KOMPLEKSNA ANALIZA
Rješenja zadataka za vježbu br. 1
2020./2021.

1. Prikažite sljedeće brojeve u trigonometrijskom obliku:

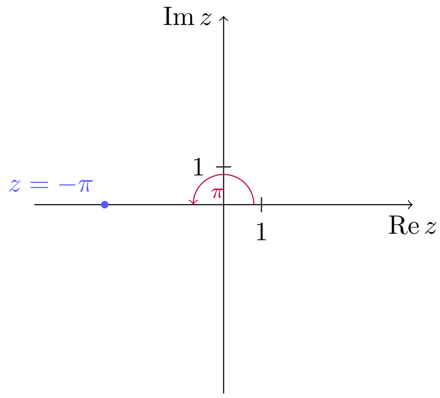
(a) $-\pi$

(b) $-1+3i$

(c) $\cos\alpha - i\sin\alpha$, gdje je $\alpha \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

Rješenje. (a) Označimo $z := -\pi$. Trigonometrijski prikaz od z je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je:

- $r = |z| = |-\pi| = \pi$
- Sa skice



jasno je da je $\varphi = \pi$.

Dakle, $z = \pi(\cos\pi + i\sin\pi)$.

(b) Označimo $z := -1+3i$. Trigonometrijski prikaz od z je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je:

- $r = |z| = |-1+3i| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$
- $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{-1} = -3$ pa je $\varphi = \operatorname{arctg}(-3) + k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Kako je $z = -1+3i$ u II. kvadrantu, vrijedi $\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$ pa (s obzirom da je $\operatorname{arctg}(-3) \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0\right\rangle$, pa je $\operatorname{arctg}(-3) + \pi \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$) zaključujemo da je $\varphi = \operatorname{arctg}(-3) + \pi$.

Prema tome, $z = \sqrt{10}\,\big(\cos(\operatorname{arctg}(-3)+\pi) + i(\sin(\operatorname{arctg}(-3)+\pi)\big)$.

(b) Označimo $z := \cos\alpha - i\sin\alpha$. Primijetimo da je

$$z = \cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = 1\big(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\big),$$

i izraz na desnoj strani je očito trigonometrijski prikaz od z, ako ne zahtijevamo da argument φ u trigonometrijskom prikazu $z = r(\cos\varphi + i\cos\varphi)$ bude u intervalu $[0, 2\pi\rangle$ (naime, iz uvjeta zadatka slijedi da je $-\alpha \in \left\langle -\frac{3\pi}{2}, -\pi \right\rangle$). Trigonometrijski prikaz od z u kojem je argument u intervalu $[0, 2\pi\rangle$ dan je sa

$$z = 1\left(\cos(-\alpha + 2\pi) + i\sin(-\alpha + 2\pi)\right).$$

2. Izračunajte:

(a) $(2 + 2i)^8$

(b) $\left(1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^7$.

Rješenje. (a) Trigonometrijski prikaz broja $z := 2 + 2i$ je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je:

- $r = |z| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{2} = 1$ pa je $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Kako po dogovoru u trigonometrijskom obliku uzimamo da je $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, slijedi da je $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$. Kako je $z = 2 + 2i$ u I. kvadrantu, slijedi da je $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Prema tome, $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, dakle

$$(2 + 2i)^8 = z^8 = \left(2\sqrt{2}\right)^8 \left(\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4096 \cdot 1 = 4096.$$

(b) Trigonometrijski prikaz broja $z := 1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je:

- $r = |z| = \left|\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$
- $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ pa je $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Kako po dogovoru u trigonometrijskom obliku uzimamo da je $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, slijedi da je $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$. Kako je $z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ u I. kvadrantu, slijedi da je $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Prema tome, $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (ovo slijedi i iz zadatka 1.1.4(d) s vježbi).

Dakle,

$$\begin{aligned}\left(1 + \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^7 &= z^7 = \left(\sqrt{3}\right)^7 \left(\cos\left(7 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(7 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 27\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{81}{2} - \frac{27\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

3. Izračunajte sve vrijednosti korijena:

(a) $\sqrt{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5}$

(b) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$.

Rješenje. (a) Trigonometrijski prikaz broja $z := 1 - i\sqrt{3}$ jest $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je:

- $r = |z| = \left|1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$
- $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$ pa je $\varphi = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Kako po dogovoru u trigonometrijskom obliku uzimamo da je $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, slijedi da je $\varphi \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$. Kako je $z = 1 - i\sqrt{3}$ u IV. kvadrantu, slijedi da je $\varphi = \frac{5\pi}{3}$.

