_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\left|1 - e^{-2\pi^2 n^2 t}\right|}{(2\pi n)^2}.$$

Naime, primijetimo da $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|1-e^{-2\pi^2 n^2 t}|}{(2\pi n)^2} \to 0$ kada $t \to 0+$ zbog uniformne konvergencije tog reda funkcija po $t \in [0, +\infty\rangle$.

Sada provjerimo $G \geqslant 0$. Najprije tvrdimo da, ako je $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{T})$ i $f \geqslant 0$, tada mora biti $u \geqslant 0$. Naime, pretpostavimo $u(x_0, t_0) < 0$ za neke $x_0 \in \mathbb{T}$, $t_0 > 0$. Prema netom dokazanom funkcija

$$v\colon \mathbb{T} \times [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}, \quad v(x,t) := e^{-t} \cdot \begin{cases} u(x,t) & \text{za } t > 0, \\ f(x) & \text{za } t = 0 \end{cases}$$

je neprekidna na $\mathbb{T} \times [0,+\infty\rangle$ i klase C^∞ na $\mathbb{T} \times \langle 0,+\infty\rangle$. Njezin minimum na $\mathbb{T} \times [0, t_0]$ se postiže u nekoj točki (x_1, t_1), $0 < t_1 \leqslant t_0$ i označimo $\alpha := v(x_1,t_1) < 0$. Promatrajući lijevu derivaciju u t_1 i drugu derivaciju u x_1 (nužni uvjet za lokalni minimum) te koristeći jednadžbu (ii) zaključujemo

$$0 \geqslant \frac{\partial v}{\partial t}(x_1,t_1) = -e^{-t_1} u(x_1,t_1) + e^{-t_1} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1,t_1)$$

$$= -v(x_1,t_1) + e^{-t_1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1,t_1)$$

$$= -\alpha + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1,t_1)}_{\geqslant 0} \geqslant -\alpha > 0.$$

To nas je dovelo do kontradikcije pa mora biti $u \geqslant 0$. Sada uzimajući za f trigonometrijske polinome $T_{\delta,\eta}$ iz leme 1.3.1 istim dokazom kao od propozicije 1.3.2 (samo što je f zamijenjena s $G(\cdot,t)$ za fiksirani $t > 0$) dobivamo $G \geqslant 0$.

Konačno, uzmimo $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ i neki niz $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ iz $\mathrm{C}^2(\mathbb{T})$ takav da

$$\max_{x\in\mathbb{T}} |f_m(x) - f(x)| \to 0.$$

(Možemo uzeti čak i trigonometrijske polinome; ovdje opet dobro dođe Fejérov teorem o uniformnoj konvergenciji.) Pripadna rješenja problema (i)–(iii) označimo $(u_m)_{m=1}^{\infty}$. Imamo:

$$\max_{x\in\mathbb{T}} |u(x,t) - f(x)| \leqslant \max_{x\in\mathbb{T}} |u(x,t) - u_m(x,t)| + \max_{x\in\mathbb{T}} |u_m(x,t) - f_m(x)| + \max_{x\in\mathbb{T}} |f_m(x) - f(x)|.$$

Treći pribrojnik ide u 0 po odabiru niza $(f_m)_{m=1}^{\infty}$. Drugi pribrojnik ide u 0 po dijelu dokaza za funkcije klase C^2. Prvi pribrojnik ide u 0 radi

$$\begin{aligned}
\max_{x\in\mathbb{T}} |u(x,t) - u_m(x,t)| &= \max_{x\in\mathbb{T}} \Big| \int_{\mathbb{T}} G(x-y,t) f(y) dy - \int_{\mathbb{T}} G(x-y,t) f_m(y) dy \Big| \\
&\leqslant \max_{x\in\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |G(x-y,t)| |f(y) - f_m(y)| dy \\
&\leqslant \Big(\max_{x\in\mathbb{T}} |f_m(x) - f(x)| \Big) \max_{x\in\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \underbrace{G(x-y,t)}_{\text{jer je } \geqslant 0} dy \\
&\overset{\text{zad. 2.5.1}}{=} \max_{x\in\mathbb{T}} |f_m(x) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

2.6 Fourierova transformacija

Želimo analogone Fourierovih koeficijenata za funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koje nisu nužno periodične. Tada više ne možemo očekivati da imamo razvoj pomoću 1-periodičnih eksponencijala $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$.

Neka je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, tj. integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$. Uočimo da je

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[k,k+1\rangle} |f(x)| dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1\rangle} |f(u+k)| du = \int_{[0,1\rangle} \underbrace{\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(u+k)| \Big)}_{\text{g.s. } <+\infty} du,$$

što pokazuje da je tzv. 1-*periodizacija* od f,

$$h(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k),$$

funkcija koja pripada $\mathrm{L}^1(\mathbb{T})$. Naime, za g.s. $u \in [0,1\rangle$ red $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(u+k)$ apsolutno konvergira pa je h dobro definirana u tim točkama. Dakle, ima smisla promatrati Fourierove koeficijente funkcije h:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(n) &= \int_{[0,1\rangle} h(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_{[0,1\rangle} e^{-2\pi i n x} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) \Big) dx \\
&= \int_{[0,1\rangle} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i n (x+k)} f(x+k) \Big) dx \overset{\text{LTDK}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1\rangle} e^{-2\pi i n (x+k)} f(x+k) dx
\end{aligned}$$

$$= [y = x + k] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{[k,k+1\rangle} e^{-2\pi i n y} f(y) dy \overset{\text{LTDK}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i n y} dy.$$

Pritom smo smjeli zamijeniti sumu i integral (tj. iskoristiti LTDK) jer iz prethodnog računa znamo

$$\int_{[0,1\rangle} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(x+k)| \Big) dx < +\infty.$$

Uočimo da se izraz na desnoj strani može izračunati i za brojeve n koji nisu nužno cijeli.

Zato za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i $\xi \in \mathbb{R}$ definiramo

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx.$$

Na taj način smo dobili funkciju $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, koju nazivamo *Fourierovom transformacijom* od f. Naprije ćemo proučiti svojstva ove transformacije $f \mapsto \widehat{f}$, a potom ilustrirati njezinu upotrebljivost.

Zadatak 2.6.1. Dokažite sljedeća svojstva Fourierove transformacije funkcija $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

(a) Linearna je, tj. $(\alpha f + \beta g)\hat{} = \alpha\hat{f} + \beta\hat{g}$ za $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(b) Ako je $g(x) = f(x-c)$ za $c \in \mathbb{R}$, tada je $\hat{g}(\xi) = e^{-2\pi i c\xi}\hat{f}(\xi)$.

(c) Ako je $g(x) = e^{2\pi i c x} f(x)$ za $c \in \mathbb{R}$, tada je $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - c)$.

(d) Ako je $g(x) = \frac{1}{a} f\big(\frac{x}{a}\big)$ za $a \neq 0$, tada je $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(a\xi)$.

(e) Ako je $g(x) = \overline{f(x)}$, tada je $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.

(f) Ako je $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R})$, $f^{(j)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ za $j = 0, 1, \ldots, k$, $f^{(j)} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ za $j = 0, 1, \ldots, k-1$ te $g(x) = f^{(k)}(x) = \big(\frac{d}{dx}\big)^k f(x)$, tada je $\hat{g}(\xi) = (2\pi i\xi)^k \hat{f}(\xi)$.

(g) Ako je $h = f * g$, tada je $\hat{h} = \hat{f}\hat{g}$.

Ovdje $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ označava prostor svih neprekidnih funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takvih da je $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Rješenje. (a) Očigledno po linearnosti integrala.

(b)

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x-c) e^{-2\pi i x\xi} dx = [y = x - c] = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i (y+c)\xi} dy = e^{-2\pi i c\xi}\hat{f}(\xi)$$

(c)

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i c x} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x(\xi - c)} dx = \hat{f}(\xi - c)$$

(d)

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{x}{a}\Big) e^{-2\pi i x\xi} \frac{dx}{a} = [y = x/a] = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i a y\xi} dy = \hat{f}(a\xi)$$

(e)

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} e^{-2\pi i x\xi} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x(-\xi)} dx} = \overline{\hat{f}(-\xi)}$$

(f) Najprije je

$$\widehat{f'}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = \begin{bmatrix} \text{parcijalna integracija} \\ u = e^{-2\pi i x\xi},\ dv = f'(x)dx \end{bmatrix}$$

$$= 2\pi i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = 2\pi i\xi \widehat{f}(\xi).$$

Sada općenita tvrdnja slijedi indukcijom po $k \in \mathbb{N}$.

(g) Ovo je laka posljedica Fubinijevog teorema.

Zadatak 2.6.2. Izračunajte Fourierovu transformaciju funkcije $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$.

Rješenje.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x\xi} dx = \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{-2\pi i\xi}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}}{2\pi i\xi} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$$

Zadatak 2.6.3. (a) Dokažite da za svake $\alpha > 0$ i $\xi \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\alpha x^2 - 2\pi i x\xi} dx = \alpha^{-1/2} e^{-\pi\xi^2/\alpha}.$$

(b) Dokažite da za $f(x) = e^{-\pi x^2}$ vrijedi $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$, tj. ta funkcija je sama svoja Fourierova transformacija.

Rješenje. (a) Označimo lijevu stranu s $I_\alpha(\xi)$. Najprije izračunajmo $I_\alpha(0)$ trikom prelaska na polarne koordinate:

$$I_\alpha(0)^2 = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\alpha x^2} dx\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi\alpha x^2} e^{-\pi\alpha y^2} dxdy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi\alpha(x^2+y^2)} dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{bmatrix} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\pi\alpha r^2} r dr d\phi$$

$$= [s = r^2] = 2\pi \int_0^\infty e^{-\pi\alpha s} \frac{1}{2} ds = \frac{1}{\alpha}.$$

Zato je $I_\alpha(0) = \alpha^{-1/2}$. Nadalje, koristeći parcijalnu integraciju dobivamo:

$$\frac{d}{d\xi} I_\alpha(\xi) \overset{\text{zadatak 1.1.6(b)}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi} e^{-\pi\alpha x^2 - 2\pi i x\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\alpha x^2} e^{-2\pi i x\xi} (-2\pi i x) dx$$

$$= \frac{i}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\alpha x^2} (-2\pi\alpha x) e^{-2\pi i x\xi} dx = \frac{i}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{d}{dx} e^{-\pi\alpha x^2}\Big) e^{-2\pi i x\xi} dx$$

$$\overset{\text{parc. int.}}{=} -\frac{i}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\alpha x^2} \Big(\frac{d}{dx} e^{-2\pi i x\xi}\Big) dx = -\frac{i}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\alpha x^2} e^{-2\pi i x\xi} (-2\pi i\xi) dx = -\frac{2\pi\xi}{\alpha} I_\alpha(\xi).$$

Dakle, imamo diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetom, čije rješavanje daje $I_\alpha(\xi) = \alpha^{-1/2} e^{-\pi\xi^2/\alpha}$.

(b)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2 - 2\pi i x\xi} dx \overset{\text{(a)}}{=} e^{-\pi\xi^2} = f(\xi)$$

Zadatak 2.6.4. Izračunajte Fourierovu transformaciju funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane formulom $f(x) := (4\pi x^2 - 1)\, e^{-\pi x^2}$.

Rješenje. Sličan račun kao gore daje $\hat{f}(\xi) = (-4\pi\xi^2 + 1)\, e^{-\pi\xi^2}$, tj. $\hat{f} = -f$.

Teorem 2.6.1. *Neka je $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ takva da su $x^2 f(x)$ i $x^2 f'(x)$ omeđene na $\mathbb{R}$. Tada f zadovoljava* Poissonovu formulu sumacije, *tj.*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Primijetimo da su pretpostavke teorema svakako ispunjene čim je f klase C^1 i ima kompaktan nosač.

Dokaz. Iz pretpostavke da je $x^2 f(x)$ omeđena slijedi da je periodizacija h od f dobro definirana i neprekidna. Naime, radi

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{x^2} \implies |f(u+k)| \leqslant \frac{C}{(|k|-1)^2} \text{ za } u \in [0,1\rangle,\ k \in \mathbb{Z},\ |k| \geqslant 2$$

red $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(u+k)$ uniformno konvergira. Slično iz pretpostavke da je $x^2 f'(x)$ omeđena slijedi da je i periodizacija $\tilde{h}$ od f' također dobro definirana i neprekidna.

$$\int_0^x \tilde{h}(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^x f'(t+n)dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+x} f'(u)du = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(f(n+x) - f(n)\big) = h(x) - h(0)$$

Odavde slijedi da je h klase C^1 i njena derivacija je upravo $\tilde{h}$. Dakle, Fourierov red od h konvergira uniformno prema h pa ta konvergencija posebno vrijedi i u točki 0:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = h(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{h}(n)e_n(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{h}(n) \overset{\text{račun s početka odjeljka}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$ Q.E.D.

