

# KOMPLEKSNA ANALIZA

## Zadaci za vježbu br. 1

2020./2021.

1. Prikažite sljedeće brojeve u trigonometrijskom obliku:

(a)  $-\pi$

(b)  $-1 + 3i$

(c)  $\cos \alpha - i \sin \alpha$ , gdje je  $\alpha \in \langle \pi, \frac{3\pi}{2} \rangle$ .

2. Izračunajte:

(a)  $(2 + 2i)^8$

(b)  $(1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^7$ .

3. Izračunajte sve vrijednosti korijena:

(a)  $\sqrt{(1 - i\sqrt{3})^5}$

(b)  $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$ .

4.\* Neka su  $z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , svi  $n$ -ti korijeni jedinice. Dokažite da vrijedi

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1}) = 1 + z + \dots + z^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Pomoću ovog identiteta dokažite jednakost

$$\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

5.\* Neka su  $a, b, c \in \mathbb{C}$  takvi da je  $|a| = |b| = |c| =: r$ . Dokažite da vrijedi

$$|ab + ac + bc| = r |a + b + c|.$$

6.\* Neka je  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$  takav da je  $|z| = 1$ . Dokažite da se  $z$  može prikazati u obliku

$$z = \frac{t + i}{t - i}$$

za neki  $t \in \mathbb{R}$ .