Prema tome, $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, dakle

$$\begin{aligned}
\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5 = z^5 = 2^5 &\left(\cos\left(5 \cdot \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(5 \cdot \frac{5\pi}{3}\right)\right) \\
&= 32\left(\cos\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= 32\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5} &= \sqrt{32}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right) \\
&= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)\right), \qquad k = 0, 1,
\end{aligned}$$

dakle jedine vrijednosti korijena $\sqrt{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5}$ su

$$z_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{6} + 2i\sqrt{2}$$

i

$$z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\left(2\sqrt{6} + 2i\sqrt{2}\right).$$

(b) Trigonometrijski prikaz broja $z := -8 - 8\sqrt{3}i$ jest $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je:

- $r = |z| = \left|-8 - 8\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-8)^2 + \left(-8\sqrt{3}\right)^2} = 16$
- $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-8\sqrt{3}}{-8} = \sqrt{3}$ pa je $\varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Kako po dogovoru u trigonometrijskom obliku uzimamo da je $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, slijedi da je $\varphi \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$. Kako je $z = -8 - 8\sqrt{3}i$ u III. kvadrantu, slijedi da je $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.

Prema tome, $z = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, dakle

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16}&\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

dakle jedine vrijednosti korijena $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$ su

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - i\sqrt{3},$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i.$$

4.* Neka su $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, svi n-ti korijeni jedinice. Dokažite da vrijedi

$$(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1}) = 1 + z + \ldots + z^{n-1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Pomoću ovog identiteta dokažite jednakost

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Rješenje. Kako je $z^n - 1$ polinom n-tog stupnja s vodećim koeficijentom 1 i nultočkama $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, vrijedi

$$z^n - 1 = (z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1}). \tag{1}$$

Sad za sve $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, koristeći da je $z_0 = 1$, imamo

$$\begin{aligned}
(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1}) &= (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})\cdot\frac{z-z_0}{z-z_0} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{z^n-1}{z-1} \\
&= \frac{(z-1)\left(z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1\right)}{z-1} \\
&= z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1.
\end{aligned}$$

Dakle, jednakost

$$(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1}) = z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1 \tag{2}$$

vrijedi za sve $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ pa, budući da su njena lijeva i desna strana polinomi u z, zapravo vrijedi za sve $z \in \mathbb{C}$.

Uvrštavanjem $z = 1$ u jednakost (2) dobivamo

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-z_k) = n,$$

tj.

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=n,$$

tj.

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{k\pi}{n}\right)-i\cdot 2\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)=n,$$

tj.

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(2\sin^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)=n,$$

tj.

$$\prod_{k=1}^{n-1}(-2i)\sin\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)=n,$$

tj.

$$2^{n-1}(-i)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right)=n. \tag{3}$$

Kako je, koristeći de Moivreovu formulu,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}\right) &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^k\\
&= \left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\sum_{k=1}^{n-1}k}\\
&= \left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{(n-1)n}{2}}\\
&= \cos\left(\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{\pi}{n}\right)\\
&= \cos\frac{(n-1)\pi}{2}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\\
&= \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}\\
&= (0+i\cdot 1)^{n-1}\\
&= i^{n-1},
\end{aligned}$$

iz (3) slijedi

$$2^{n-1}(-i)^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\cdot i^{n-1}=n,$$

tj.

$$2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n,$$

dakle

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

5.* Neka su $a, b, c \in \mathbb{C}$ takvi da je $|a| = |b| = |c| =: r$. Dokažite da vrijedi

$$|ab + ac + bc| = r\,|a + b + c|\,.$$

Rješenje. Ako je $r = 0$, tada je $a = b = c = 0$ pa tvrdnja očito vrijedi. Ako $r \neq 0$, imamo

$$\begin{aligned}|ab + ac + bc| &= r^3 \frac{|ab + ac + bc|}{|abc|} = r^3 \left|\frac{ab + ac + bc}{abc}\right| = r^3 \left|\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right| \\ &= r \left|\frac{r^2}{c} + \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{a}\right| = r \left|\frac{|c|^2}{c} + \frac{|b|^2}{b} + \frac{|a|^2}{a}\right| \\ &= r\,|\overline{c} + \overline{b} + \overline{a}| = r\,\left|\overline{a + b + c}\right| = r\,|a + b + c|\,.\end{aligned}$$

6.* Neka je $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ takav da je $|z| = 1$. Dokažite da se z može prikazati u obliku

$$z = \frac{t + i}{t - i}$$

za neki $t \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Primijetimo da $t \in \mathbb{R}$ zadovoljava

$$z = \frac{t + i}{t - i}$$

ako i samo ako je

$$z(t - i) = t + i,$$

tj. ako i samo ako je

$$t = i\,\frac{z + 1}{z - 1}.$$

Preostaje dokazati da je $t_0 := i\,\frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$, tj. da je $\overline{t_0} = t_0$. Kako je $|z| = 1$, tj. $z\overline{z} = 1$, vrijedi

$$\overline{z} = \frac{1}{z} \tag{4}$$

pa imamo

$$\overline{t_0} = \overline{\left(i\,\frac{z + 1}{z - 1}\right)} = \overline{i}\,\frac{\overline{z} + 1}{\overline{z} - 1} \overset{(4)}{=} -i\,\frac{\frac{1}{z} + 1}{\frac{1}{z} - 1} = -i\,\frac{\frac{1}{z} + 1}{\frac{1}{z} - 1} \cdot \frac{z}{z} = -i\,\frac{1 + z}{1 - z} = i\,\frac{z + 1}{z - 1} = t_0,$$

što dokazuje tvrdnju.