Zadatak 2.6.5. (a) *Theta funkcija* $\theta\colon \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ je definirana sumom

$$\theta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}.$$

Dokažite tzv. *Jacobijevu formulu*:

$$\theta(t) = t^{-1/2}\theta(1/t)$$

za svaki $t > 0$.

(b) *Zeta funkcija* $\zeta\colon \langle 1, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ je definirana redom

$$\zeta(p) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Dokažite

$$\zeta(p) = \frac{\pi^{p/2}}{2\Gamma(p/2)} \int_0^\infty t^{p/2-1}\big(\theta(t) - 1\big)dt,$$

pri čemu je

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty s^{z-1}e^{-s}ds$$

tzv. *gama funkcija*.

Rješenje. (a) Stavimo $f(x) = e^{-\pi t x^2}$ i iskoristimo zadatak 2.6.3(a): $\hat{f}(\xi) = t^{-1/2} e^{-\pi \xi^2/t}$.
Teorem 2.6.1 daje

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = t^{-1/2}\theta(1/t).$$

(b)

$$\begin{aligned}\zeta(p)\Gamma(p/2)\pi^{-p/2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \Big(\frac{s}{n^2\pi}\Big)^{p/2} e^{-s}\frac{ds}{s} = \Big[t = \frac{s}{n^2\pi}\Big] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{p/2} e^{-n^2\pi t}\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} t^{p/2} \Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}}_{=\frac{1}{2}(\theta(t)-1)}\Big)\frac{dt}{t}\end{aligned}$$

Pokazuje se da i ovdje imamo Plancherelov teorem:

- ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, tada je $\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i vrijedi $\|\hat{f}\|_{2,\mathbb{R}} = \|f\|_{2,\mathbb{R}}$,
- ako su $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, tada vrijedi $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{\mathbb{R}} = \langle f, g\rangle_{\mathbb{R}}$.

Zbog navedenog se Fourierova transformacija $f \mapsto \hat{f}$ jedinstveno proširuje s $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ do ograničenog linearnog operatora na Hilbertovom prostoru $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Štoviše, to proširenje čini unitarni operator na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, čiji je inverz $g \mapsto \check{g}$ (tzv. *inverzna Fourierova transformacija*) na gustom potprostoru $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dan formulom

$$\check{g}(x) := \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi.$$

U višim dimenzijama stvari su analogne. Fourierova transformacija funkcije $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ je funkcija $\hat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definirana formulom

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx,$$

pri čemu $x \cdot \xi$ označava standardni skalarni produkt vektora $x, \xi \in \mathbb{R}^d$. Recimo formula iz (d) dijela zadatka 2.6.1 glasi:

$$g(x) := \frac{1}{a^d} f\Big(\frac{1}{a}x\Big),\ x \in \mathbb{R}^d,\ \text{za } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad\Longrightarrow\quad \hat{g}(\xi) = \hat{f}(a\xi). \tag{2.2}$$

Nadalje, konvolucija funkcija $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ je $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ definirana formulom

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \quad \text{za g.s. } x \in \mathbb{R}^d$$

i tada vrijedi

$$(f * g)\hat{}= \hat{f}\hat{g}. \tag{2.3}$$

Ako je pak funkcija $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ klase C^1 i s kompaktnim nosačem, tada za nju opet vrijedi Poissonova formula sumacije:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(n).$$

U $\mathbb{R}^d$ ćemo sa $|\cdot|$ označavati euklidsku normu, tj. za $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ definiramo

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}.$$

2.7 Gaussov kružni problem

U daljnjem tekstu će nam K_R označavati zatvoreni krug oko ishodišta radijusa $R > 0$. Koliko cjelobrojnih točaka on sadrži, tj. koliki je

$$\operatorname{card}(\mathbb{Z}^2 \cap K_R)?$$

Jednostavnim prebrajanjem moguće je dobiti formulu izraženu pomoću sume i funkcije "najveće cijelo":

$$\operatorname{card}(\mathbb{Z}^2 \cap K_R) = 1 + 4\lfloor R \rfloor + 4 \sum_{i=1}^{\lfloor R \rfloor} \lfloor \sqrt{R^2 - i^2} \rfloor,$$

ali nas zanima asimptotsko ponašanje tog izraza kada $R \to +\infty$. Očekujemo da je taj broj za velike R približno jednak površini kruga K_R, ali postavlja se pitanje kojeg reda veličine je greška.

Problem procjenjivanja kardinaliteta presjeka $\mathbb{Z}^2 \cap K_R$ kada $R \to +\infty$ zove se *Gaussov kružni problem.* Slavna slutnja tvrdi da za svaki $\varepsilon > 0$ imamo

$$\operatorname{card}(\mathbb{Z}^2 \cap K_R) = R^2\pi + O(R^{1/2+\varepsilon}), \quad \text{kada } R \to +\infty.$$

Mi ovdje dokazujemo skromniju, a još uvijek netrivijalnu ocjenu, da je "greška aproksimacije" $O(R^{2/3})$, dok je trenutni "rekord" $O(R^{0.62981})$ (M. N. Huxley 2003.). Može se pokazati da greška nije $O(R^{1/2})$; radi toga je slutnja formulirana s ε-om.

Teorem 2.7.1. *Vrijedi sljedeća ocjena za broj cjelobrojnih točaka iz K_R:*

$$\operatorname{card}(\mathbb{Z}^2 \cap K_R) = R^2\pi + O(R^{2/3}), \quad \textit{kada } R \to +\infty,$$

pri čemu $O(R^{2/3})$ stoji umjesto nekog izraza $\rho(R)$ takvog da je $\limsup_{R\to+\infty} \frac{\rho(R)}{R^{2/3}} < +\infty$.

Ostatak odjeljka posvećen je dokazu tog rezultata. U dokazu ćemo trebati ocjenu za Fourierovu transformaciju karakteristične funkcije jediničnog kruga.

Zadatak 2.7.1. Ako $K_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1\}$ označava standardni jedinični krug, dokažite

$$\left|\widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(\xi)\right| \leqslant C(1 + |\xi|)^{-3/2} \tag{2.4}$$

za neku konstantu $C \in \langle 0, +\infty \rangle$ i za svaki $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Iz rješenja ćemo vidjeti da možemo uzeti npr. $C = 40$. Nadalje, može se pokazati da $\widehat{\mathbb{1}}_{K_1}$ nije elementarna funkcija, no dovoljna će biti već samo njezina ocjena (2.4).

Rješenje. Koristeći definiciju Fourierove transformacije na $\mathbb{R}^2$ pa prelazak na polarne koordinate,

$$x = r(\cos\varphi, \sin\varphi), \quad \xi = |\xi|(\cos\theta, \sin\theta),$$

radi 2π-periodičnosti i parnosti funkcije kosinus dobivamo

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(\xi) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i r|\xi|(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta)}\, d\varphi\, r\, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i r|\xi|\cos(\varphi-\theta)}\, d\varphi\, r\, dr \\
&= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i r|\xi|\cos\varphi}\, d\varphi\, r\, dr
\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^1 \int_0^\pi e^{-2\pi i r|\xi|\cos\varphi}\, d\varphi\, r\, dr.$$

Sada supstituiramo

$$t = 2\pi|\xi|\cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{t}{2\pi|\xi|},\ d\varphi = \frac{-dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}$$

pa je

$$\widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(\xi) = 2\int_0^1 \int_{-2\pi|\xi|}^{2\pi|\xi|} e^{-irt}\frac{dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}\, r\, dr$$

$$= 2\int_0^1 \int_{-2\pi|\xi|}^{2\pi|\xi|} \cos(rt)\frac{dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}\, r\, dr - 2i\int_0^1 \int_{-2\pi|\xi|}^{2\pi|\xi|} \sin(rt)\frac{dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}\, r\, dr$$

$$= 4\int_0^1 \int_0^{2\pi|\xi|} \cos(rt)\frac{dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}\, r\, dr$$

$$= 4\int_0^{2\pi|\xi|} \Big(\int_0^1 \cos(rt)\, r\, dr\Big)\frac{dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}},$$

pri čemu smo opet koristili parnost kosinusa te neparnost sinusa. Unutrašnji integral, po r, se može izračunati, što nas vodi na

$$\widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(\xi) = 4\int_0^{2\pi|\xi|} \frac{-1 + \cos t + t\sin t}{t^2}\frac{dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}. \tag{2.5}$$

Konačno počinjemo s ocjenjivanjem. Pretpostavimo $|\xi| \geqslant 2$.

Nakon što primijetimo

$$\frac{-1 + \cos t + t\sin t}{t^2} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1 - \cos t}{t}\Big)$$

i

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}\Big) = \frac{t}{(4\pi^2|\xi|^2 - t^2)^{3/2}}$$

dio integrala (2.5) po $0 \leqslant t \leqslant 2\pi(|\xi| - 1)$ korištenjem formule za parcijalnu integraciju možemo zapisati

$$\int_0^{2\pi(|\xi|-1)} \frac{-1 + \cos t + t\sin t}{t^2}\frac{dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}$$

$$= \frac{1 - \cos 2\pi(|\xi| - 1)}{4\pi^2(|\xi| - 1)\sqrt{2|\xi| - 1}} - \underbrace{\Big(\lim_{t\to 0+}\frac{1 - \cos t}{t}\Big)}_{=0}\frac{1}{2\pi|\xi|} - \int_0^{2\pi(|\xi|-1)} \frac{(1 - \cos t)\, dt}{(4\pi^2|\xi|^2 - t^2)^{3/2}}.$$

Posljednji integral se može ocijeniti

$$\Big|\int_0^{2\pi(|\xi|-1)} \frac{(1 - \cos t)\, dt}{(4\pi^2|\xi|^2 - t^2)^{3/2}}\Big| \leqslant \int_0^{2\pi(|\xi|-1)} \frac{2\, dt}{(4\pi^2|\xi|^2 - t^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{t}{2\pi^2|\xi|^2\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}\Big|_{t=0}^{t=2\pi(|\xi|-1)} = \frac{|\xi| - 1}{2\pi^2|\xi|^2\sqrt{2|\xi| - 1}}.$$

Korištenjem $|\xi| - 1 \geqslant |\xi|/2$, $2|\xi| - 1 \geqslant |\xi|$ sada lako dobivamo

$$\Big|\int_0^{2\pi(|\xi|-1)} \frac{-1 + \cos t + t\sin t}{t^2}\frac{dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2 - t^2}}\Big| \leqslant |\xi|^{-3/2}. \tag{2.6}$$

Dio integrala (2.5) po $2\pi(|\xi|-1) \leqslant t \leqslant 2\pi|\xi|$ ocijenimo

$$\Big|\int_{2\pi(|\xi|-1)}^{2\pi|\xi|} \frac{-1+\cos t + t\sin t}{t^3} \frac{t\,dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2-t^2}}\Big| \leqslant \frac{2\pi|\xi|+2}{8\pi^3(|\xi|-1)^3} \int_{2\pi(|\xi|-1)}^{2\pi|\xi|} \frac{t\,dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2-t^2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{3|\xi|^2} \int_{2\pi(|\xi|-1)}^{2\pi|\xi|} \frac{t\,dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2-t^2}} = -\frac{1}{3|\xi|^2}\sqrt{4\pi^2|\xi|^2-t^2}\Big|_{t=2\pi(|\xi|-1)}^{t=2\pi|\xi|} = \frac{2\pi\sqrt{2|\xi|-1}}{3|\xi|^2},$$

odakle je

$$\Big|\int_{2\pi(|\xi|-1)}^{2\pi|\xi|} \frac{-1+\cos t + t\sin t}{t^2} \frac{dt}{\sqrt{4\pi^2|\xi|^2-t^2}}\Big| \leqslant 4|\xi|^{-3/2}. \tag{2.7}$$

Kombiniranje (2.5), (2.6) i (2.7) daje

$$\big|\widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(\xi)\big| \leqslant 20|\xi|^{-3/2} \leqslant 40(1+|\xi|)^{-3/2}$$

za $|\xi| \geqslant 2$. S druge strane, za $|\xi| < 2$ imamo trivijalnu ocjenu

$$\big|\widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(\xi)\big| \leqslant \lambda(K_1) = \pi \leqslant 40(1+|\xi|)^{-3/2}$$

pa tvrdnja slijedi.

Vratimo se na glavni rezultat. Najprije ćemo nekorektno i pomalo naivno primijeniti dvodimenzionalnu Poissonovu formulu sumacije na $\mathbb{1}_{K_R}$ kako bismo vidjeli što se dobiva i što će trebati izmijeniti.

$$\operatorname{card}(\mathbb{Z}^2 \cap K_R) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} \mathbb{1}_{K_R}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} \widehat{\mathbb{1}}_{K_R}(n)$$

$$\stackrel{(2.2)}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} R^2 \widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(Rn) = R^2\pi + R^2 \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^2\\ n\neq(0,0)}} \widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(Rn)$$

Gore smo upotrijebili $\mathbb{1}_{K_R}(x) = \mathbb{1}_{K_1}(x/R)$, a kod posljednje jednakosti smo koristili $\widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(0,0) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{K_1} = \pi$. Pomoću ocjene (2.4) drugi pribrojnik (tj. greška) se ocjenjuje sa

$$R^2 \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^2\\ n\neq(0,0)}} \frac{C}{(1+|Rn|)^{3/2}}.$$

Osim što smo Poissonovu formulu primijenili na funkciju koja nije čak ni neprekidna, problem ovog pristupa je što posljednja suma divergira.

Postupimo sada malo pažljivije. Ubuduće ćemo pisati $A \lesssim B$ ako je $A \leqslant CB$ za neku (nevažnu) konstantu $C \in \langle 0, +\infty\rangle$. Neka je φ nenegativna funkcija klase C^∞ koja iščezava izvan kruga K_1 i ima integral jednak 1. Imamo $|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant \|\varphi\|_{1,\mathbb{R}} = 1$, a parcijalnom integracijom se dobiva i $|\widehat{\varphi}(\xi)| \lesssim |\xi|^{-1}$ pa je $|\widehat{\varphi}(\xi)| \lesssim (1+|\xi|)^{-1}$. Uzmimo $R > 2$, $0 < \delta < 1$ i stavimo $\varphi_\delta(x) := \frac{1}{\delta^2}\varphi(\frac{1}{\delta}x)$ te primijetimo da φ_δ iščezava izvan K_δ i da još uvijek ima integral jednak 1. Primijenimo Poissonovu formulu sumacije na funkciju $\mathbb{1}_{K_R} * \varphi_\delta$, za koju se može vidjeti da je čak klase C^∞.

$$F(R,\delta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} (\mathbb{1}_{K_R} * \varphi_\delta)(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^2} (\mathbb{1}_{K_R} * \varphi_\delta)\widehat{}(n) \stackrel{(2.3),(2.2)}{=} R^2\pi + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^2\\ n\neq(0,0)}} R^2 \widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(Rn)\widehat{\varphi}(\delta n)$$

Pritom smo koristili $\widehat{\mathbb{1}}_{K_1}(0,0) = \pi$ i $\widehat{\varphi}(0,0) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi = 1$. Drugi pribrojnik je greška koju za početak kontroliramo korištenjem ocjene (2.4) sa:

$$\lesssim \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^2\\ n\neq(0,0)}} \frac{R^2}{(1+|Rn|)^{3/2}(1+|\delta n|)}.$$

Dio te sume kada $n \in \mathbb{Z}^2$ ima jednu koordinatu jednaku 0 je

$$\lesssim 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{R^2}{(Rm)^{3/2}} \lesssim R^{1/2}.$$

Preostali dio sume se može shvatiti kao Riemannova suma po kvadratima s duljinom stranice R i radi radijalne monotonosti dade ocijeniti integralom

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx}{(1+|x|)^{3/2}(1+\delta|x|/R)} = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{rdr}{(1+r)^{3/2}(1+\delta r/R)} \\
&\lesssim \underbrace{\int_0^1 rdr}_{\lesssim 1} + \underbrace{\int_1^{R/\delta} \frac{dr}{r^{1/2}}}_{\lesssim (R/\delta)^{1/2}} + \underbrace{\frac{R}{\delta}\int_{R/\delta}^{+\infty} \frac{dr}{r^{3/2}}}_{\lesssim (R/\delta)^{1/2}} \lesssim \Big(\frac{R}{\delta}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo

$$\big|F(R,\delta) - R^2\pi\big| \lesssim \Big(\frac{R}{\delta}\Big)^{1/2}.$$

Sada primijetimo da za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$(\mathbb{1}_{K_R} * \varphi_\delta)(x) = \int_{K_R} \varphi_\delta(x-y)dy = \int_{x-K_R} \varphi_\delta(y)dy = \begin{cases} = 1 & \text{za } |x| \leqslant R-\delta, \\ \in [0,1] & \text{za } R-\delta < |x| < R+\delta, \\ = 0 & \text{za } |x| \geqslant R+\delta. \end{cases}$$

Odavde slijedi

$$F(R-\delta,\delta) \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Z}^2 \cap K_R) \leqslant F(R+\delta,\delta).$$

Kako je

$$|(R\pm\delta)^2\pi - R^2\pi| \lesssim R\delta,$$

konačno imamo

$$\big|\operatorname{card}(\mathbb{Z}^2 \cap K_R) - R^2\pi\big| \lesssim R\delta + \Big(\frac{R}{\delta}\Big)^{1/2}.$$

Najpametnije je odabrati $\delta = R^{-1/3}$ jer je tada desna strana $\lesssim R^{2/3}$, što smo i trebali.

2.8 Princip neodređenosti

Neka su x i ξ dvije fizikalno dualne veličine, poput pozicije i momenta kvantne čestice. W. K. Heisenberg je 1927. uočio da obje te veličine ne mogu istovremeno biti po volji dobro lokalizirane. Jedan od modela kvantne fizike pretpostavlja da su pozicija i moment zapravo slučajne varijable pa to znači da ne mogu obje te varijable biti “vrlo koncentrirane” oko svojih očekivanja, tj. imati po volji male standardne devijacije. Tu kvantitativnu i rigoroznu formulaciju su dali E. H. Kennard 1927. i H. Weyl 1928.

Nama će *princip neodređenosti* biti čisto matematički rezultat. Radit ćemo samo s tzv. *Schwartzovim funkcijama*, tj. funkcijama $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ takvima da za svake $m,n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0.$$

Teorem 2.8.1. *Za Schwartzovu funkciju f takvu da je $\|f\|_{2,\mathbb{R}} = 1$ i za svake $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}}(x-x_0)^2|f(x)|^2dx\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}}(\xi-\xi_0)^2|\hat{f}(\xi)|^2d\xi\Big)^{1/2} \geqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Dokaz. Promotrimo novu funkciju

$$g(z) = e^{-2\pi iz\xi_0}f(z+x_0),$$

za koju svojstva Fourierove transformacije iz zadatka 2.6.1 daju

$$\hat{g}(\zeta) = e^{2\pi ix_0(\zeta+\xi_0)}\hat{f}(\zeta+\xi_0).$$

Supstituiranjem

$$z = x - x_0, \quad \zeta = \xi - \xi_0$$

željena nejednakost postaje

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} z^2|g(z)|^2dz\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}}\zeta^2|\hat{g}(\zeta)|^2d\zeta\Big)^{1/2} \geqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Dakle, zapravo smo odmah mogli pretpostaviti da je $x_0 = \xi_0 = 0$.

Definirajmo sljedeća dva linearna operatora:

$$(Xf)(x) := xf(x), \quad (Df)(x) := \frac{1}{2\pi i}f'(x),$$

definirana na Schwartzovim funkcijama. Parcijalna integracija daje

$$\begin{aligned}(Df)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi i}f'(x)e^{-2\pi ix\xi}dx = -\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi i}f(x)\Big(\frac{d}{dx}e^{-2\pi ix\xi}\Big)dx \\ &= \xi\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx = \xi\hat{f}(\xi) = (X\hat{f})(\xi),\end{aligned}$$

tj. $(Df)\widehat{\ } = X\hat{f}$. Osim toga vrijedi

$$(DX - XD)f = \frac{1}{2\pi i}f,$$

što slijedi iz

$$2\pi i(DX-XD)f(x) = \frac{d}{dx}(xf(x)) - xf'(x) = f(x).$$

Konačno primijetimo da je

$$\langle Xf, g\rangle_{\mathbb{R}} = \langle f, Xg\rangle_{\mathbb{R}}, \quad \langle Df, g\rangle_{\mathbb{R}} = \langle f, Dg\rangle_{\mathbb{R}},$$

pri čemu je druga od tih dviju formula opet samo primjena parcijalne integracije.

U ovoj notaciji tražena nejednakost postaje

$$\|Xf\|_{2,\mathbb{R}}\|X\hat{f}\|_{2,\mathbb{R}} \geqslant \frac{1}{4\pi},$$

što je zbog Plancherelovog teorema zapravo

$$\|Xf\|_{2,\mathbb{R}}\|Df\|_{2,\mathbb{R}} \geqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Raspišimo za $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|(\alpha X + iD)f\|_{2,\mathbb{R}}^2 &= \alpha^2\langle Xf, Xf\rangle_{\mathbb{R}} + \alpha i\langle f, (DX - XD)f\rangle_{\mathbb{R}} + \langle Df, Df\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \alpha^2\|Xf\|_{2,\mathbb{R}}^2 - \frac{\alpha}{2\pi}\underbrace{\|f\|_{2,\mathbb{R}}^2}_{=1} + \|Df\|_{2,\mathbb{R}}^2.\end{aligned}$$

Obzirom da je to nenegativna kvadratna funkcija po α, njena diskriminanta je $\mathrm{Dis} \leqslant 0$, a lako očitamo

$$\mathrm{Dis} = \frac{1}{4\pi^2} - 4\|Xf\|_{2,\mathbb{R}}^2\|Df\|_{2,\mathbb{R}}^2.$$

Time dobivamo upravo željenu nejednakost. Q.E.D.

Primijetimo da uz pretpostavke teorema zapravo imamo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = 1, \qquad \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 1$$

pa su $|f|^2$ i $|\hat{f}|^2$ gustoće dviju vjerojatnosnih razdioba. Uzmemo li za brojeve x_0 i ξ_0 upravo očekivanja tih razdioba, teorem daje donju ogradu za produkt njihovih standardnih devijacija:

$$\sigma(|f|^2)\sigma(|\hat{f}|^2) \geqslant \frac{1}{4\pi}.$$

U fizikalnoj formulaciji se na desnoj strani pojavljuje tzv. *(reducirana) Planckova konstanta.*

Zadatak 2.8.1. Dokažite da u nejednakosti teorema 2.8.1 vrijedi jednakost ako i samo ako je funkcija f oblika

$$f(x) = \beta(2\alpha)^{1/4}e^{-\pi\alpha(x-x_0)^2 + 2\pi i x\xi_0}$$

za neke $\alpha > 0$ i $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$.

Rješenje. Supstitucijom kao u dokazu teorema lako opet svodimo na slučaj $x_0 = \xi_0 = 0$. Iz dokaza vidimo da jednakost vrijedi ako i samo ako je diskriminanta $D = 0$, tj. ako i samo ako pripadna kvadratna funkcija ima jednu dvostruku realnu nultočku, što znači da postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $(\alpha X + iD)f \equiv 0$, tj.

$$\alpha x f(x) + \frac{1}{2\pi}f'(x) = 0.$$

Riješimo tu diferencijalnu jednadžbu. Pomnožimo li je s $2\pi e^{\pi\alpha x^2}$ dobit ćemo

$$2\pi\alpha x e^{\pi\alpha x^2}f(x) + e^{\pi\alpha x^2}f'(x) = 0,$$

tj.

$$\frac{d}{dx}\big(e^{\pi\alpha x^2}f(x)\big) = 0,$$

pa postoji konstanta $c \in \mathbb{C}$ takva da je

$$f(x) = ce^{-\pi\alpha x^2}.$$

Da bi ova funkcija trnula u $\pm\infty$ očigledno mora biti $\alpha > 0$, a po zadatku 2.6.3 imamo

$$\|f\|_{2,\mathbb{R}}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = |c|^2\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\alpha x^2}dx = |c|^2(2\alpha)^{-1/2}$$

pa radi uvjeta $\|f\|_{2,\mathbb{R}} = 1$ mora biti $|c| = (2\alpha)^{1/4}$, što nas vodi na traženi oblik.

Poglavlje 3

Fourierova analiza na općenitijim grupama

3.1 Fourierova analiza na konačnim abelovim grupama

Neka je $(\mathbb{A}, +)$ konačna abelova (tj. komutativna) grupa. Poznata je činjenica da je svaka takva grupa izomorfna direktnoj sumi konačno mnogo konačnih cikličkih grupa pa ćemo ubuduće pretpostavljati da je baš

$$\mathbb{A} = \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_n}$$

za neki $n \in \mathbb{N}$ i neke $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pritom nam $\mathbb{Z}_m$ označava grupu ostataka modulo m, tj. $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Elementi od $\mathbb{A}$ su n-torke $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koje se zbrajaju po koordinatama.

Definicija 3.1.1. Karakter *grupe $\mathbb{A}$ je svaki homomorfizam*

$$\xi \colon (\mathbb{A}, +) \to (\mathrm{S}^1, \cdot),$$

pri čemu je $(\mathrm{S}^1, \cdot)$ grupa kompleksnih brojeva modula 1 uz uobičajeno množenje.

Drugim riječima, karakter je funkcija $\xi \colon \mathbb{A} \to \mathrm{S}^1$ koja zadovoljava

$$\xi(x + y) = \xi(x)\xi(y) \quad \text{za svake } x, y \in \mathbb{A}.$$

Svi karakteri od $\mathbb{A}$ čine grupu uz operaciju zbrajanja definiranu kao množenje funkcija po točkama, tj.

$$(\xi + \zeta)(x) := \xi(x)\zeta(x) \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{A}.$$

Tu novu grupu označavamo $\hat{\mathbb{A}}$ i zovemo *dualna grupa* od $\mathbb{A}$.

Teorem 3.1.2. *Svi karakteri grupe $\mathbb{A}$ definirane kao gore su oblika*

$$\xi_a(x) := \left(e^{2\pi i/d_1}\right)^{a_1 x_1} \left(e^{2\pi i/d_2}\right)^{a_2 x_2} \cdots \left(e^{2\pi i/d_n}\right)^{a_n x_n}; \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

za neki $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}$. Posebno, grupe $\hat{\mathbb{A}}$ i $\mathbb{A}$ su izomorfne.

Dokaz. Ideja dokaza je uzeti $\xi \in \hat{\mathbb{A}}$ i primijetiti da za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$ broj $\xi(b_j)$ mora biti d_j-ti korijen iz jedinice, pri čemu su

$$b_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-j})$$

"kanonski" generatori grupe $\mathbb{A}$. Doista,

$$\xi(b_j)^{d_j} = \xi(d_j b_j) = \xi(\mathbf{0}) = 1.$$

Traženi prikaz sada slijedi iz

$$\xi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j b_j\Big) = \prod_{j=1}^{n} \xi(b_j)^{x_j}.$$

Obratno, funkcije dane formulom iz iskaza su očigledno homomorfizmi. Q.E.D.

Zbog ovog teorema često poistovjećujemo dualnu grupu s polaznom, tj. ξ_a identificiramo s a. Svi karakteri su pregledno "upakirani" u preslikavanje (ponekad zvano *bi-karakter*)

$$e\colon \mathbb{A} \times \hat{\mathbb{A}} \to \mathrm{S}^1, \quad e(x, \xi) := \xi(x) \quad \text{za } x \in \mathbb{A},\ \xi \in \hat{\mathbb{A}},$$

koje pak zbog prethodnog teorema i spomenutog poistovjećivanja možemo radije shvatiti kao preslikavanje

$$E\colon \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathrm{S}^1,$$
$$E(x, \xi) := \big(e^{2\pi i/d_1}\big)^{x_1\xi_1} \big(e^{2\pi i/d_2}\big)^{x_2\xi_2} \cdots \big(e^{2\pi i/d_n}\big)^{x_n\xi_n}$$
$$\text{za } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \text{ iz } \mathbb{A}$$

što ćemo ubuduće i činiti. Na ovaj ili onaj način (po apstraktnoj definiciji od e ili po eksplicitnoj formuli za E) su očigledna sljedeća svojstva.

Propozicija 3.1.3.

$$E(x+y, \xi) = E(x, \xi)E(y, \xi), \quad E(x, \xi+\zeta) = E(x, \xi)E(x, \zeta),$$

$$E(\mathbf{0}, \xi) = 1, \quad E(x, \mathbf{0}) = 1, \quad E(-x, \xi) = \overline{E(x, \xi)}, \quad E(x, -\xi) = \overline{E(x, \xi)},$$

$$\sum_{x\in\mathbb{A}} E(x, \xi) = \begin{cases} |\mathbb{A}| & \textit{ako je } \xi = \mathbf{0} \\ 0 & \textit{ako je } \xi \neq \mathbf{0} \end{cases}, \qquad \sum_{\xi\in\mathbb{A}} E(x, \xi) = \begin{cases} |\mathbb{A}| & \textit{ako je } x = \mathbf{0} \\ 0 & \textit{ako je } x \neq \mathbf{0} \end{cases}.$$

Dokaz. Naprimjer, posljednja formula slijedi za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ iz jednakosti

$$\sum_{\xi\in\mathbb{A}} E(x, \xi) = \Big(\sum_{\xi_1=0}^{d_1-1} \big(e^{2\pi i x_1/d_1}\big)^{\xi_1}\Big) \cdots \Big(\sum_{\xi_n=0}^{d_n-1} \big(e^{2\pi i x_n/d_n}\big)^{\xi_n}\Big).$$

Preostaje primijetiti da za $x_j \neq 0$ vrijedi $e^{2\pi i x_j/d_j} \neq 1$ pa formula za parcijalnu sumu geometrijskog reda daje

$$\sum_{\xi_j=0}^{d_j-1} \big(e^{2\pi i x_j/d_j}\big)^{\xi_j} = \frac{1 - e^{2\pi i x_j}}{1 - e^{2\pi i x_j/d_j}} = \frac{1-1}{1 - e^{2\pi i x_j/d_j}} = 0,$$

dok za $x_j = 0$ imamo

$$\sum_{\xi_j=0}^{d_j-1} \big(e^{2\pi i x_j/d_j}\big)^{\xi_j} = \sum_{\xi_j=0}^{d_j-1} 1 = d_j.$$

Produkt "preživi" samo kada je $x_1 = \cdots = x_n = 0$ i tada je jednak $d_1 \cdots d_n = |\mathbb{A}|$. Q.E.D.

Definicija 3.1.4. *Fourierova transformacija funkcije* $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ *je nova funkcija* $\hat{f}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ *definirana formulom*

$$\hat{f}(\xi) := \sum_{x\in\mathbb{A}} f(x)E(x,\xi) \quad \textit{za svaki } \xi \in \mathbb{A}.$$

Zapravo bi bilo prirodnije Fourierovu transformaciju definirati kao funkciju na $\hat{\mathbb{A}}$, ali zbog spomenute identifikacije nema potrebe za tom komplikacijom. Na ovaj način je definicija od $\hat{f}$ sasvim elementarna i može se iskazati bez većine prethodnog uvoda, koji ipak ostaje koristan kao motivacija. Osim toga, prethodna diskusija je na tragu konstrukcija na općenitijim (ne nužno konačnim) abelovim grupama.

Primjer 3.1.1. (a) Ako je $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_4$ i ako funkcije na $\mathbb{A}$ pišemo kao uređene četvorke

$$f = (f_0, f_1, f_2, f_3),$$

tada je

$$\hat{f} = \big(f_0 + f_1 + f_2 + f_3,\ f_0 + if_1 - f_2 - if_3,\ f_0 - f_1 + f_2 - f_3,\ f_0 - if_1 - f_2 + if_3\big).$$

(b) Ako je $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ i ako funkcije na $\mathbb{A}$ pišemo kao uređene četvorke

$$f = (f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}),$$

tada je

$$\hat{f} = \big(f_{00}+f_{01}+f_{10}+f_{11},\ f_{00}-f_{01}+f_{10}-f_{11},\ f_{00}+f_{01}-f_{10}-f_{11},\ f_{00}-f_{01}-f_{10}+f_{11}\big).$$

Neka svojstva Fourierove transformacije su dana u sljedećem teoremu.

Teorem 3.1.5. *(a) Vrijedi sljedeća formula inverzije:*

$$\sum_{\xi\in\mathbb{A}} \hat{f}(\xi)\overline{E(x,\xi)} \;=\; |\mathbb{A}|f(x) \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{A}.$$

Njom se polazna funkcija f *može rekonstruirati iz svoje Fourierove transformacije. Posebno, Fourierova transformacija je injektivna, tj.* $\hat{f} = \hat{g}$ *implicira* $f = g$.

(b) Vrijedi Plancherelov identitet:

$$\sum_{\xi\in\mathbb{A}} |\hat{f}(\xi)|^2 \;=\; |\mathbb{A}| \sum_{x\in\mathbb{A}} |f(x)|^2$$

i općenitije:

$$\sum_{\xi\in\mathbb{A}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} \;=\; |\mathbb{A}| \sum_{x\in\mathbb{A}} f(x)\overline{g(x)}.$$

(c) Ako je funkcija h *definirana kao tzv. konvolucija od* f *i* g,

$$h(x) := \sum_{y\in\mathbb{A}} f(x-y)g(y) \quad \textit{za svaki } x \in \mathbb{A},$$

što pišemo $h = f * g$, *tada vrijedi*

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \quad \textit{za svaki } \xi \in \mathbb{A}.$$

Drugim riječima, Fourierova transformacija prevodi konvoluciju u obični produkt.

(d) Za funkciju $f\colon \mathbb{A}\to\mathbb{C}$ te $y,\zeta\in\mathbb{A}$ definiramo nove funkcije $\mathrm{T}_y f$ i $\mathrm{M}_\zeta f$ formulama

$$(\mathrm{T}_y f)(x) := f(x-y), \qquad (\mathrm{M}_\zeta f)(x) := E(x,\zeta)f(x).$$

Njihove Fourierove transformacije su dane sa

$$(\widehat{\mathrm{T}_y f})(\xi) = E(y,\xi)\hat{f}(\xi), \qquad (\widehat{\mathrm{M}_\zeta f})(\xi) = \hat{f}(\xi+\zeta).$$

(Slova T *i* M *dolaze od riječi "translacije" i "modulacije".)*

(e) Fourierova transformacija je linearna, tj.

$$\widehat{\alpha f+\beta g} = \alpha\hat{f}+\beta\hat{g}.$$

Dokaz. Ostavit ćemo dokaz teorema kao zadatak za domaću zadaću. Naravno da se samo koriste svojstva od E iz propozicije 3.1.3. Q.E.D.

Zadaci za vježbu

Zadatak 3.1.1. Dokažite sve formule iz teorema 3.1.5.

Rješenje. (a)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi\in\mathbb{A}}\hat{f}(\xi)\overline{E(x,\xi)}\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{A}}\sum_{y\in\mathbb{A}} f(y)E(y,\xi)\overline{E(x,\xi)}\\
&= \sum_{y\in\mathbb{A}} f(y)\sum_{\xi\in\mathbb{A}} E(y-x,\xi) = |\mathbb{A}|f(x)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi\in\mathbb{A}}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{A}}\sum_{x,y\in\mathbb{A}} f(x)\overline{g(y)}E(x,\xi)\overline{E(y,\xi)}\\
&= \sum_{x,y\in\mathbb{A}} f(x)\overline{g(y)}\sum_{\xi\in\mathbb{A}} E(x-y,\xi) = |\mathbb{A}|\sum_{x\in\mathbb{A}} f(x)\overline{g(x)}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\xi &= \sum_{x\in\mathbb{A}}\Big(\sum_{y\in\mathbb{A}} f(x-y)g(y)\Big)E(x,\xi)\\
&= \sum_{x,y\in\mathbb{A}} f(x-y)E(x-y,\xi)\ g(y)E(y,\xi)\\
&= \sum_{z,y\in\mathbb{A}} f(z)E(z,\xi)\ g(y)E(y,\xi)\\
&= \Big(\sum_{z\in\mathbb{A}} f(z)E(z,\xi)\Big)\Big(\sum_{y\in\mathbb{A}} g(y)E(y,\xi)\Big) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

(d)

$$(\widehat{\mathrm{T}_y f})(\xi) = \sum_{x\in\mathbb{A}} f(x-y)E(x,\xi) = \sum_{x\in\mathbb{A}} f(x)E(x+y,\xi)$$
$$= \sum_{x\in\mathbb{A}} f(x)E(x,\xi)E(y,\xi) = E(y,\xi)\hat{f}(\xi)$$
$$(\widehat{\mathrm{M}_\zeta f})(\xi) = \sum_{x\in\mathbb{A}} f(x)E(x,\zeta)E(x,\xi)$$
$$= \sum_{x\in\mathbb{A}} f(x)E(x,\zeta+\xi) = \hat{f}(\zeta+\xi)$$

(e)

$$(\widehat{\alpha f+\beta g})(\xi) = \sum_{x\in\mathbb{A}} \big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)E(x,\xi)$$
$$= \alpha\sum_{x\in\mathbb{A}} f(x)E(x,\xi) + \beta\sum_{x\in\mathbb{A}} g(x)E(x,\xi) = \alpha\hat{f}(\xi)+\beta\hat{g}(\xi)$$

Zadatak 3.1.2. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{A}\to\mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\sum_{x\in\mathbb{A}} \big|(f*f)(x)\big|^2 = |\mathbb{A}|\Big(\sum_{x\in\mathbb{A}} |f(x)|^2\Big)^2.$$

(*Napomena*: $f*f$ je konvolucija funkcije f sa samom sobom.)

Rješenje. Lijeva strana je po Plancherelovom identitetu jednaka

$$\frac{1}{|\mathbb{A}|}\sum_{\xi\in\mathbb{A}} |(\widehat{f*f})(\xi)|^2 = \frac{1}{|\mathbb{A}|}\sum_{\xi\in\mathbb{A}} |\hat{f}(\xi)|^4,$$

dok je desna strana

$$\frac{1}{|\mathbb{A}|}\Big(\sum_{\xi\in\mathbb{A}} |\hat{f}(\xi)|^2\Big)^2.$$

Zaključujemo

$$\Big(\sum_{\xi\in\mathbb{A}} |\hat{f}(\xi)|^2\Big)^2 = \sum_{\xi\in\mathbb{A}} |\hat{f}(\xi)|^4,$$

tj.

$$\sum_{\substack{\xi,\zeta\in\mathbb{A}\\ \xi\neq\zeta}} |\hat{f}(\xi)|^2|\hat{f}(\zeta)|^2 = 0.$$

Posljednja jednakost vrijedi točno onda kada je najviše jedan od brojeva $\hat{f}(\zeta)$; $\zeta\in\mathbb{A}$ različit od 0. Formula inverzije daje

$$f(x) = \frac{1}{|\mathbb{A}|}\hat{f}(\zeta)E(x,-\zeta)$$

pa su sve tražene funkcije oblika

$$f(x) = \alpha\, E(x,\xi);\quad x\in\mathbb{A}$$

za neki $\alpha\in\mathbb{C}$ i neki $\xi\in\mathbb{A}$.

Zadatak 3.1.3. Neka je $\omega := e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Dokažite da za svake $a, b, c \in \mathbb{C}$ vrijedi nejednakost

$$\big|a+b+c\big|^3 + \big|a+\omega b+\omega^2 c\big|^3 + \big|a+\omega^2 b+\omega c\big|^3 \;\geqslant\; 3\big(|a|^3+|b|^3+|c|^3\big).$$

(b) Dokažite da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svake $a, b, c \in \mathbb{C}$ vrijedi nejednakost

$$\big|a+b+c\big|^3 + \big|a+\omega b+\omega^2 c\big|^3 + \big|a+\omega^2 b+\omega c\big|^3 \;\geqslant\; 3\big(|a|^3+|b|^3+|c|^3\big) \;+\; \varepsilon|abc|.$$

Rješenje. (a) Plancherelov identitet za funkciju $f = (a, b, c)$ na grupi $\mathbb{Z}_3$ daje

$$\big|a+b+c\big|^2 + \big|a+\omega b+\omega^2 c\big|^2 + \big|a+\omega^2 b+\omega c\big|^2 = 3\big(|a|^2+|b|^2+|c|^2\big),$$

premda se ta jednakost lako vidi i direktnim množenjem. Koristit ćemo poznate činjenice da potencijalne sredine rastu, a ℓ^p-(kvazi-)norme padaju, tj. za fiksirane $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ vrijedi:

$$\text{funkcija } \; p \mapsto \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\Big)^{1/p} \; \text{ je rastuća na } \langle 0, +\infty\rangle,$$

$$\text{funkcija } \; p \mapsto \Big(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^p\Big)^{1/p} \; \text{ je padajuća na } \langle 0, +\infty\rangle.$$

Možemo ocjenjivati:

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{3}\Big(\big|a+b+c\big|^3 + \big|a+\omega b+\omega^2 c\big|^3 + \big|a+\omega^2 b+\omega c\big|^3\Big)\Big)^{1/3}\\
&\geqslant \Big(\frac{1}{3}\Big(\big|a+b+c\big|^2 + \big|a+\omega b+\omega^2 c\big|^2 + \big|a+\omega^2 b+\omega c\big|^2\Big)\Big)^{1/2}\\
&= \big(|a|^2+|b|^2+|c|^2\big)^{1/2} \geqslant \big(|a|^3+|b|^3+|c|^3\big)^{1/3}
\end{aligned}$$

pa kubiranje i množenje s 3 daju traženu nejednakost.

(b) Za dokaz ove nejednakosti treba još malo pojačati posljednji korak u (a) dijelu i dokazati

$$\big(|a|^2+|b|^2+|c|^2\big)^{3/2} - \big(|a|^3+|b|^3+|c|^3\big) \geqslant \frac{1}{10}|abc|,$$

tako da će se moći uzeti npr. $\varepsilon = 3/10$. Zbog apsolutnih vrijednosti, simetrije i homogenosti možemo još pretpostaviti $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 1$ i $a^2+b^2+c^2 = 1$. Zapišimo:

$$\begin{aligned}
1-a^3-b^3-c^3 &= 1-a^3-b^3-(1-a^2-b^2)c\\
&= (1-c)+a^2(c-a)+b^2(c-b).
\end{aligned}$$

Razlikujemo dva slučaja.

(1°) Ako je $c \leqslant \frac{9}{10}$, onda je $1-c \geqslant \frac{1}{10}$ pa imamo

$$(1-c)+a^2(c-a)+b^2(c-b) \geqslant \frac{1}{10} \geqslant \frac{1}{10}abc.$$

(2°) Ako je pak $c > \frac{9}{10}$, tada je $a \leqslant b \leqslant \frac{1}{2}$ pa zbog $c-a \geqslant c-b \geqslant \frac{2}{5}$ imamo

$$(1-c)+a^2(c-a)+b^2(c-b) \geqslant \frac{2}{5}(a^2+b^2) \geqslant \frac{4}{5}ab \geqslant \frac{4}{5}abc.$$

$$* \; * \; *$$

Sada ćemo dati neke simpatične primjene Fourierove analize u algebri.

Primjer 3.1.2. Neka je $v = (v_0, v_1, ..., v_{m-1}) \in \mathbb{C}^m$ vektor kojeg možemo shvatiti kao funkciju na $\mathbb{Z}_m$ i pretpostavimo da tada vrijedi $\hat{v}(\xi) \neq 0$ za svaki $\xi = 0, 1, \ldots, m-1$. Dokažite da je sistem cikličkih permutacija od v linearno nezavisan.
(*Napomena*: Cikličke permutacije od v su vektori

$$(v_j, v_{j+1}, \ldots, v_{m-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{j-1})$$

za $j = 0, 1, \ldots, m-1$.)

Rješenje. Uočimo da je gornji ciklički permutirani vektor upravo $\mathrm{T}_{-j}v$, pri čemu koristimo notaciju iz teorema 3.1.5. Prema tome, trebamo pokazati da su funkcije

$$\mathrm{T}_0 v, \ \mathrm{T}_1 v, \ \ldots, \ \mathrm{T}_{m-1} v$$

linearno nezavisne. Pretpostavimo da su $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{C}$ skalari takvi da je

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \mathrm{T}_j v = 0.$$

Zbog linearnosti Fourierove transformacije i teorema 3.1.5 (d) za svaki $\xi = 0, 1, \ldots, m-1$ vrijedi

$$0 = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j (\widehat{\mathrm{T}_j v})(\xi) = \Big(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j E(j, \xi) \Big) \hat{v}(\xi)$$

pa po pretpostavci mora biti

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j E(j, \xi) = 0.$$

Vektori $E(j, \cdot)$; $j = 0, 1, \ldots, m-1$, koji predstavljaju funkcije $\xi \mapsto E(j, \xi)$, su u parovima ortogonalni zbog propozicije 3.1.3:

$$\big\langle E(j, \cdot), E(k, \cdot) \big\rangle = \sum_{\xi=0}^{m-1} E(j, \xi) \overline{E(k, \xi)} = \sum_{\xi=0}^{m-1} E(j-k, \xi) = 0 \quad \text{ako je } j \neq k.$$

Kao posljedica, oni su i linearno nezavisni pa je $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$, čime je dokazana tražena tvrdnja.

Primjer 3.1.3. Promotrite sve matrice tipa $2^n \times 2^n$ (gdje je n prirodni broj) s elementima iz skupa $\{-1, 1\}$. Pronađite najveću moguću vrijednost determinante jedne od takvih matrica.

Rješenje. Za gornju ogradu će nam biti korisna sljedeća općenita tvrdnja iz linearne algebre.

Lema 3.1.6 (Hadamardova nejednakost). *Ako je A kompleksna matrica tipa $N \times N$ čiji vektori-stupci su $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{C}^N$, tada vrijedi*

$$|\det A| \leqslant \|v_1\|_2 \|v_2\|_2 \cdots \|v_N\|_2.$$

Pritom $\|\cdot\|_2$ označava euklidsku normu, tj.

$$\|v\|_2 := \big(|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_N|^2 \big)^{1/2}, \quad \text{za } v = (v_1, v_2, \ldots, v_N).$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su vektori $v_1, v_2, \ldots, v_N$ međusobno ortogonalni ili je neki od njih nul-vektor.

Dokaz. Zbog homogenosti determinante možemo pretpostaviti

$$\|v_1\|_2 = \|v_2\|_2 = \cdots = \|v_N\|_2 = 1,$$

tako da treba dokazati $|\det A| \leqslant 1$. Matrica A^*A je pozitivno-semidefinitna i njene svojstvene vrijednosti označimo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \geqslant 0$. Kako je

$$\det(A^*A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_N, \qquad \operatorname{tr}(A^*A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N,$$

primjena geometrijsko-aritmetičke nejednakosti daje

$$|\det A|^2 = \det(A^*A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_N \leqslant \Big(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N}{N}\Big)^N$$

$$= \Big(\frac{\operatorname{tr}(A^*A)}{N}\Big)^N = \Big(\frac{\|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2 + \cdots + \|v_N\|_2^2}{N}\Big)^N = 1.$$

Preostaje ispitati kada vrijedi jednakost. Možemo pretpostaviti da niti jedan stupac od A nije nul-vektor i da smo ih opet normalizirali kao na početku dokaza. Jednakost u G-A nejednakosti vrijedi akko je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N$, a to je, zbog dijagonalizabilnosti od A^*A, ekvivalentno s $A^*A = \lambda I$ za neki $\lambda \geqslant 0$. Kako su elementi od A^*A upravo skalarni produkti stupaca od A, zaključujemo da su ti stupci u parovima ortogonalni. Q.E.D.

Napomena. Ova lema ima lijepu geometrijsku interpretaciju ako je A regularna realna matrica. Broj $\det A$ je upravo volumem paralelotopa s jednih vrhom u ishodištu i bridovima određenim vektorima $v_1, v_2, \ldots, v_N$. "Evidentno" je (barem u dimenzijama $N = 2$ i $N = 3$) da je njegov volumen manji ili jednak produktu duljina bridova, dok se jednakost postiže upravo kada je on N-dimenzionalni pravokutnik/kvadar.

Vratimo se našem zadatku. Ako sada uzmemo matricu $A \in \mathrm{M}_N(\{-1, 1\})$, tada Hadamardova nejednakost daje

$$|\det A| \leqslant N^{N/2},$$

a kako u zadatku imamo $N = 2^n$, zapravo smo dobili gornju ocjenu

$$|\det A| \leqslant 2^{n2^{n-1}}.$$

Treba primjerom pokazati da se ograda $2^{n2^{n-1}}$ doista postiže i za to će nam koristiti Fourierova analiza uz odabir grupe $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_2^n = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{n}$. Pretpostavimo da su elementi od $\mathbb{A}$ na neki način pobrojani s $1, 2, 3, \ldots, N$ te uzmimo baš matricu $A = \big[E(x, \xi)\big]_{\substack{x\in\mathbb{A}\\ \xi\in\mathbb{A}}}$, pri čemu x indeksira retke, a ξ stupce. U definiciji od E se pojavljuju samo potencije od -1 pa je A doista $\{-1, 1\}$-matrica. Iz propozicije 3.1.3 se odmah vidi da su vektori $E(\cdot, \xi)$; $\xi \in \mathbb{A}$ ortogonalni:

$$\big\langle E(\cdot, \xi), E(\cdot, \zeta)\big\rangle = \sum_{x\in\mathbb{A}} E(x, \xi)\overline{E(x, \zeta)} = \sum_{x\in\mathbb{A}} E(x, \xi - \zeta) = 0 \quad \text{ako je } \xi \neq \zeta$$

pa u prethodnoj lemi vrijedi jednakost i doista se dostiže gornja ograda $N^{N/2} = 2^{n2^{n-1}}$.

Napomena. Analogni problem je uvelike otvoren za matrice reda N koji nije potencija od 2 i zove se *Hadamardov problem.*

Zadatak 3.1.4. Faktorizirajte polinom 5 varijabli $P \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$,

$$P(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{j=0}^{4} x_j^5 + 5\sum_{j=0}^{4} x_{j-1}x_jx_{j+1}(x_{j-1}x_{j+1} - x_j^2)$$

$$+5\sum_{j=0}^{4} x_{j-2}x_jx_{j+2}(x_{j-2}x_{j+2} - x_j^2) - 5x_0x_1x_2x_3x_4,$$

nad prstenom $\mathbb{Z}[e^{2\pi i/5}]$, tj. na faktore s koeficijentima iz

$$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/5}] = \Big\{ \sum_{j=0}^{4} \alpha_j e^{2\pi i j/5} \ : \ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

(*Napomena*: Zbrajanje i oduzimanje indeksâ u formuli za P se shvaćaju modulo 5.)

Rješenje. Označimo kratko $\varepsilon = e^{2\pi i/5}$. Shvatimo vektor varijabli

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$$

kao funkciju na $\mathbb{Z}_5$. Korištenje formule inverzije i nekog softvera za simboličko računanje (poput programskih paketa *Mathematica*, *Maple*, *Sage*) daje

$$P(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{j=0}^{4} \hat{x}(j) = \prod_{j=0}^{4} (x_0 + \varepsilon^j x_1 + \varepsilon^{2j} x_2 + \varepsilon^{3j} x_3 + \varepsilon^{4j} x_4).$$

Naravno da takav softver može i direknije riješiti problem, faktorizacijom u unaprijed određenom proširenju polja $\mathbb{Q}$.

Zadatak 3.1.5. Neka je $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ funkcija na konačnoj abelovoj grupi $\mathbb{A}$ koja nije jednaka konstanti 0. Označimo

$$\operatorname{supp}(f) := \{x \in \mathbb{A} : f(x) \neq 0\},$$
$$\operatorname{supp}(\hat{f}) := \{\xi \in \mathbb{A} : \hat{f}(\xi) \neq 0\}.$$

Dokažite konačnu varijantu *principa neodređenosti*:

$$|\operatorname{supp}(f)|\,|\operatorname{supp}(\hat{f})| \geqslant |\mathbb{A}|.$$

(Kratica "supp" dolazi od engleske riječi "support" koja se na hrvatski prevodi kao "nosač" funkcije.)

Rješenje. Korištenjem nejednakosti trokuta, Cauchy-Schwarz nejednakosti i Plancherelovog identiteta dobivamo

$$\sup_{\xi\in\mathbb{A}} |\hat{f}(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{A}} \Big| \sum_{x\in\mathbb{A}} f(x)E(x,\xi) \Big| \leqslant \sum_{x\in\mathbb{A}} |f(x)| = \sum_{x\in\operatorname{supp}(f)} |f(x)|$$

$$\leqslant \Big(\sum_{x\in\operatorname{supp}(f)} 1^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{x\in\operatorname{supp}(f)} |f(x)|^2 \Big)^{1/2} = |\operatorname{supp}(f)|^{1/2} \Big(\sum_{x\in\mathbb{A}} |f(x)|^2 \Big)^{1/2}$$

$$= |\operatorname{supp}(f)|^{1/2} \Big(|\mathbb{A}|^{-1} \sum_{\xi\in\mathbb{A}} |\hat{f}(\xi)|^2 \Big)^{1/2} = |\mathbb{A}|^{-1/2} |\operatorname{supp}(f)|^{1/2} \Big(\sum_{\xi\in\operatorname{supp}(\hat{f})} |\hat{f}(\xi)|^2 \Big)^{1/2}$$

$$\leqslant |\mathbb{A}|^{-1/2} |\operatorname{supp}(f)|^{1/2} |\operatorname{supp}(\hat{f})|^{1/2} \sup_{\xi\in\mathbb{A}} |\hat{f}(\xi)|.$$

Ako f nije identički jednaka 0, tada ni $\hat{f}$ nije identički jednaka 0 pa je $\sup_{\xi\in\mathbb{A}} |\hat{f}(\xi)| > 0$. Dijeljenjem s tim faktorom dobivamo traženu nejednakost.

Zadatak 3.1.6. (*Jača varijanta principa neodređenosti*)

(a) Uzmimo sada posebno $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_p$ za prost broj p, uzmimo funkciju f na $\mathbb{Z}_p$ koja nije identički jednaka 0 i neka su skupovi $\operatorname{supp}(f)$, $\operatorname{supp}(\hat{f})$ definirani kao u prethodnom zadatku. Dokažite da mora vrijediti

$$|\operatorname{supp}(f)| + |\operatorname{supp}(\hat{f})| \geqslant p + 1.$$

(b) Obratno, pokažite da za $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$ koji zadovoljavaju $|A| + |B| \geqslant p + 1$ postoji funkcija $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ takva da je $\operatorname{supp}(f) = A$ i $\operatorname{supp}(\hat{f}) = B$.

Uputa: U rješenju ovog zadatka je potreban *Teorem Čebotareva o korijenima iz jedinice*, koji glasi: Ako su p prost broj, $1 \leqslant m \leqslant p$ te $x_1, \ldots, x_m$ različiti elementi od $\mathbb{Z}_p$ i još $\xi_1, \ldots, \xi_m$ također različiti elementi od $\mathbb{Z}_p$, tada je

$$\det \big[e^{2\pi i x_j \xi_k / p}\big]_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,m}} \neq 0.$$

Rješenje. Naredno rješenje je prilagođeno iz članka: T. Tao, *An uncertainty principle for cyclic groups of prime order*, Math. Res. Letters **12** (2005), 121–127.

(a) Pretpostavimo da postoji funkcija $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ koja nije identički jednaka 0 i koja zadovoljava

$$|\operatorname{supp}(f)| + |\operatorname{supp}(\hat{f})| \leqslant p.$$

Neka je $m = |\operatorname{supp}(f)|$, $\operatorname{supp}(f) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ i uzmimo različite $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{Z}_p \setminus \operatorname{supp}(\hat{f})$. Promotrimo linearni operator $T\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ čija matrica u paru kanonskih baza je transponirana matrica $\big[e^{2\pi i x_j \xi_k / p}\big]_{\substack{j=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,m}}$. Prema Čebotarevljevom teoremu je T regularan, a po definiciji Fourierove transformacije

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} e^{2\pi i x \xi / p} f(x)$$

imamo

$$T\big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)\big) = \big(\hat{f}(\xi_1), \hat{f}(\xi_2), \ldots, \hat{f}(\xi_m)\big).$$

Po konstrukciji je

$$\hat{f}(\xi_1) = \hat{f}(\xi_2) = \cdots = \hat{f}(\xi_m) = 0$$

pa iz injektivnosti od T slijedi

$$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_m) = 0,$$

što je kontradikcija.

(b) Pretpostavimo najprije da je baš $|A| + |B| = p + 1$ i stavimo $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Uzmimo neki $\xi_1 \in B$ i definirajmo $C := (\mathbb{Z}_p \setminus B) \cup \{\xi_1\}$. Neka je $C = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$. Linearni operator T iz (a) dijela zadatka je regularan pa postoji funkcija f na $\mathbb{A}$ takva da je $\operatorname{supp}(f) \subseteq A$ i

$$\big(\hat{f}(\xi_1), \hat{f}(\xi_2), \ldots, \hat{f}(\xi_m)\big) = T\big(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)\big) = (1, 0, \ldots, 0).$$

Posebno vidimo da je $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subseteq (\mathbb{Z}_p \setminus C) \cup \{\xi_1\} = B$ i da f nije konstantno jednaka 0. Iz (a) dijela zadatka slijedi

$$p + 1 \leqslant |\operatorname{supp}(f)| + |\operatorname{supp}(\hat{f})| \leqslant |A| + |B| = p + 1$$

pa mora biti $\mathrm{supp}(f) = A$ i $\mathrm{supp}(\hat{f}) = B$.

Za općeniti slučaj ćemo koristiti sljedeću jednostavnu tvrdnju: Neka je V konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ i neka su $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ netrivijalni linearni funkcionali na V (njih konačno ili prebrojivo mnogo). Tada postoji $v \in V$ takav da je $\varphi_j(v) \neq 0$ za svaki j. (Za elegantni dokaz te tvrdnje se može koristiti ili subaditivnost Lebesgueove mjere ili potpunost i Baireov teorem. U oba pristupa se promatraju jezgre funkcionala φ_j, koje su potprostori od V dimenzije $\dim V - 1$.)

Iskoristimo tu pomoćnu tvrdnju na vektorski prostor

$$V := \{f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{C} : \mathrm{supp}(f) \subseteq A, \mathrm{supp}(\hat{f}) \subseteq B\}$$

i linearne funkcionale

$$V \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(x) \qquad \text{za svaki fiksirani } x \in A,$$

$$V \to \mathbb{C},\ f \mapsto \hat{f}(\xi) \qquad \text{za svaki fiksirani } \xi \in B.$$

Treba vidjeti da su svi oni netrivijalni. Kad bi npr. za neki $x \in A$ za svaki $f \in V$ vrijedilo $f(x) = 0$, dobili bismo kontradikciju s prvim slučajem dokaza uz izbor skupova $\tilde{A}, \tilde{B}$ takvih da je $x \in \tilde{A} \subseteq A$, $\tilde{B} \subseteq B$, $|A| + |B| = p + 1$. Iz pomoćne tvrdnje konačno slijedi postojanje funkcije f takve da je $\mathrm{supp}(f) = A$ i $\mathrm{supp}(\hat{f}) = B$.

Zadatak 3.1.7. Neka je p prost broj i neka je $S := \{w \in \mathbb{C} : w^p = 1\}$ skup p-tih korijena iz jedinice. Promotrimo polinom oblika

$$P(z) := \sum_{j=0}^{k} c_j z^{n_j}$$

za neke koeficijente $c_0, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i za neke različite eksponente $n_0, n_1, \ldots, n_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Dokažite da polinom P može imati najviše k različitih nultočaka u skupu S.

Rješenje. Promotrimo funkciju

$$f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}, \qquad f(x) := P(e^{-2\pi i x/p}).$$

Broj nultočaka polinoma P u skupu S je upravo broj nultočaka funkcije f, tj. $p - |\mathrm{supp}(f)|$ pa trebamo dokazati $|\mathrm{supp}(f)| \geqslant p - k$.

Općenito, za polinom

$$Q(z) = \sum_{m=0}^{p-1} a_m z^m$$

i funkciju

$$g\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}, \qquad g(x) := Q(e^{-2\pi i x/p}) = \sum_{m=0}^{p-1} a_m e^{-2\pi i m x/p}$$

vrijedi

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} \sum_{m \in \mathbb{Z}_p} a_m e^{-2\pi i m x/p} e^{2\pi i x \xi/p} = \sum_{m \in \mathbb{Z}_p} a_m \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} e^{2\pi i x(\xi - m)/p} = p\, a_\xi.$$

Zato u je našem slučaju $|\mathrm{supp}(\hat{f})| = k+1$ pa iz jače varijante principa neodređenosti dobivamo:

$$|\mathrm{supp}(f)| \geqslant p + 1 - |\mathrm{supp}(\hat{f})| = p - k.$$

* * *

Nastavljamo s nekim neočekivanim primjenama u geometriji.

Primjer 3.1.4. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Definiramo niz n-terokuta $(M^k)_{k=0}^{\infty}$, $M^k = A_0^k A_1^k \ldots A_{n-1}^k$ u ravnini na sljedeći način. Neka je M^0 proizvoljan. Vrhovi

$$A_0^k, A_1^k, \ldots, A_{n-2}^k, A_{n-1}^k$$

mnogokuta M^k su rekurzivno definirani kao polovišta stranica

$$\overline{A_0^{k-1} A_1^{k-1}},\ \overline{A_1^{k-1} A_2^{k-1}},\ \ldots,\ \overline{A_{n-2}^{k-1} A_{n-1}^{k-1}},\ \overline{A_{n-1}^{k-1} A_0^{k-1}}$$

mnogokuta M^{k-1}. Dokažite da se mnogokuti $(M^k)_{k=0}^{\infty}$ "stišću" prema točki, tj. preciznije, da vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} A_j^k \ = \ \text{težište od } M^0$$

za $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Rješenje. Uvedimo kompleksni koordinatni sustav u ravnini s ishodištem u točki $T =$ težište od M^0 i neka je $z_j^{(k)}$ koordinata točke A_j^k. Shvatimo vektor

$$f_k = (z_0^{(k)}, z_1^{(k)}, \ldots, z_{n-2}^{(k)}, z_{n-1}^{(k)})$$

kao funkciju na grupi $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_n$. Rekurzivnu relaciju možemo zapisati

$$z_j^{(k)} = \frac{1}{2} z_j^{(k-1)} + \frac{1}{2} z_{j+1}^{(k-1)} \qquad \text{za } j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

pri čemu indekse zbrajamo modulo n, što se još kompaktnije zapisuje

$$f_k = \frac{1}{2} f_{k-1} + \frac{1}{2} \mathrm{T}_{-1} f_{k-1}.$$

Korištenjem teorema 3.1.5 (d) dobivamo relaciju između Fourierovih transformacija:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_k(\xi) &= \frac{1}{2}\hat{f}_{k-1}(\xi) + \frac{1}{2}E(-1,\xi)\hat{f}_{k-1}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\pi i \xi/n})\hat{f}_{k-1}(\xi) \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\frac{2\pi\xi}{n} - i\sin\frac{2\pi\xi}{n}\Big)\,\hat{f}_{k-1}(\xi) \\
&= \cos\frac{\pi\xi}{n}\,\Big(\cos\frac{\pi\xi}{n} - i\sin\frac{\pi\xi}{n}\Big)\,\hat{f}_{k-1}(\xi),
\end{aligned}$$

odakle je

$$|\hat{f}_k(\xi)| = \Big|\cos\frac{\pi\xi}{n}\Big|\,|\hat{f}_{k-1}(\xi)|.$$

Iteriranjem dobivamo

$$|\hat{f}_k(\xi)| = \Big|\cos\frac{\pi\xi}{n}\Big|^k\,|\hat{f}_0(\xi)|.$$

Po konstrukciji je

$$\hat{f}_0(0) = z_0^{(0)} + z_1^{(0)} + \cdots + z_{n-2}^{(0)} + z_{n-1}^{(0)} = 0$$

pa slijedi i $\hat{f}_k(0) = 0$ za svaki k. S druge strane, za $\xi = 1, 2, \ldots, n-1$ imamo $\big|\cos\frac{\pi\xi}{n}\big| < 1$ pa je $\lim_{k\to\infty} |\hat{f}_k(\xi)| = 0$. Konačno, Plancherelov identitet daje

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}_n} \big|z_j^{(k)}\big|^2 = \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_n} |\hat{f}_k(\xi)|^2 = 0,$$

što znači $\lim_{k\to\infty} z_j^{(k)} = 0$ za $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Napomena: Autor problema je M. Roseman, a navedeno elegantno rješenje korištenjem Fourierove analize na grupi $\mathbb{Z}_n$ je predložio I. J. Schoenberg.

Zadatak 3.1.8. Neka je $p \geqslant 3$ prost i pretpostavimo da je funkcija $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ takva da je najviše jedan od brojeva
$$\hat{f}(0),\ \hat{f}(1),\ \ldots,\ \hat{f}(p-1)$$
različit od 0. Dokažite da su brojevi
$$f(0),\ f(1),\ \ldots,\ f(p-1)$$
ili svi jednaki, ili su vrhovi pravilnog p-terokuta u kompleksnoj ravnini.

Rješenje. Iz formule inverzije dobivamo
$$f(x) = \frac{1}{p}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_p}\hat{f}(\xi)e^{-2\pi i x\xi/p}.$$

Razlikujemo dva slučaja.

(1°) $\hat{f}(1) = \cdots = \hat{f}(p-1) = 0$.
Vidimo da za svaki $x \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ vrijedi $f(x) = \frac{1}{p}\hat{f}(0)$, tj. svi ti brojevi su jednaki.

(2°) $\hat{f}(k) \neq 0$ za neki $k \in \{1,\ldots,p-1\}$ te $\hat{f}(\xi) = 0$ za svaki $\xi \neq k$.
Sada je $f(x) = \frac{1}{p}\hat{f}(k)e^{-2\pi ikx/p}$ za $x \in \{0,1,\ldots,p-1\}$. Kako kx daju sve moguće ostatke pri dijeljenju s p (jer su k i p relativno prosti), vidimo da su brojevi $e^{-2\pi ikx/p}$ upravo svi p-ti korijeni iz jedinice. Za njih znamo da čine vrhove pravilnog p-terokuta sa središtem u ishodištu. Faktor $\frac{1}{p}\hat{f}(k) \in \mathbb{C}$ još samo znači rastezanje za neki koeficijent i rotaciju za neki kut.

Zadatak 3.1.9. Neka su z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 kompleksni brojevi za koje vrijedi

- $|z_0| = |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$,
- $z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$,
- $z_0z_1 + z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_4 + z_4z_0 = 0$.

Dokažite da oni leže u vrhovima pravilnog peterokuta.

Rješenje. Naredno rješenje je prilagođeno iz članka: D. Svrtan., D. Šterc, I. Urbiha, *On cyclic characterizations of regular pentagons and heptagons: Two approaches*, Math. Commun. **6** (2001), 71–89.

Petorku kompleksnih brojeva $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ možemo shvatiti kao funkciju f na grupi $\mathbb{Z}_5$ i neka je njena Fourierova transformacija $\hat{f} = (w_0, w_1, w_2, w_3, w_4)$. Iz drugog uvjeta je
$$w_0 = \hat{f}(0) = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0.$$

Iz prvog uvjeta $|z_k| = 1$, svojstava Fourierove transformacije i Plancherelovog identiteta (općenitija verzija) slijedi
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_5} w_{k+1}\overline{w_k} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_5}\hat{f}(\xi+1)\overline{\hat{f}(\xi)} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_5}(\widehat{\mathrm{M}_1 f})(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)} = 5\sum_{x\in\mathbb{Z}_5}(\mathrm{M}_1 f)(x)\overline{f(x)}$$
$$= 5\sum_{x\in\mathbb{Z}_5}E(x,1)|f(x)|^2 = 5\sum_{k\in\mathbb{Z}_5}e^{2\pi ik/5}|z_k|^2 = 5\sum_{k\in\mathbb{Z}_5}e^{2\pi ik/5} = 0$$

te sasvim analogno $\sum_{k\in\mathbb{Z}_5} w_{k+2}\overline{w_k} = 0$. Te dvije jednakosti se zbog $w_0 = 0$ mogu zapisati

$$w_2\overline{w_1} + w_3\overline{w_2} + w_4\overline{w_3} = 0, \qquad w_3\overline{w_1} + w_4\overline{w_2} + w_1\overline{w_4} = 0.$$

Treći uvjet u zadatku se pak primjenom formule inverzije i $w_0 = 0$ transformira u

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_5} z_k z_{k+1} &= \sum_{x\in\mathbb{Z}_5} f(x)f(x+1) = \frac{1}{25}\sum_{x\in\mathbb{Z}_5}\Big(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_5}\hat{f}(\xi)\overline{E(x,\xi)}\Big)\Big(\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}_5}\hat{f}(\zeta)\overline{E(x+1,\zeta)}\Big) \\ &= \frac{1}{25}\sum_{\xi,\zeta\in\mathbb{Z}_5}\hat{f}(\xi)\hat{f}(\zeta)\overline{E(1,\zeta)}\Big(\sum_{x\in\mathbb{Z}_5}\overline{E(x,\xi+\zeta)}\Big) = \frac{1}{5}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_5}\hat{f}(\xi)\hat{f}(-\xi)E(1,\xi) \\ &= \frac{1}{5}\Big(w_1w_4(e^{2\pi i/5}+e^{-2\pi i/5}) + w_2w_3(e^{4\pi i/5}+e^{-4\pi i/5})\Big), \end{aligned}$$

tj.

$$w_1w_4\cos\tfrac{2\pi}{5} + w_2w_3\cos\tfrac{4\pi}{5} = 0.$$

Korištenjem formula

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

to se pak zapisuje kao

$$\big(\sqrt{5}-1\big)\,w_1w_4 = \big(\sqrt{5}+1\big)\,w_2w_3.$$

Množenjem s $\overline{w_3}$ i eliminacijom $w_4\overline{w_3}$ iz prve dobivene jednadžbe slijedi

$$\big(\sqrt{5}-1\big)\big(-w_2\overline{w_1} - w_3\overline{w_2}\big) = \big(\sqrt{5}+1\big)\,w_2w_3,$$

tj.

$$w_2\Big(\big(\sqrt{5}-1\big)|w_1|^2 + \big(\sqrt{5}+1\big)|w_3|^2\Big) = -\big(\sqrt{5}-1\big)w_1\overline{w_2}w_3$$

te, uzimanjem apsolutnih vrijednosti,

$$|w_2|\Big(\big(\sqrt{5}-1\big)|w_1|^2 + \big(\sqrt{5}+1\big)|w_3|^2\Big) = \big(\sqrt{5}-1\big)|w_1||w_2||w_3|.$$

Razlikujemo tri slučaja.

(1°) $w_2 \neq 0 \neq w_3$.
Dijeljenjem s $|w_2||w_3|^2$ dobivamo

$$\big(\sqrt{5}-1\big)\Big|\frac{w_1}{w_3}\Big|^2 - \big(\sqrt{5}-1\big)\Big|\frac{w_1}{w_3}\Big| + \big(\sqrt{5}+1\big) = 0,$$

ali pripadna kvadratna jednadžba nema realnih rješenja jer joj je diskriminanta

$$\big(\sqrt{5}-1\big)\big(-3\sqrt{5}-5\big) < 0.$$

Zato ovaj slučaj niti nije moguć.

(2°) $w_2 = 0$.
Ovdje dobivamo $w_4\overline{w_3} = 0$ te onda dalje $w_3\overline{w_1} = w_1\overline{w_4} = 0$. Sada vidimo da su barem 2 od brojeva w_1, w_3, w_4 jednaka 0.

(3°) $w_2 \neq 0$, $w_3 = 0$.
Ovdje dobivamo $w_1 = 0$ te onda $w_4 = 0$.

U svakom slučaju vidimo da je najviše jedan od brojeva w_1, w_2, w_3, w_4 različit od 0 pa tvrdnja slijedi iz prethodnog zadatka.

* * *

Fourierova analiza na konačnim grupama nalazi najviše svojih primjena u tzv. aritmetičkoj kombinatorici, tj. proučavanju kombinatornih svojstava aritmetičkih struktura. Postojeća literatura je vrlo opsežna. Najprije ćemo tim metodama pokazati jedan vrlo težak rezultat kojeg je izvorno dokazao J. Bourgain.

Primjer 3.1.5. Neka je p prost broj i $S \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ takav da je $|S| > p^{3/4}$. Dokažite da za svaki cijeli broj m postoje

$$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in S$$

takvi da vrijedi

$$m \equiv a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \pmod{p}.$$

Rješenje. Prisjetimo se da je $\mathbb{Z}_p$ zapravo polje, tj. svaki $s \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$ ima inverzni (tj. recipročni) element s^{-1}. U kompaktnijoj skupovnoj notaciji želimo dokazati

$$\mathbb{Z}_p = A \cdot A + A \cdot A + A \cdot A.$$

Promotrimo funkciju $f \colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$, $f := \sum_{s \in S} \chi_{s \cdot S}$, gdje χ označava karakterističnu funkciju skupa. Naprije primijetimo da je

$$(f * f * f)(x) = \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z}_p \\ a+b+c=x}} f(a) f(b) f(c) = \sum_{\substack{a_1,b_1,c_1 \in S \\ a,b,c \in \mathbb{Z}_p \\ a+b+c=x}} \chi_{a_1 \cdot S}(a)\, \chi_{b_1 \cdot S}(b)\, \chi_{c_1 \cdot S}(c)$$

$$= \sum_{\substack{a_1,b_1,c_1 \in S \\ a_2,b_2,c_2 \in S \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = x}} 1 \;=\; \text{broj traženih prikaza od } x$$

pa zapravo trebamo dokazati da je $(f * f * f)(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{Z}_p$.

Fourierova transformacija od f je

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{s \in S} \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} \chi_{sS}(x) e^{2\pi i x \xi / p} = [x = sy] = \sum_{s \in S} \sum_{y \in S} e^{2\pi i s y \xi / p} = \sum_{s \in S} \hat{\chi}_S(s\xi).$$

Imamo $\hat{f}(0) = |S|^2$. Za $\xi \neq 0$ su elementi $s\xi$ svi međusobno različiti kako s varira pa aritmetičko-kvadratna nejednakost i Plancherelov identitet daju

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant |S|^{1/2} \Big(\sum_{s \in S} |\hat{\chi}_S(s\xi)|^2 \Big)^{1/2} \leqslant |S|^{1/2} \Big(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}_p} |\hat{\chi}_S(\xi)|^2 \Big)^{1/2}$$

$$= |S|^{1/2} \Big(p \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} |\chi_S(x)|^2 \Big)^{1/2} = |S|^{1/2} p^{1/2} |S|^{1/2} = p^{1/2} |S|.$$

Zbog nejednakosti Minkowskog imamo

$$\Big(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}_p} |\hat{f}(\xi)|^2 \Big)^{1/2} \leqslant \sum_{s \in S} \Big(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}_p} |\hat{\chi}_{sS}(\xi)|^2 \Big)^{1/2}$$

$$= \sum_{s\in S} p^{1/2}\Big(\sum_{x\in\mathbb{Z}_p}|\chi_{sS}(x)|^2\Big)^{1/2} = |S|p^{1/2}|S|^{1/2} = p^{1/2}|S|^{3/2}.$$

Konačno, zbog $(f*f*f)\widehat{\ }(\xi) = \hat{f}(\xi)^3$ i formule inverzije imamo

$$\begin{aligned}
(f*f*f)(x) = \mathrm{Re}(f*f*f)(x) &= \frac{1}{p}\mathrm{Re}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_p}\hat{f}(\xi)^3 e^{-2\pi i x\xi/p} \\
&\geqslant \frac{1}{p}\hat{f}(0)^3 - \frac{1}{p}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}}|\hat{f}(\xi)|^3 \\
&\geqslant p^{-1}|S|^6 - p^{-1}p^{1/2}|S|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_p}|\hat{f}(\xi)|^2 \\
&\geqslant p^{-1}|S|^6 - p^{-1/2}|S|p|S|^3 = p^{-1}|S|^6 - p^{1/2}|S|^4 \\
&= p^{-1}|S|^4\big(|S|^2 - p^{3/2}\big) > 0.
\end{aligned}$$

Naime, po pretpostavci zadatka je $|S| > p^{3/4}$, tj. $|S|^2 > p^{3/2}$.

Zadatak 3.1.10. Dokažite *Cauchy-Davenportov teorem*: Ako je p prost broj i ako su $A, B \subseteq \mathbb{Z}_p$ neprazni, tada vrijedi

$$|A+B| \geqslant \min\big\{|A|+|B|-1,\, p\big\}.$$

Pritom, kao i obično, označavamo

$$A+B := \{a+b \,:\, a\in A,\, b\in B\}.$$

Rješenje. Autor ovog rješenja je R. Chapman. Najprije tvrdimo da možemo naći skupove $X, Y \subseteq \mathbb{Z}_p$ takve da je

$$|X| = p+1-|A|, \quad |Y| = p+1-|B|, \quad |X\cap Y| = \max\big\{|X|+|Y|-p,\, 1\big\}.$$

Razlikujemo dva slučaja.

(1°) Ako je $|A|+|B| \leqslant p+1$, tada možemo uzeti

$$X = \{0,1,\ldots,p-|A|\}, \quad Y = \{|B|-1, |B|, \ldots, p-1\}.$$

(2°) Ako je $|A|+|B| > p+1$, tada možemo uzeti

$$X = \{0,1,\ldots,p-|A|\}, \quad Y = \{p-|A|, p-|A|+1, \ldots, 2p-|A|-|B|\}.$$

Prema jačoj varijanti principa neodređenosti postoje funkcije $f, g\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ takve da je

$$\mathrm{supp}(f) = A, \quad \mathrm{supp}(\hat{f}) = X, \quad \mathrm{supp}(g) = B, \quad \mathrm{supp}(\hat{g}) = Y.$$

Promotrimo funkciju $f*g$. Iz definicije konvolucije

$$(f*g)(x) := \sum_{y\in\mathbb{Z}_p} f(x-y)g(y)$$

se odmah vidi

$$\mathrm{supp}(f*g) \subseteq \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g) = A+B,$$

dok iz svojstva

$$(\widehat{f * g})(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

slijedi

$$\operatorname{supp}(\widehat{f * g}) = \operatorname{supp}(\hat{f}) \cap \operatorname{supp}(\hat{g}) = X \cap Y.$$

Konačno, korištenjem jače varijante principa neodređenosti dobivamo

$$|A + B| + |X \cap Y| = \big|\operatorname{supp}(f * g)\big| + \big|\operatorname{supp}(\widehat{f * g})\big| \geqslant p + 1,$$

što je upravo

$$|A + B| \geqslant p + 1 - \max\big\{p + 2 - |A| - |B|,\, 1\big\} = \min\big\{|A| + |B| - 1,\, p\big\}.$$

3.2 Fourierova analiza na lokalno kompaktnim grupama

Topološka grupa je grupa $(G, +)$ s Hausdorffovom topologijom u odnosu na koju su zbrajanje $+\colon G \times G \to G$ i invertiranje $-\colon G \to G$ neprekidna preslikavanja. Ako je grupa još k tome Abelova i svaka točka iz G ima kompaktnu okolinu, onda kažemo da je G *lokalno kompaktna Abelova (LCA) grupa*. Može se pokazati da svaka LCA grupa G ima uz sebe vezanu netrivijalnu regularnu mjeru $m = m_G$ (definiranu na Borelovim podskupovima od G) koja je invarijantna na translacije, tj. vrijedi

$$m(x + E) = m(E)$$

za svaki $x \in G$ i svaki Borelov skup E. Ta mjera je jedinstvena do na multiplikativnu konstantu i za svaki neprazni otvoreni skup $V \subseteq G$ vrijedi $m(V) > 0$. Ako je G kompaktna uzima se verzija za koju je $m(G) = 1$, a ako je G diskretna obično se uzima da je m mjera prebrojavanja. (Za konačnu grupu G su moguće obje normalizacije.) Ta mjera se naziva *Haarovom mjerom* od G. Tipični primjeri LCA grupa i pripadnih Haarovih mjera su:

- $(\mathbb{Z}, +)$ s diskretnom topologijom i mjerom prebrojavanja,
- $(\mathbb{S}^1, \cdot) \cong (\mathbb{T}, +)$ s uobičajenom topologijom i Lebesgueovom mjerom,
- $(\mathbb{R}, +)$ ili čak $(\mathbb{R}^d, +)$ s euklidskom topologijom i Lebesgueovom mjerom.

Zadatak 3.2.1. Pokažite da je $(\langle 0, +\infty\rangle, \cdot)$ LCA grupa (obzirom na topologiju naslijeđenu iz $\mathbb{R}$) i da je formulom

$$m(E) := \int_E \frac{dt}{t}$$

definirana njena Haarova mjera.

Rješenje. Neprekidnost funkcija $\langle 0, +\infty\rangle \times \langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$, $(x, y) \mapsto xy$ i $\langle 0, +\infty\rangle \to \langle 0, +\infty\rangle$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ je sasvim očigledna. Točka $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ svakako ima kompaktnu okolinu $\big[\frac{x}{2}, 2x\big]$. Translacijska invarijantnost navedene mjere slijedi iz računa

$$m(xE) = \int_{xE} \frac{dt}{t} = [t = xs] = \int_E \frac{xds}{xs} = \int_E \frac{ds}{s} = m(E)$$

za $x \in \langle 0, +\infty\rangle$ i $E \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$ Borelov.

Činjenica da je ovo LCA grupa nas ne treba previše čuditi jer je ona izomorfna s $(\mathbb{R}, +)$, tj. preciznije, $\varphi\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$, $\varphi(u) := e^u$ je izomorfizam grupa i homeomorfizam pripadnih topoloških prostora. Čak je i mjera m slika Lebesgueove mjere po tom izomorfizmu:

$$m(E) = \int_E \frac{dt}{t} = [t = e^u] = \int_{\varphi^{-1}(E)} \frac{e^u du}{e^u} = \int_{\varphi^{-1}(E)} du = \lambda(\varphi^{-1}(E)).$$

Ako je G LCA grupa i m njena Haarova mjera, onda s $\mathrm{L}^p(G)$ označavamo pripadne L^p prostore. Uočimo da se za funkcije f, g na G opet može definirati konvolucija,

$$(f * g)(x) := \int_G f(x-y)g(y)dm(y).$$

Za $f, g \in \mathrm{L}^1(G)$ vrijedi $f * g \in \mathrm{L}^1(G)$ i

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Uz $*$ kao množenje prostor $\mathrm{L}^1(G)$ postaje Banachova algebra.

Svaki neprekidni homomorfizam $\xi\colon (G,+) \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$ nazivamo *(unitarnim) karakterom* grupe G. Općenito svi karakteri LCA grupe G uz zbrajanje

$$(\xi_1 + \xi_2)(x) := \xi_1(x)\xi_2(x); \quad x \in G$$

tvore grupu $\hat{G}$, koju zovemo *dualna grupa* od G. Obično umjesto $\xi(x)$ pišemo $\langle x, \xi\rangle$ i dualne grupe klasičnih grupa se daju okarakterizirati do na izomorfizam i homeomorfizam:

- $\hat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ i uz tu identifikaciju $\langle t, n\rangle = e^{2\pi i n t}$ za $t \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{Z}$,
- $\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$ i uz tu identifikaciju $\langle n, t\rangle = e^{2\pi i n t}$ za $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}$,
- $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ i uz tu identifikaciju $\langle x, \xi\rangle = e^{2\pi i x\xi}$ za $x, \xi \in \mathbb{R}$.

Zbog $|\langle x, \xi\rangle| = 1$ slijedi da je za svaku $f \in \mathrm{L}^1(G)$ i svaki $\xi \in \hat{G}$ dobro definiran kompleksni broj

$$\hat{f}(\xi) := \int_G f(x)\overline{\langle x, \xi\rangle}dm(x).$$

Tako definirana funkcija $\hat{f}\colon \hat{G} \to \mathbb{C}$ se naziva *Fourierovom transformacijom* funkcije f. Pokazuje se da funkcije oblika $f \mapsto \hat{f}(\xi)$ za neki $\xi \in \hat{G}$ točno opisuju sve netrivijalne homomorfizme s $\mathrm{L}^1(G)$ u $\mathbb{C}$ te da uz topologiju iduciranu tim funkcijama $\hat{G}$ postaje LCA grupa. Može se čak pokazati da je dualna grupa od $\hat{G}$ opet izomorfna s G, to je tzv. Pontrjaginov teorem dualnosti. Štoviše Haarova mjera $m_{\hat{G}}$ od $\hat{G}$ se može normalizirati tako da i ovdje vrijede Plancherelov identitet

$$\int_{\hat{G}} |\hat{f}(\xi)|^2 dm_{\hat{G}}(\xi) = \int_G |f(x)|^2 dm_G(x)$$

i Parsevalova formula

$$\int_{\hat{G}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}dm_{\hat{G}}(\xi) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dm_G(x)$$

za funkcije $f, g \in \mathrm{L}^1(G) \cap \mathrm{L}^2(G)$.

Čak su i slučajevi konačnih grupa zanimljivi u ovom konteksu, posebno s primjenama u kombinatorici.

Mnoge od važnih i vrlo konkretnih grupa nisu Abelove, npr. razne matrične grupe. One se i dalje mogu proučavati kao topološke grupe, ali kad bi imale "dovoljno" karaktera da bi za "mnoge" funkcije f vrijedio razvoj

$$f(x) = \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{f}(\xi)\xi(x),$$

imali bismo

$$f(x+y) = \sum_{\xi \in \hat{G}} \hat{f}(\xi)\xi(x)\xi(y) = f(y+x)$$

pa bi G morala biti komutativna. Kako bi izbjegao taj problem Frobenius je krajem 19. st. uveo pojam (unitarne) reprezentacije grupe, koja je sada neprekidni homomorfizam sa G u grupu unitarnih operatora na nekom Hilbertovom prostoru. Na taj način karakteri postaju naprosto jednodimenzionalne reprezentacije.

Preporučena dodatna literatura:

- H. Dym, H. P. McKean, *Fourier series and integrals*, Probability and Mathematical Statistics 14, Academic Press, New York-London, 1972.
- Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, treće izdanje, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- G. B. Folland, *Real analysis. Modern techniques and their applications*, drugo izdanje, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics 29, American Mathematical Society, Providence, 2001.
- T. Tao, V. Vu, *Additive Combinatorics*, Cambridge University Press, 2006.